المركز الوطني لتطوير المناهج
National Center for Curriculum Development

الرياضيات

الصف الثامن - كتاب الطالب

الفصل الدراسي الثاني

8

فريق التأليف

د. عمر محمد أبوغليون (رئيسًا)

هبه ماهر التميمي   إبراهيم أحمد عمايرة   نور محمد حسان

الناشر: المركز الوطني لتطوير المناهج

يسر المركز الوطني لتطوير المناهج استقبال آرائكم وملحوظاتكم على هذا الكتاب عن طريق العناوين الآتية:

06-5376262 / 237   06-5376266   P.O.Box: 2088 Amman 11941

@nccdjor   feedback@nccd.gov.jo   www.nccd.gov.jo

قـرَّرت وزارة التربيـة والتعليـم تدريـس هذا الكتـاب في مدارس المملكـة الأردنية الهاشـمية جميعها، بنـاءً على قـرار المجلس الأعلى للمركـز الوطنـي لتطويـر المناهج في جلسـته رقم (2021/5)، تاريـخ 2021/12/7 م، وقرار مجلـس التربية والتعليم رقـم (2021/159) تاريـخ 2021/12/21 م بـدءًا من العام الـدراسي 2021 / 2022 م.

- Prepared Originally in English for the National Center for Curriculum Development. Amman - Jordan
- Translated to Arabic, adapted, customised and published by the National Center for Curriculum Development. Amman - Jordan

ISBN: 978 - 9923 - 41 - 380 - 7

المملكة الأردنية الهاشمية
رقم الإيداع لدى دائرة المكتبة الوطنية
(2022/4/2076)

375.001

الأردن. المركز الوطني لتطوير المناهج

الرياضيـات الصـف الثامن: كتاب الطالـب (الفصل الدراسـي الثاني)/ المركـز الوطني لتطوير المناهـج.-ط2؛ مزيدة ومنقحة- عمـان: المركز، 2022

(173) ص.

ر.إ.: **2022/4/2076**

الواصفات: / تطوير المناهج/ / المقررات الدراسية/ / مستويات التعليم/ / المناهج/

يتحمل المؤلف كامل المسؤولية القانونية عن محتوى مصنفه، ولا يعبّر هذا المصنف عن رأي دائرة المكتبة الوطنية.

British Library Cataloguing -in- Publication Data
A catalogue record for this publication is available from the Library.

الطبعة الأولى (التجريبية) 1442 هـ / 2021 م
أعيدت طباعته 2022 م – 2024 م

المقدّمة

انطلاقًا من إيمان المملكة الأردنية الهاشـــمية الراسخ بأهمية تنمية قدرات الإنسان الأردني، وتسليحه بالعلم والمعرفة؛ ســـعى المركز الوطني لتطوير المناهج بالتعاون مع وزارة التربية والتعليم إلى تحديث المناهج الدراســـية وتطويرها، لتكون معينًا على الارتقاء بمستوى الطلبة المعرفي، ومجاراة الأقران في الدول المتقدمة. ولمّا كانت الرياضيات إحدى أهمّ الموادّ الدراسية التي تنمّي لدى الطلبة مهارات التفكير وحَلِّ المشكلات، فقد أَوْلى المركز هذا المبحث عنايةً كبيرةً، وحرص على إعـــداد كتب الرياضيات وفق أفضل الطرائـــق المُتَّبَعة عالميًّا على أيدي خبرات أردنية؛ لضمان انســـجامها مع القيم الوطنية الراسخة، وتلبيتها لاحتياجات طلبتنا.

روعي في إعداد كتب الرياضيات تقديم المحتوى بصورة سلســـة، ضمن ســـياقات حياتية شـــائقة، تزيد رغبة الطلبة في التعلُّم، ووُظِّفت فيها التكنولوجيا لتُســـهِمَ في جعل الطلبة أكثر تفاعلًا مـــع المفاهيم المُقدمة لهم. كما عُنِي بإبرازِ خطة حَلِّ المســـألة، فأفردَ لها دروسًا مســـتقلة تتيح للطلبة التدرُّب على أنواع مختلفة من هذه الخطط وتطبيقها في مسائل متنوعة. لقد احتوت الكتب على مشروع لكل وحدة؛ لتعزيز تعلُّم الطلبة المفاهيم والمهارات الواردة فيها وإثرائها. ولأنَّ التدرُّب المكثَّف على حَلِّ المســـائل يُعَدُّ إحدى أهم طرائق ترســـيخ المفاهيم الرياضية وزيادة الطلاقة الإجرائية لدى الطلبة؛ فقد أُعِدَّ كتاب التمارين على نحوٍ يُقدِّم للطلبة ورقة عمل في كل درس، تُحَلُّ بوصفها واجبًا منزليًّا، أو داخل الغرفة الصفية إن توافر الوقت الكافـــي. ولأنّنا ندرك جيدًا حرص الكوادر التعليمية الأردنية على تقديم أفضل ما لديها للطلبة؛ فقد جاء كتاب التمارين أداةً مساعدةً تُوفِّر عليها جهد إعداد أوراق العمل وطباعتها.

من المعلوم أنَّ الأرقام العربية تُستخدَم في معظم مصادر تعليم الرياضيات العالمية ، ولا سيَّما على شبكة الإنترنت، التي أصبحت أداةً تعليميةً مُهِمَّةً؛ لما تزخر به من صفحات تُقدِّم محتوًى تعليميًّا تفاعليًّا ذا فائدة كبيرة. وحرصًا منّا على ألّا يفوت طلبتنا أيُّ فرصة، فقد استعملنا في هذا الكتاب الأرقام العربية؛ لجَسر الهُوَّة بين طلبتنا والمحتوى الرقمي العلمي، الذي ينمو بتسارع في عالَم يخطو نحو التعليم الرقمي بوتيرة متسارعة.

ونحـــن إذ نقدّم هذا الكتاب، نأمل أن ينال إعجاب أبنائنا الطلبة والكـــوادر التعليمية الأردنية، ويجعل تعليم الرياضيات وتعلّمها أكثر متعةً وسهولةً، ونعد بأن نستمرَّ في تحسين هذا الكتاب في ضوء ما يصلنا من ملاحظات.

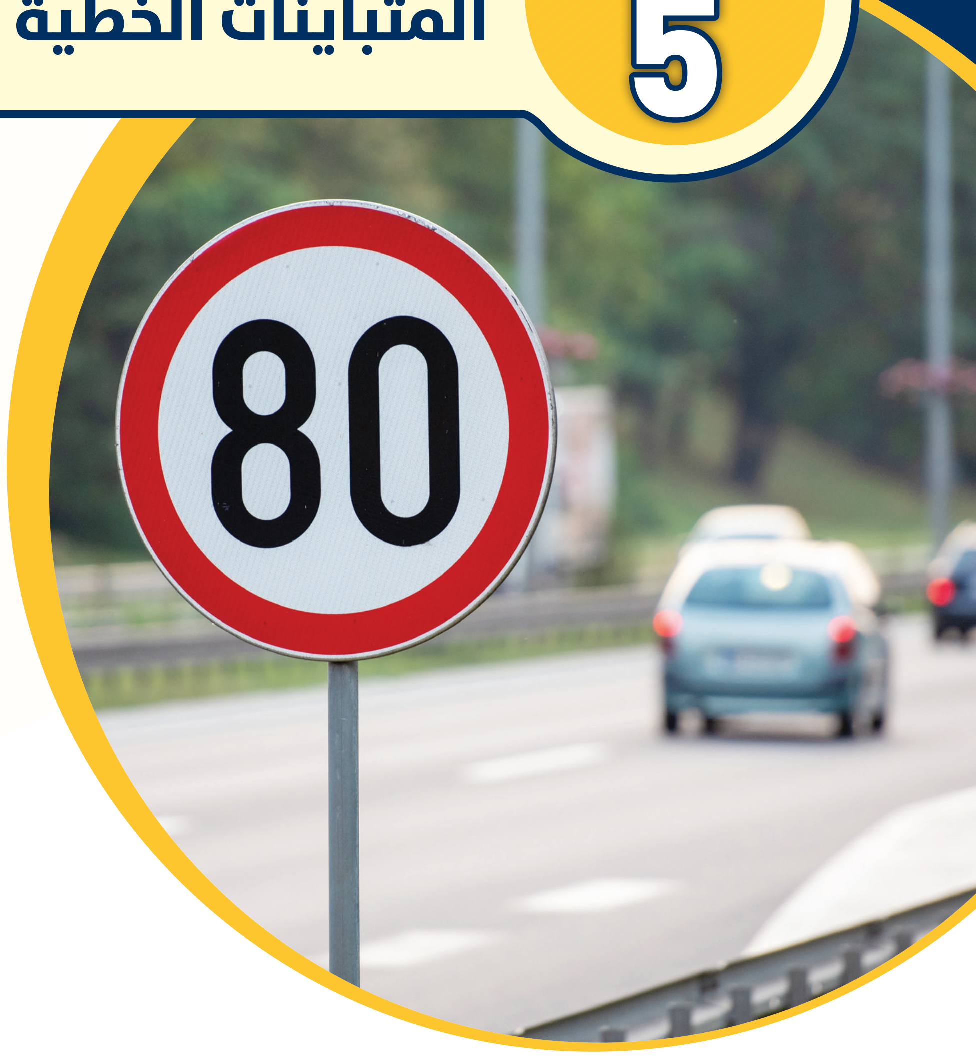
المركز الوطني لتطوير المناهج

قائمةُ المحتوياتِ

قائمةُ المحتوياتِ

الوحدةُ 5

المتبايناتُ الخطّيةُ



ما أهميَّةُ هذهِ الوحدةِ؟

للمتبايناتِ أهميةٌ كبيرةٌ في حياتِنا اليوميةِ، ويمكنُ عَنْ طريقِها التعبيرُ عَنِ الحدِّ الأقصى والأدنى لكثيرٍ مِنَ المواقفِ، فمثلًا تحدّدُ إدارةُ السّيرِ الحدَّ الأقصى للسرعةِ المسموحِ بها على الطّرقِ؛ للحدِّ مِنَ الحوادثِ المروريةِ، وتقليلِ الأثرِ البيئيِّ لحركةِ المرورِ مِنْ ضوضاءِ السّيّاراتِ والانبعاثاتِ.

تعلّمتُ سابقًا:

✓ المقارنةَ بَيْنَ الأعدادِ الحقيقيةِ، وترتيبَ مجموعةٍ مِنْها تنازليًّا أَوْ تصاعديًّا.

✓ تعيينَ قِيَمٍ على خطِّ الأعدادِ، واستعمالَهُ في إجراءِ عمليّاتٍ حسابيةٍ عليها.

✓ حلَّ معادلاتٍ خطّيةٍ بمتغيرٍ واحدٍ.

سأتعلَّمُ في هذهِ الوحدةِ:

- تعرّفَ مفهومِ المتباينةِ.
- حلَّ متبايناتٍ خطّيةٍ بمتغيرٍ واحدٍ بخطوةٍ واحدةٍ، وتمثيلَ حلِّها على خطِّ الأعدادِ.
- حلَّ متباينةٍ خطّيةٍ بمتغيرٍ واحدٍ بأكثرَ مِنْ خطوةٍ، وَتمثيلَ حلِّها على خطِّ الأعدادِ.

مشروعُ الوحدةِ: درجاتُ الغليانِ والِانصهارِ

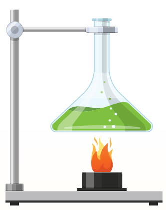
أستعدُّ ومجموعتي لتنفيذِ مشـروعِنا الخاصِّ الّذي سـنوظّفُ فيهِ المتبايناتِ؛ لنجدَ درجاتِ الحرارةِ الّتي تكونُ عندَها الموادُّ صُلبةً أَوْ سائلةً أَوْ في حالةِ الغليانِ.

خُطواتُ تنفيذِ المشروعِ:

1 أبحـثُ في شـبكةِ الإنترنـتْ عَنْ درجـاتِ انصهارِ مجموعةٍ مِنَ الموادِّ ضمنَ الشروطِ الآتيةِ:

- مادّةٌ درجةُ انصهارِها سالبةٌ.
- مادّتانِ درجتـا انصهارِهِما أكثرُ مِنْ 100°C وأقلُّ مِنْ 2000°C
- مادّتانِ دَرجتا انصارِهِما أكثرُ مِنْ 2000°C

2 أنشـئُ جـدولًا أكتبُ فيهِ أسـماءَ الموادِّ ودرجـاتِ انصهارِ كلٍّ مِنْها بالسّليسْيوسِ.



اسمُ المادّةِ	درجةُ الانصهارِ °C

3 أضيفُ عمودًا إلى الجدولِ؛ لأكتبَ فيهِ متبايناتٍ تمثّلُ درجاتِ الحرارةِ الّتي تكونُ عندَها المادّةُ صُلبةً.

4 أضيفُ عمودًا إلى الجدولِ؛ لأكتبَ فيهِ متبايناتٍ تمثّلُ درجاتِ الحرارةِ الّتي تكونُ عندَها المادّةُ سائلةً.

5 أسـتعملُ المعادلـةَ $C = \frac{5(F-32)}{9}$ لكتابـةِ المتباينـاتِ الّتي في الجـدولِ باسـتعمالِ درجاتِ الحـرارةِ الفهرنهايتيةِ، حيثُ C تمثّـلُ درجةَ الحرارةِ بالسّليسْـيوسِ وَ F تمثّلُ درجةَ الحرارةِ بالفِهْرنهايتِ، ثُمَّ أحلُّ هذِهِ المتبايناتِ وأمثّلُها على خطِّ الأعدادِ.

6 أبحثُ في شـبكةِ الإنترنتْ عَنْ درجـاتِ غليانِ كلٍّ مِنَ الموادِّ الّتي اخترْتُها سـابقًا، ثُمَّ أضيفُ عمودًا إلى الجدولِ وأكتبُ فيهِ درجاتِ الغليانِ بالسّليسْيوسِ.

7 أستعملُ المعادلةَ الواردةَ في النقطةِ 5 لكتابةِ متبايناتٍ لدرجاتِ الغليانِ بالفِهْرنهايتِ، ثُمَّ أحلُّها وأمثّلُ حلَّها على خطِّ الأعدادِ.

8 أُعِـدُّ عرضًا تقديميًّا يتضمـنُ الموادَّ الّتـي اخترْتُها، وصورةً لكلٍّ مِنْها، والجدولَ الّذي أعددْتُهُ.

عرضُ النتائجِ:

- أقدّمُ أمامَ طلبةِ صفّي العرضَ التقديميَّ الّذي أعددْتُهُ، مَعَ توضيحِ الفرقِ بَيْنَ درجاتِ الانصهارِ والغليانِ.

الدرسُ 1 كتابةُ المتبايناتِ وتمثيلُها

فكرةُ الدرسِ

أتعرّفُ المتباينةَ، وأمثّلُها على خطِّ الأعدادِ.

المصطلحاتُ

المتباينةُ، حلُّ المتباينةِ

أستكشفُ

ترصدُ كاميرا سرعةَ السيّاراتِ في أحدِ الشوارعِ، ومَنْ تزيدُ سرعتُهُ على 90 km/h يعاقَبُ بمخالفةٍ مروريةٍ، ما الجملةُ الرياضيةُ الّتي تعبّرُ عَنِ الحدِّ الأقصى للسرعةِ المسموحِ بِها في هذا الشارعِ؟

المتباينةُ (inequality) جملةٌ رياضيةٌ تقارنُ بَيْنَ مقدارَينِ، وتشملُ أحدَ الرّموزِ $\geq, \leq, >, <$

رموزُ المتبايناتِ				
الرمزُ	$<$	$>$	$\leq$	$\geq$
بالكلماتِ	• أصغرُ مِنْ • يقلُّ عَنْ • أقلُّ مِنْ	• أكبرُ مِنْ • يزيدُ على • أكثرُ مِنْ	• أصغرُ مِنْ أَوْ يُساوي • أقلُّ مِنْ أَوْ يُساوي • على الأكثرِ • لا يزيدُ على	• أكبرُ مِنْ أَوْ يُساوي • أكثرُ مِنْ أَوْ يُساوي • على الأقلِّ • لا يقلُّ عَنْ

مثال 1

أكتبُ متباينةً تمثّلُ كلَّ جملةٍ ممّا يأتي:

1 عددٌ أصغرُ مِنْ 15

المتغيرُ: لِيَكنْ a يمثّلُ العددَ.

المتباينةُ: $a < 15$

2 عددٌ مطروحٌ مِنْهُ 4 أكبرُ مِنْ 120

المتغيرُ: لِيَكنْ h يمثّلُ العددَ.

المتباينةُ: $h - 4 > 120$

3 كُتلتي أقلُّ مِنْ أَوْ تُساوي 48 kg

المتغيرُ: لِيَكنْ w يمثّلُ كُتلتي.

المتباينةُ: $w \leq 48$

4 عددُ طلبةِ صفّي لا يقلُّ عَنْ 20

المتغيرُ: لِيَكنْ n يمثّلُ عددَ طلبةِ صفّي.

المتباينةُ: $n \geq 20$

أتحققُ من فهمي:

5) عددٌ أكبرُ مِنْ 100

6) عددٌ مضافٌ إليهِ 10 أقلُّ مِنْ -36

7) كتلةُ حقيبتي أكبرُ مِنْ أَوْ تُساوي 10 kg

8) عددُ طلبةِ مدرستي لا يقلُّ عَنْ 200 طالبٍ.

يمكنُ استعمالُ المتبايناتِ للتعبيرِ عَن كثيرٍ مِنَ المواقفِ الحياتيةِ.

مثال 2: منَ الحياةِ

أكتبُ المتباينةَ الّتي تمثّلُ كلَّ جملةٍ ممّا يأتي:

1) انتخــابٌ: يحقُّ للمواطنِ الأردنيِّ التصويتُ في الانتخاباتِ النيابيّةِ الأردنيّةِ إذا كانَ عمرُهُ لا يقلُّ عَنْ 18 عامًا.

بِالْكَلِماتِ	عمرُ المواطنِ لا يقلُّ عَنْ 18
المتغيرُ	لِيَكنْ x يمثّلُ عمرَ المواطنِ.
المتباينةُ	$x \geq 18$

2) طيرانٌ: يُسمَحُ لراكبِ الدرجةِ السياحيّةِ على مَتْنِ الخطوطِ الجوّيّةِ الملكيةِ الأردنيّةِ في الرحلةِ بَيْنَ عمّانَ وتونسَ حملُ حقيبةٍ واحدةٍ لا تزيدُ كتلتُها على 23 kg

بِالْكَلِماتِ	كتلةُ الحقيبةِ لا تزيدُ على 23
المتغيرُ	لِيَكنْ y يمثّلُ كتلةَ الحقيبةِ.
المتباينةُ	$y \leq 23$

أتحققُ من فهمي:

3 رياضةٌ: يجبُ ألّا يقلَّ طولُ لاعبِ كرةِ السلّةِ المحترفِ عَنْ 170 cm

4 سيّاراتٌ: يتّسعُ خزّانُ الوَقودِ في السيّاراتِ الصغيرةِ 60 L على الأكثرِ.

حــلُّ المتباينةِ (solution of an inequality) هُوَ أيُّ عددٍ يجعلُ المتباينةَ صحيحةً؛ لذا يمكنُ أَنْ يكونَ للمتباينةِ أكثرُ مِنْ حلٍّ، ويمكنُني التحقّقُ مِنْ أَنَّ قيمةً ما تمثّلُ أحدَ حلولِ المتباينةِ بتعويضِها عَنِ المتغيّرِ الّذي تحتويهِ المتباينةُ.

مثال 3

أبيّنُ ما إذا كانَتِ القيمةُ المعطاةُ تمثّلُ أحدَ حلولِ المتباينةِ أَمْ لا في كلٍّ ممّا يأتي:

1 $2x - 1 > 5, x = 4$

أكتبُ المتباينةَ	$2x - 1 > 5$
أعوّضُ عَنْ x بِـ 4	$2(4) - 1 \overset{?}{>} 5$
أبسّطُ	$7 > 5$ ✓

بما أَنَّ $2x - 1 > 5$ صحيحةٌ عِنْدَ $x = 4$، فإنَّ العددَ 4 يمثّلُ أحدَ حلولِ المتباينةِ.

2 $6 - y < 6, y = -2$

أكتبُ المتباينةَ	$6 - y < 6$
أعوّضُ عَنْ y بِـ -2	$6 - (-2) \overset{?}{<} 6$
أبسّطُ	$8 < 6$ ✗

بما أَنَّ $6 - y < 6$ ليسَتْ صحيحةً عِنْدَ $y = -2$، فإنَّ العددَ -2 لا يمثّلُ حلًّا للمتباينةِ.

3 $12 \le 9 - 3a, a = -1$

أكتبُ المتباينةَ	$12 \le 9 - 3a$
أعوّضُ عَنْ a بِـ -1	$12 \overset{?}{\le} 9 - 3(-1)$
أبسّطُ	$12 \le 12$ ✓

بما أَنَّ $12 \le 9 - 3a$ صحيحةٌ عِنْدَ $a = -1$، فإنَّ العددَ -1 يمثّلُ أحدَ حلولِ المتباينةِ.

أتحقّقُ من فهمي:

4 $2s + 5 > 10,\ s = 3$

5 $7 < 1 - 2d,\ d = 4$

6 $10 \geq 2 - 8k,\ k = -1$

يصعبُ أحيانًا كتابةُ القِيَمِ جميعِها الّتي تجعلُ المتباينةَ صحيحةً؛ لِذا يمكنُ تمثيلُ تلكَ القِيَمِ على خطِّ الأعدادِ، ويكونُ ذلكَ بوضعِ دائرةٍ مفتوحةٍ (○) أَوْ مغلقةٍ (●) للدلالةِ على بدايةِ القِيَمِ، ثُمَّ وضعِ سهمٍ إلى اليمينِ أَوِ اليسارِ؛ لإظهارِ اتّجاهِ القِيَمِ.

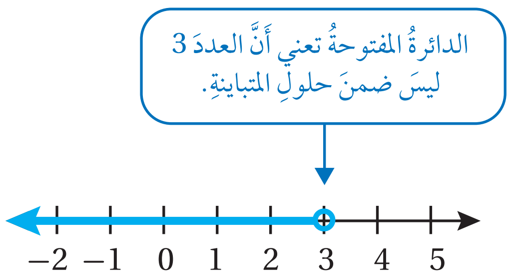
تُستعمَلُ الدائرةُ المفتوحةُ إذا كانَ رمزُ المتباينةِ $>$ أَوْ $<$ ، وهذا يعني أَنَّ نقطةَ بدايةِ القِيَمِ ليسَتْ ضمنَ حلولِ المتباينةِ، أمّا الدائرةُ المغلقةُ فتُستعمَلُ إذا كانَ رمزُ المتباينةِ $\leq$ أَوْ $\geq$ ، وهذا يعني أَنَّ نقطةَ بدايةِ القِيَمِ ضمنَ حلولِ المتباينةِ.

مثال 4

أمثّلُ كلَّ متباينةٍ ممّا يأتي على خطِّ الأعدادِ:

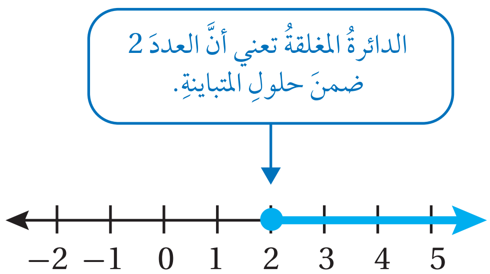
1 $x < 3$

أضعُ دائرةً مفتوحةً على العددِ 3، ثُمَّ أرسمُ سهمًا باتّجاهِ اليسارِ.



2 $y \geq 2$

أضعُ دائرةً مغلقةً على العددِ 2، ثُمَّ أرسمُ سهمًا باتّجاهِ اليمينِ.



أتحقّقُ من فهمي:

3 $a > 1$

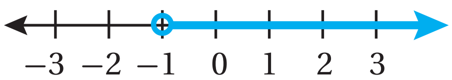
4 $z \geq -4$

5 $n < -3$

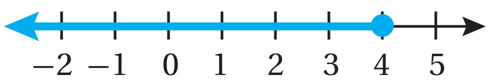
تعلّمْتُ في المثالِ السابقِ تمثيلَ متباينةٍ على خطِّ الأعدادِ، ويمكنني أيضًا تحديدُ المتباينةِ مِنْ تمثيلِها على خطِّ الأعدادِ.

مثال 5

أكتبُ المتباينةَ الممثَّلةَ على خطِّ الأعدادِ في كلٍّ ممّا يأتي:

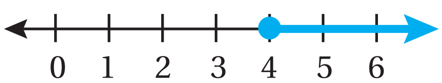
1


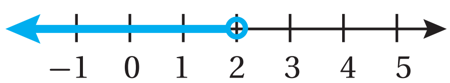
توجدُ دائرةٌ مفتوحةٌ عِنْدَ العددِ 1− واتّجاهُ السهمِ إلى اليمينِ، وهذا يدلُّ على أَنَّ حلولَ المتباينةِ هِيَ الأعدادُ الأكبرُ مِنْ 1−، وباستعمالِ المتغيرِ x فإنَّ المتباينةَ هِيَ: $x > -1$

2


توجدُ دائرةٌ مغلقةٌ عِنْدَ العددِ 4 واتّجاهُ السهمِ إلى اليسارِ، وهذا يدلُّ على أَنَّ حلولَ المتباينةِ هِيَ الأعدادُ الأقلُّ مِنْ أَوْ تُساوي 4، وباستعمالِ المتغيرِ k فإنَّ المتباينةَ هِيَ: $k \leq 4$

أتحققُ من فهمي:

3


4


أتدرب وأحل المسائل

أكتبُ المتباينةَ الّتي تمثّلُ كلَّ جملةٍ ممّا يأتي:

1. عددٌ لا يقلُّ عَنْ 6
2. عمرُ حنينَ 7 سنواتٍ على الأكثرِ.
3. بعدَ 3 سنواتٍ مِنَ الآنَ يكونُ عمرُ ديمةَ 12 سنةً على الأقلِّ.
4. طولُ هاشمٍ أقلُّ مِنْ 150 cm
5. أقصى ارتفاعٍ للسيّاراتِ الّتي تمرُّ تحتَ هذا الجسرِ هُوَ 5 m
6. عددٌ مطروحٌ مِنْهُ 5 أكبرُ مِنْ 8−
7. ثلاثةُ أمثالِ عددٍ مضافًا إليهِ 10 أقلُّ مِنْ أَوْ يُساوي 7

8 **جامعاتٌ:** يحـقُّ للطالبِ التقدمُ للالتحاقِ بكلّيةِ الصيدلـةِ إذا كانَ معدّلُهُ في امتحانِ الثانويةِ العامّةِ لا يقلُّ عَنْ 80% أكتبُ المتباينةَ الّتي تمثّلُ هٰذِهِ الجملةَ.

9 **علومٌ:** يبدأُ الماءُ بالتحوّلِ مِنَ الحالةِ السائلةِ إلى الحالةِ الصُّلبةِ عنـدَ درجةِ حرارةِ $0°C$ أوْ أقلَّ. أكتبُ المتباينةَ الّتي تمثّلُ هٰذِهِ الجملةَ.

معلومةٌ

درجـةُ التجمُّـدِ هـيَ الدرجـةُ الّتـي يصبـحُ السائلُ عندَها صُلبًا.

10 **صحّةٌ:** يحتاجُ جسمُ الإنسانِ إلى 1600 سُعرةٍ حراريةٍ يوميًّا على الأقلِّ؛ ليقومَ بوظائفِهِ الحيويّةِ. أكتبُ المتباينةَ الّتي تمثّلُ هٰذِهِ الجملةَ.

أبيّنُ ما إذا كانَتِ القيمةُ المعطاةُ تمثّلُ أحدَ حلولِ المتباينةِ أَمْ لا في كلٍّ ممّا يأتي:

أتذكّرُ

أتّبعُ أولويّاتِ العملياتِ الحســابيةِ بعدَ تعويضِ القيمةِ المعطاةِ.

11 $3x + 1 > 5, x = 2$

12 $4z + 3 < -6, z = 0$

13 $\frac{8-u}{u} \geq -9, u = -1$

14 $18-n > 4, n = 12$

15 $5r \leq 35, r = 7$

16 $\frac{3m}{6} - 2 > 3, m = 8$

17 $-5 \div s < -1, s = 10$

18 $17 > 2y, y = 7$

أمثّلُ كلَّ متباينةٍ ممّا يأتي على خطِّ الأعدادِ:

19 $y > -4$

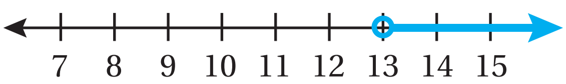
20 $h < 3$

21 $n \leq 11$

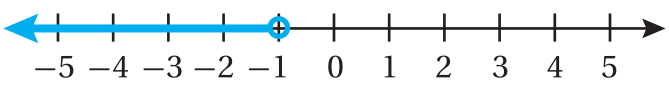
22 $t \geq 9$

أكتبُ المتباينةَ الممثّلَةَ على خطِّ الأعدادِ في كلٍّ ممّا يأتي:

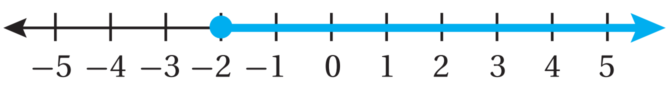
23



24



25



معلومةٌ

يمكنُ للعينِ البشريةِ رؤيةُ الضوءِ الّذي يتراوحُ طولُهُ الموجيُّ بَيْنَ 380 وَ700 نانومتر، ويسمّى هذا النطاقُ الطّيفَ المرئيَّ، وللحيواناتِ طيفٌ مرئيٌّ آخَرُ.

26 **فيزياءُ:** وفقًا لقوانينِ الفيزياءِ لا يمكنُ لأيِّ جسمٍ السيرُ بسرعةٍ أكبرَ مِنْ سرعةِ الضوءِ البالغةِ 300000 km/s تقريبًا. أكتبُ متباينةً تعبّرُ عَنْ سرعةِ الأجسامِ مقارنةً بسرعةِ الضوءِ، وأمثّلُها على خطِّ الأعدادِ.

27 أعودُ إلى فقرةِ (أستكشفُ) بدايةَ الدرسِ، وأحلُّ المسألةَ.

مهاراتُ التفكيرِ العُليا

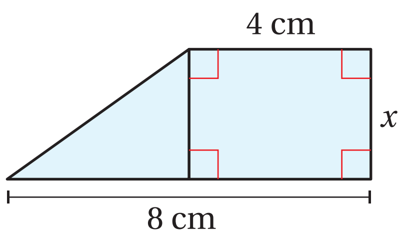
28 **أكتشفُ الخطأَ:** تقولُ سارةُ: إنَّ أكبرَ عددٍ كلّيٍّ يحقّقُ المتباينةَ $x < -3$ هُوَ العددُ -4 أكتشفُ الخطأَ في ما تقولُهُ سارةُ، وأصحّحُهُ.

أتذكّرُ

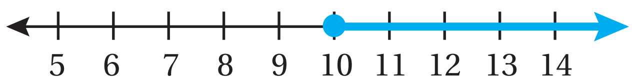
لحسابِ مِساحةِ الشكلِ المركّبِ، أقسّمُهُ إلى أشكالٍ بسيطةٍ، كالمثلثِ والمربعِ والمستطيلِ، ثُمَّ أحسُبُ مِساحةَ كلٍّ مِنْ هذِهِ الأشكالِ وأجمعُها.

29 **تبريرٌ:** أكتبُ متباينةً تعبّرُ عَنِ الجملةِ الآتيةِ، وأبرّر إجابتي:

"مِساحةُ الشكلِ الآتي لا تزيدُ على $18\ cm^2$".



30 **مسألةٌ مفتوحةٌ:** أكتبُ موقفًا حياتيًا يمثّلُ المتباينةَ الممثَّلةَ على خطِّ الأعدادِ الآتي:



31 **أكتبُ** كيفَ أحدّدُ ما إذا كانَ العددُ يمثّلُ أحدَ حلولِ المتباينةِ أَمْ لا؟

الدرسُ 2 حلُّ المتبايناتِ بالجمعِ والطرحِ

فكرةُ الدرسِ

أحلُّ متبايناتٍ باستعمالِ خصائصِ الجمعِ أوِ الطرحِ، وأمثّلُ الحلَّ على خطِّ الأعدادِ.

المصطلحاتُ

متباينةٌ مكافئةٌ

أستكشفُ

قرصٌ صُلبٌ سَعةُ تخزينِهِ 180 جيجابايت، استُعمِلَ مِنْها 112 جيجابايت. أكتبُ متباينةً وأحلُّها؛ لأجدَ الحدَّ الأقصى لحجمِ البياناتِ الّتي يمكنُ تخزينُها على ما تبقّى مِنْ سَعةِ القرصِ.

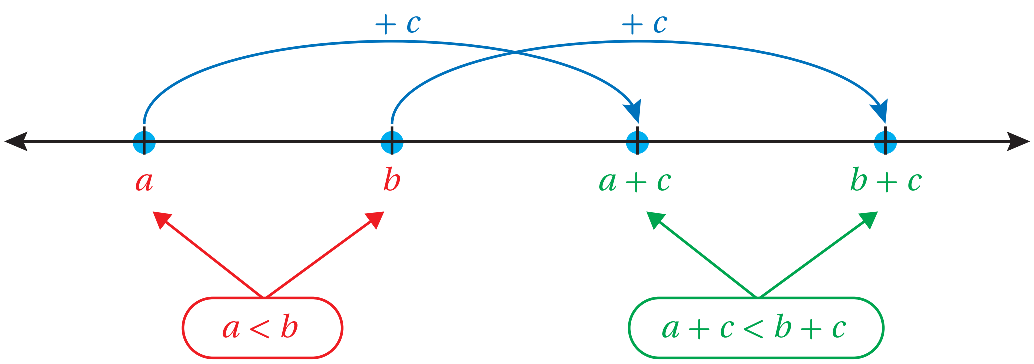
تعلّمْتُ سابقًا استعمالَ خصائصِ المساواةِ لحلِّ المعادلاتِ، ويمكنُني أيضًا حلُّ المتباينةِ باستعمالِ خصائصِ المتبايناتِ الّتي يمكنُ بتطبيقِها إيجادُ **متباينةٍ مكافئةٍ** (equivalent inequality) للمتباينةِ الأصليةِ. والمتبايناتُ المتكافئةُ هِيَ متبايناتٌ لَها الحلُّ نفسُهُ.

مفهومٌ أساسيٌّ — خاصّيّةُ الجمعِ للمتبايناتِ

- **بالكلماتِ:** إذا أضيفَ العددُ نفسُهُ إلى كلٍّ مِنْ طرفَيْ متباينةٍ صحيحةٍ، فإنَّ المتباينةَ الناتجةَ تبقى صحيحةً.
- **بالرموزِ:** العبارتانِ الآتيتانِ صحيحتانِ لأيِّ أعدادٍ حقيقيةٍ a و b و c :
  - إذا كانَتْ $a > b$، فإنَّ $a + c > b + c$
  - إذا كانَتْ $a < b$، فإنَّ $a + c < b + c$

تبقى هذِهِ الخاصّيّةُ صحيحةً في حالتَيْ ≤ وَ ≥

يوضّحُ المخطّطُ أدناهُ طريقةً واحدةً لتخيّلِ خاصّيّةِ الجمعِ للمتبايناتِ **عندَما** $c > 0$



مثال 1

أحلُّ كلَّ متباينةٍ ممّا يأتي، وأمثّلُ الحلَّ على خطِّ الأعدادِ، ثُمَّ أتحقّقُ مِنْ صحّتِهِ:

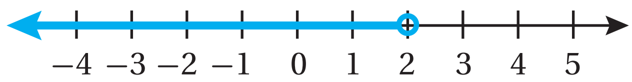
1 $x - 12 < -10$

المتباينةُ الأصليةُ $x - 12 < -10$

أضيفُ 12 إلى طرفَيِ المتباينةِ $x - 12 + 12 < -10 + 12$

أبسّطُ $x < 2$

إذنْ، الحلُّ هُوَ $x < 2$، وتمثيلُهُ على خطِّ الأعدادِ على النحوِ الآتي:



أتحقّقُ مِنْ صحّةِ الحلِّ:

لأتحقّقَ مِنْ صحّةِ الحلِّ، أعوّضُ بدلًا مِنْ x في المتباينةِ الأصليةِ عددًا أصغرَ مِنَ 2، مثلًا (-1).

المتباينةُ الأصليةُ $x - 12 < -10$

أعوّضُ عَنْ x بِـ -1 $(-1) - 12 \overset{?}{<} -10$

أبسّطُ $-13 < -10$ ✓

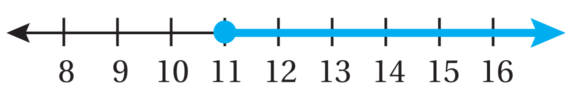
2 $7 \leq y - 4$

المتباينةُ الأصليةُ $7 \leq y - 4$

أجمعُ 4 إلى طرفَيِ المتباينةِ $7 + 4 \leq y - 4 + 4$

أبسّطُ $11 \leq y$

إذنْ، الحلُّ هُوَ $11 \leq y$ أَوْ $y \geq 11$، وتمثيلُهُ على خطِّ الأعدادِ على النحوِ الآتي:



أتحقّقُ مِنْ صحّةِ الحلِّ:

لأتحقّقَ مِنْ صحّةِ الحلِّ، أعوّضُ بدلًا مِنْ y في المتباينةِ الأصليةِ عددًا أكبرَ مِنْ 11، مثلًا (20).

المتباينةُ الأصليةُ	$7 \leq y - 4$
أعوّضُ عَنْ y بـ 20	$7 \overset{?}{\leq} 20 - 4$
أبسّطُ	$7 \leq 16$ ✓

أتحقّقُ من فهمي:

3) $x - 4 < 1$

4) $y - 6 \geq -10$

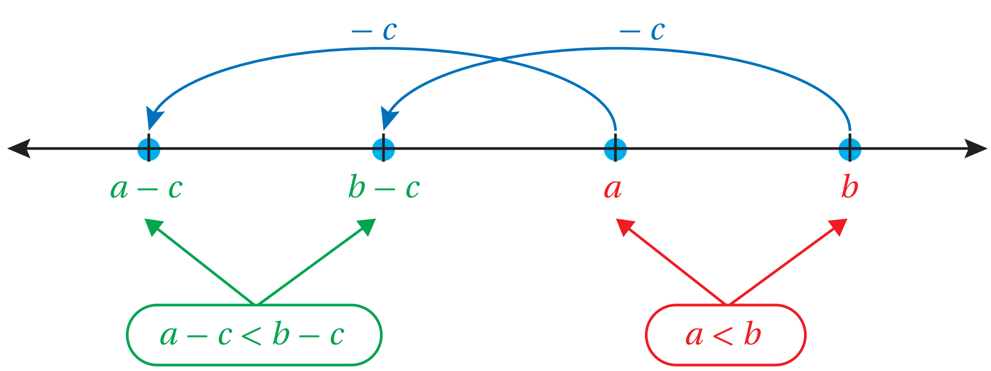
تعلّمْتُ في المثالِ السابقِ حلَّ المتبايناتِ باستعمالِ خاصّيّةِ الجمعِ للمتبايناتِ الّتي يمكنُ بِها إيجادُ متباينةٍ مكافئةٍ للمتباينةِ الأصليةِ، ويمكنُ أيضًا حلُّ المتبايناتِ باستعمالِ خاصّيّةِ الطرحِ للمتبايناتِ.

مفهومٌ أساسيٌّ — خاصّيّةُ الطرحِ للمتبايناتِ

- **بالكلماتِ:** إذا طُرِحَ العددُ نفسُهُ مِنْ طرفَيْ متباينةٍ صحيحةٍ، فإنَّ المتباينةَ الناتجةَ تبقى صحيحةً.
- **بالرموزِ:** العبارتانِ الآتيتانِ صحيحتانِ لأيِّ أعدادٍ حقيقيةٍ a و b و c:
  - إذا كانَتْ $a > b$، فإنَّ $a - c > b - c$
  - إذا كانَتْ $a < b$، فإنَّ $a - c < b - c$

تبقى هذِهِ الخاصّيّةُ صحيحةً في حالتَيْ $\leq$ وَ $\geq$

يوضّحُ المخطّطُ أدناهُ طريقةً واحدةً لتخيّلِ خاصّيّةِ الطرحِ للمتبايناتِ **عندَما $c > 0$**



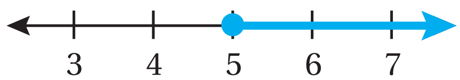
مثال 2

أحلُّ كلَّ متباينةٍ ممّا يأتي، وأمثّلُ الحلَّ على خطِّ الأعدادِ، ثُمَّ أتحقّقُ مِنْ صحّتِهِ:

1 $\boldsymbol{m + 5 \geq 10}$

المتباينةُ الأصليةُ	$m + 5 \geq 10$
أطرحُ 5 مِنْ طرفَيِ المتباينةِ	$m + 5 - 5 \geq 10 - 5$
أبسّطُ	$m \geq 5$

إذنْ، الحلُّ هُوَ $m \geq 5$، وتمثيلُهُ على خطِّ الأعدادِ على النحوِ الآتي:



أتحقّقُ مِنْ صحّةِ الحلِّ:

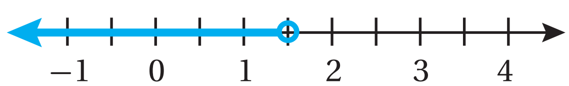
لأتحقّقَ مِنْ صحّةِ الحلِّ، أعوّضُ بدلًا مِنْ m في المتباينةِ الأصليةِ عددًا أكبرَ مِنْ 5، مثلًا (10).

المتباينةُ الأصليةُ	$m + 5 \geq 10$
أعوّضُ عَنْ m بـِ 10	$10 + 5 \overset{?}{\geq} 10$
أبسّطُ	$15 \geq 10$ ✓

2 $\boldsymbol{a + \frac{1}{2} < 2}$

المتباينةُ الأصليةُ	$a + \frac{1}{2} < 2$
أطرحُ $\frac{1}{2}$ مِنْ طرفَيِ المتباينةِ	$a + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} < 2 - \frac{1}{2}$
بتوحيدِ المقاماتِ	$a < \frac{4}{2} - \frac{1}{2}$
أبسّطُ	$a < \frac{3}{2}$

إذنْ، الحلُّ هُوَ $a < \frac{3}{2}$، وتمثيلُهُ على خطِّ الأعدادِ على النحوِ الآتي:



أتحقّقُ مِنْ صحّةِ الحلِّ:

لأتحقّقَ مِنْ صحّةِ الحلِّ، أعوّضُ بدلًا مِنْ a في المتباينةِ الأصليةِ عددًا أصغرَ مِنْ $\frac{3}{2}$ ، مثلًا (0).

المتباينةُ الأصليةُ	$a + \frac{1}{2} < 2$
أعوّضُ عَنْ a بـ 0	$0 + \frac{1}{2} \overset{?}{<} 2$
أبسّطُ	$\frac{1}{2} < 2$ ✓

أتحققُ من فهمي:

3) $2 + x \geq 6$

4) $5 > y + 12$

يمكنُ استعمالُ المتبايناتِ وحلِّها في كثيرٍ مِنَ التطبيقاتِ الحياتيةِ.

مثال 3: منَ الحياةِ

كـرةُ قدمٍ: لعبَ أحدُ نوادي كرةِ القدمِ ثلاثَ مبارياتٍ في ثلاثةِ ملاعبَ مختلفةٍ، وبجمهورٍ يزيدُ على 25000 شخصٍ. إذا كانَ عددُ الجمهورِ في الملعبِ الأولِ 9500 شخصٍ، وفي الملعبِ الثّاني 7000 شخصٍ. أكتبُ متباينةً وأحلُّها؛ لأجدَ عددَ الجمهورِ في الملعبِ الثالثِ.

بِالْكَلِماتِ	عددُ الجمهورِ في الملعبِ الأولِ وعددُ الجمهورِ في الملعبِ الثّاني وعددُ الجمهورِ في الملعبِ الثّالثِ يزيدُ على 25000
المتغيرُ	لِيَكنْ x يمثّلُ عددَ الجمهورِ في الملعبِ الثالثِ.
المتباينةُ	$9500 + 7000 + x > 25000$

المتباينةُ الأصليةُ	$9500 + 7000 + x > 25000$
أبسّطُ	$16500 + x > 25000$
أطرحُ 16500 مِنْ طرفَيِ المتباينةِ	$16500 - 16500 + x > 25000 - 16500$
أبسّطُ	$x > 8500$

إذنْ، عددُ الجمهورِ في الملعبِ الثالثِ أكثرُ مِنْ 8500 شخصٍ.

أتحققُ من فهمي:

سـيّاراتٌ: تريدُ مَلَكُ شـراءَ سـيّارةٍ لا يقلُّ ثمنُها عَنْ JD 15000، وقدْ وفّـرَتْ JD 13500. أكتبُ متباينةً وأحلُّها، لأجـدَ المبلغَ المتبقّيَ عليها لشراءِ السيّارةِ.

أتدرب وأحل المسائل

أحلُّ كلَّ متباينةٍ ممّا يأتي، وأمثّلُ الحلَّ على خطِّ الأعدادِ، ثُمَّ أتحقّقُ مِنْ صحّتِهِ:

1) $v - 6 < -3$

2) $y - 11 \geq 0$

3) $h - 7.8 > -2.8$

4) $0 \leq n - 8$

5) $k - 4 \geq -5$

6) $s - \frac{2}{3} < 4$

أحلُّ كلَّ متباينةٍ ممّا يأتي، وأمثّلُ الحلَّ على خطِّ الأعدادِ، ثُمَّ أتحقّقُ مِنْ صحّتِهِ:

7) $y + 5 < 11$

8) $-1 \geq 3 + b$

9) $8.1 < y + 6.1$

10) $2.4 \leq 6.4 + n$

11) $-8 \leq 8 + x$

12) $1\frac{1}{4} + w > 3$

أكتبُ المتباينةَ الّتي تمثّلُ كلَّ جملةٍ ممّا يأتي، ثُمَّ أحلُّها:

13) عددٌ مضافٌ إليهِ 7 أكبرُ مِنْ 20

14) عددٌ مطروحٌ مِنْهُ 9 أكبرُ مِنْ -5

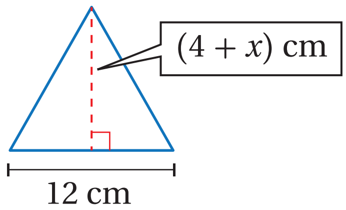
15) العددُ 6 أقلُّ مِنْ أَوْ يُساوي مجموعَ عددٍ وَ15

16) تسويقٌ: يخطّطُ مندوبُ مبيعاتِ إحدى شركاتِ تصنيعِ الأدويةِ لتسـويقِ 200 عُبـوّةِ دواءٍ على الأقلِّ في أُسبوعٍ. إذا تمكّنَ مِنْ تسويقِ 30 عُبوّةً في اليومِ الأولِ مِنَ الأسـبوعِ، فأكتبُ متباينةً وأحلُّها؛ لأجدَ عددَ العُبوّاتِ التي يحتاجُ المندوبُ إلى تسويقِها في الأيّامِ المتبقيةِ مِنَ الأسبوعِ ليصلَ إلى هدفِهِ.

معلومةٌ

منـدوبُ المبيعـاتِ هُوَ الشـخصُ الّذي يـروّجُ منتجاتِ الشركاتِ، وعادةً يَتقاضى أجرتَهُ كنسبةٍ مِنْ مبيعاتِـهِ؛ لتشـجيعِهِ على زيادةِ المبيعـاتِ، فكلّما زادَتْ مبيعاتُـهُ زادَتْ أجرتُهُ.

17 **هندسةٌ:** إذا كانَ طولُ قاعدةِ المثلثِ المجاورِ أقلَّ مِن ارتفاعِهِ، فَما القِيَمُ الممكِنةُ للمتغيرِ x؟



معلومة

السّحالي مِنْ ذواتِ الدّمِ البارِدِ، فَهِيَ تعتمِدُ على درجةِ حرارةِ الشمسِ لرفعِ درجةِ حرارةِ جسمِها الداخليةِ، ولتحفيزِ عمليةِ التمثيلِ الغذائيِّ الخاصِّ بِها.

18 **ميزانيةٌ شهريّةٌ:** يتقاضى موظفٌ راتبًا شهريًّا مقدارُهُ JD 560، يوفّرُ مِنْهُ JD 100 شهريًّا، ويدفعُ JD 20 اشتراكًا شهريًّا في أحدِ مراكزِ اللياقةِ البدنيةِ ويصرفُ باقِيَ الراتبِ. أكتبُ متباينةً وأحلُّها لأجدَ الحدَّ الأعلى للمبلغِ الّذي يمكنُ للموظفِ صرفُهُ شهريًّا.

19 **زواحفُ:** يحتاجُ حيوانُ أبو بريص الفهد إلى أَنْ تكونَ درجةُ الحرارةِ في منطقةِ تعرّضِهِ للشمسِ 28°C على الأقلِّ. إذا كانَتْ درجةُ الحرارةِ الحاليةُ 24°C، فأكتبُ متباينةً وأحلُّها لأجدَ كَمْ يجبُ أَنْ ترتفعَ درجةُ الحرارةِ لتلبّي حاجَةَ ذلكَ الحيوانِ.

20 أعودُ إلى فقرةِ (أستكشفُ) بدايةَ الدرسِ، وأحلُّ المسألةَ.

مهاراتُ التفكيرِ العُليا

21 **مسألةٌ مفتوحةٌ:** أكتبُ ثلاثَ متبايناتٍ مكافئةٍ للمتباينةِ $y < -2$

22 **أكتشفُ الخطأَ:** أنظرُ الحلَّ الآتِيَ، وأكتشفُ الخطأَ الواردَ فيهِ، وأصحّحُهُ:

$$-10 + x \geq -9$$
$$-10 + 10 + x \geq -9$$
$$x \geq -9$$

23 **أكتبُ** كيفَ أستعملُ خاصّيّتَي الجمعِ والطرحِ للمتبايناتِ في حلِّ متباينةٍ؟

الدرسُ 3 حلُّ المتبايناتِ بالضربِ والقسمةِ

فكرةُ الدرسِ

أحلُّ متبايناتٍ باستعمالِ خصائصِ الضربِ أوِ القسمةِ، وأمثّلُ الحلَّ على خطِّ الأعدادِ.

أستكشفُ

حصلَ كمالٌ على علامتَيْ 93 ، 90 في الاختبارَينِ: الأوّلِ، والثّاني، مِنْ مادّةِ العلومِ. أكتبُ متباينةً وأحلُّها؛ لأجدَ الحدَّ الأدنى للعلامةِ الّتي يجبُ أَنْ يحصلَ عليها في الاختبارِ الثالثِ ليكونَ معدّلُ علاماتِهِ 90 على الأقلِّ.

تعلّمْتُ سابقًا استعمالَ خصائصِ المساواةِ لحلِّ المعادلاتِ، ومِنْها خاصّيّةُ الضربِ، ويمكنُني أيضًا حلُّ المتباينةِ باستعمالِ خاصّيّةِ الضربِ للمتبايناتِ.

مفهومٌ أساسيٌّ | **خاصّيّةُ الضربِ للمتبايناتِ**

الضربُ في عددٍ موجبٍ

- **بالكلماتِ:** إذا ضُرِبَ كلٌّ مِنْ طرفَيْ متباينةٍ صحيحةٍ في عددٍ موجبٍ، فإنَّ المتباينةَ الناتجةَ تبقى صحيحةً.
- **بالرموزِ:** العبارتانِ الآتيتانِ صحيحتانِ لأيِّ عددَينِ حقيقيَّينِ a وَ b ولأيِّ $c > 0$:
  - إذا كانَتْ $a > b$، فإنَّ $ac > bc$
  - إذا كانَتْ $a < b$، فإنَّ $ac < bc$

الضربُ في عددٍ سالبٍ

- **بالكلماتِ:** إذا ضُرِبَ كلٌّ مِنْ طرفَيْ متباينةٍ صحيحةٍ في عددٍ سالبٍ، فإنَّهُ يتعيّنُ تغييرُ اتجاهِ رمزِ المتباينةِ لجعلِ المتباينةِ الناتجةِ صحيحةً أيضًا.
- **بالرموزِ:** العبارتانِ الآتيتانِ صحيحتانِ لأيِّ عددَينِ حقيقيَّينِ a وَ b ولأيِّ $c < 0$:
  - إذا كانَتْ $a > b$، فإنَّ $ac < bc$
  - إذا كانَتْ $a < b$، فإنَّ $ac > bc$

تبقى هذِهِ الخاصّيّةُ صحيحةً في حالتَيْ $\leq$ وَ $\geq$

مثال 1

أحلُّ كلَّ متباينةٍ ممّا يأتي، وأمثّلُ الحلَّ على خطِّ الأعدادِ، ثُمَّ أتحقّقُ مِنْ صحّتِهِ:

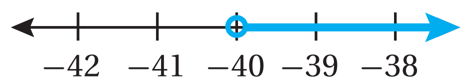
1 $\frac{x}{8} > -5$

المتباينةُ الأصليةُ $\frac{x}{8} > -5$

أضربُ طرفَيِ المتباينةِ في 8 $8\left(\frac{x}{8}\right) > 8\,(-5)$

أبسّطُ $x > -40$

إذنْ، الحلُّ هُوَ $x > -40$، وتمثيلُهُ على خطِّ الأعدادِ على النحوِ الآتي:



أتحقّقُ مِنْ صحّةِ الحلِّ:

لأتحقّقَ مِنْ صحّةِ الحلِّ، أعوّضُ بدلًا مِنْ x في المتباينةِ الأصليةِ عددًا أكبرَ مِنْ -40، مثلًا (0).

المتباينةُ الأصليةُ $\frac{x}{8} > -5$

أعوّضُ عَنْ x بـ 0 $\frac{0}{8} \overset{?}{>} -5$

أبسّطُ $0 > -5$ ✓

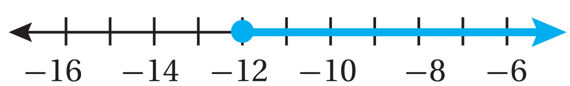
2 $\frac{y}{-3} \leq 4$

المتباينةُ الأصليةُ $\frac{y}{-3} \leq 4$

أضربُ طرفَيِ المتباينةِ في -3، وأغيّرُ اتّجاهَ رمزِ المتباينةِ $-3\left(\frac{y}{-3}\right) \geq -3\,(4)$

أبسّطُ $y \geq -12$

إذنْ، الحلُّ هُوَ $x \geq -12$، وتمثيلُهُ على خطِّ الأعدادِ على النحوِ الآتي:



أتحقّقُ مِنْ صحّةِ الحلِّ:

لأتحقّقَ مِنْ صحّةِ الحلِّ، أعوّضُ بدلًا مِنْ y في المتباينةِ الأصليةِ عددًا أكبرَ مِنْ -12، مثلًا (0).

المتباينةُ الأصليةُ	$\frac{y}{-3} \leq 4$
أعوّضُ عَنْ y بِـ 0	$\frac{0}{-3} \overset{?}{\leq} 4$
أبسّطُ	$0 \leq 4$ ✓

أتحقّقُ من فهمي:

3) $\frac{y}{3} > -1$

4) $-\frac{4}{7}m < 8$

إنَّ حلَّ المتبايناتِ باستعمالِ خاصّيّةِ القسمةِ مشابهٌ لحلِّها باستعمالِ خاصّيّةِ الضربِ، حيثُ إنَّهُ عِنْدَ قسمةِ طرفَي المتباينةِ على عددٍ موجبٍ يبقى اتّجاهُ رمزِ المتباينةِ كَما هُوَ، أمّا عِنْدَ قسمةِ طرفَي المتباينةِ على عددٍ سالبٍ، فإنَّهُ يتعيّنُ تغييرُ اتجاهِ رمزِ المتباينةِ.

مفهومٌ أساسيٌّ: خاصّيّةُ القسمةِ للمتبايناتِ

القسمةُ على عددٍ موجبٍ

- **بالكلماتِ:** إذا قُسِمَ كلٌّ مِنْ طرفَيْ متباينةٍ صحيحةٍ على عددٍ موجبٍ، فإنَّ المتباينةَ الناتجةَ تبقى صحيحةً.
- **بالرموزِ:** العبارتانِ الآتيتانِ صحيحتانِ لأيِّ عددَينِ حقيقيَّينِ a وَ b ولأيِّ $c > 0$:
  - إذا كانَتْ $a > b$، فإنَّ $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$
  - إذا كانَتْ $a < b$، فإنَّ $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$

القسمةُ على عددٍ سالبٍ

- **بالكلماتِ:** إذا قُسِمَ كلٌّ مِنْ طرفَيْ متباينةٍ صحيحةٍ على عددٍ سالبٍ، فإنَّهُ يتعيّنُ تغييرُ اتجاهِ رمزِ المتباينةِ لجعلِ المتباينةِ الناتجةِ صحيحةً أيضًا.
- **بالرموزِ:** العبارتانِ الآتيتانِ صحيحتانِ لأيِّ عددَينِ حقيقيَّينِ a وَ b ولأيِّ $c < 0$:
  - إذا كانَتْ $a > b$، فإنَّ $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$
  - إذا كانَتْ $a < b$، فإنَّ $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$

تبقى هذِهِ الخاصّيّةُ صحيحةً في حالتَيْ $\leq$ وَ $\geq$

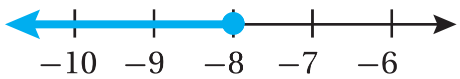
مثال 2

أحلُّ كلَّ متباينةٍ ممّا يأتي، وأمثّلُ الحلَّ على خطِّ الأعدادِ، ثُمَّ أتحقّقُ مِنْ صحّتِهِ:

1 $3m \le -24$

المتباينةُ الأصليةُ	$3m \le -24$
أقسمُ طرفَيِ المتباينةِ على 3	$\frac{3m}{3} \le \frac{-24}{3}$
أبسّطُ	$m \le -8$

إذنْ، الحلُّ هُوَ $m \le -8$، وتمثيلُهُ على خطِّ الأعدادِ على النحوِ الآتي:



أتحقّقُ مِنْ صحّةِ الحلِّ:

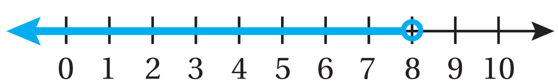
لأتحقّقَ مِنْ صحّةِ الحلِّ، أعوّضُ بدلًا مِنْ m في المتباينةِ الأصليةِ عددًا أقلَّ مِنْ -8، مَثلًا (-10).

المتباينةُ الأصليةُ	$3m \le -24$
أعوّضُ عَنْ m بـِ -10	$3(-10) \stackrel{?}{\le} -24$
أبسّطُ	$-30 \le -24$ ✓

2 $-7k > -56$

المتباينةُ الأصليةُ	$-7k > -56$
أقسمُ طرفَيِ المتباينةِ على -7، وأغيّرُ اتّجاهَ رمزِ المتباينةِ	$\frac{-7k}{-7} < \frac{-56}{-7}$
أبسّطُ	$k < 8$

إذنْ، الحلُّ هُوَ $k < 8$، وتمثيلُهُ على خطِّ الأعدادِ على النحوِ الآتي:



أتحقّقُ مِنْ صحّةِ الحلِّ:

لأتحقَّقَ مِنْ صحّةِ الحلِّ، أعوّضُ بدلًا مِنْ k في المتباينةِ الأصليةِ عددًا أصغرَ مِنْ 8 ، مَثلًا (1).

المتباينةُ الأصليةُ	$-7k > -56$
أعوّضُ عَنْ k بـ 1	$-7(1) \overset{?}{>} -56$
أبسّطُ	$-7 > -56$ ✓

أتحقّقُ من فهمي:

3) $4d < 8$

4) $-2y \leq -14$

يمكنُ استعمالُ المتبايناتِ في كثيرٍ مِنَ التطبيقاتِ الحياتيةِ.

مثال 3: منَ الحياةِ

سجّادٌ: تملِكُ سارةُ JD 100، وترغبُ بشراءِ سجّادةٍ جديدةٍ تغطّي أرضيّةَ غرفتِها المبيّنةَ أبعادُها في الشكلِ المجاورِ. أكتبُ متباينةً وأحلُّها لتمثّلَ ثمنَ المترِ المربعِ الواحدِ مِنَ السجّادِ الّذي يمكنُ لسارةَ أنْ تشتريَهُ.

بِما أنَّ أرضيةَ الغرفةِ مربعةُ الشكلِ، فإنَّهُ يمكنُ إيجادُ مِساحتِها على النحوِ الآتي:

$$A = s^2 = 4^2 = 16$$

إذنْ، مِساحةُ أرضيةِ الغرفةِ $16\ m^2$

وبِما أنَّ سارةَ ترغبُ بِشراءِ سجّادةٍ تغطّي أرضيّةَ الغرفةِ، فإنَّ مِساحةَ هذِهِ السجّادةِ يجبُ أنْ تكونَ $16\ m^2$

ولإيجادِ ثمنِ السجّادةِ أضربُ مِساحتَها في ثمنِ المترِ المربّعِ الواحدِ مِنَ السجّادِ.

بِالْكَلِماتِ	سعرُ السجّادةِ أقلُّ مِنْ أَوْ يُساوي JD100
المتغيرُ	لِيَكنْ x ثمنَ المترِ المربعِ الواحدِ مِنَ السجّادِ ، إذنْ سعرُ السجّادةِ $16x$
المتباينةُ	$16x \leq 100$

المتباينةُ الأصليةُ	$16\,x \leq 100$
أقسمُ طرفَيِ المتباينةِ على 16	$\dfrac{16\,x}{16} \leq \dfrac{100}{16}$
أبسّطُ	$x \leq 6.25$

إذنْ، يمكنُ لسارةَ شراءُ سجّادةٍ ثمنُ المترِ المربعِ الواحدِ مِنْها على الأكثرِ JD 6.25 .

أتحققُ من فهمي:

عملٌ: يتقاضى أحمدُ JD 2.5 عَنْ كلِّ ساعةِ عملٍ، أكتبُ متباينةً وأحلُّها؛ لإيجادِ عددِ الساعاتِ الّتي يجبُ أَنْ يعملَ فيها حتّى يتقاضى JD 400 على الأقلِّ.

أتدرب وأحل المسائل

أحلُّ كلَّ متباينةٍ ممّا يأتي، وأمثّلُ الحلَّ على خطِّ الأعدادِ، ثُمَّ أتحقّقُ مِنْ صحّتِهِ:

1) $\dfrac{u}{3} > -2$

2) $-4x \leq 12$

3) $\dfrac{1}{6}t < -\dfrac{1}{3}$

4) $-\dfrac{2}{5}w \geq 4$

5) $\dfrac{n}{5} \leq 0.8$

6) $-5 > \dfrac{c}{-4.5}$

أحلُّ كلَّ متباينةٍ ممّا يأتي، وأمثّلُ الحلَّ على خطِّ الأعدادِ، ثُمَّ أتحقّقُ مِنْ صحّتِهِ:

7) $-13x \geq 26$

8) $-20 \leq 10\,n$

9) $5b > -15$

10) $144 < 12\,d$

11) $-3\,m > -33$

12) $-3.9\,c \leq 43.68$

أكتبُ متباينةً تمثّلُ كلَّ جملةٍ ممّا يأتي، ثُمَّ أحلُّها:

13) خمسةُ أمثالِ عددٍ أقلُّ مِنْ 45

14) عددٌ مقسومٌ على 4 لا يزيدُ على 8

15) ثلاثةُ أمثالِ عددٍ أكبرُ مِنْ -18

16) عددٌ مقسومٌ على 2 لا يقلُّ عَنْ 5

17 **مدارسُ:** لا يقلُّ ثلاثةُ أخماسِ عددِ الطالباتِ في مدرسةِ فاطمةَ عَنْ 165 طالبةً. أكتبُ متباينةً وأحلُّها؛ لأجدَ أقلَّ عددٍ ممكنٍ لطالباتِ المدرسةِ.

18 **حديقةٌ:** يريدُ طارقٌ تبليطَ منطقةٍ مستطيلةِ الشكلِ في حديقةِ منزلِهِ مساحتُها $15\ m^2$، ويملكُ فقطْ JD 75، أكتبُ متباينةً وأحلُّها؛ لتمثلَ ثمنَ المترِ المربعِ الواحدِ مِنَ البلاطِ الّذي يمكنُ لطارقٍ أنْ يشتريَهُ.

أفكّرُ

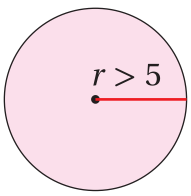
بعضُ أنواعِ البلاطِ مربعُ الشكلِ أَوْ سداسيٌّ منتظمٌ، فهلْ يمكنُ أنْ يكونَ البلاطُ خماسيًّا منتظمًا؟

19 أعودُ إلى فقرةِ (أستكشفُ) بدايةَ الدرسِ، وأحلُّ المسألةَ.

مهاراتُ التفكيرِ العُليا

20 **مسألةٌ مفتوحةٌ:** أكتبُ متباينةً يمكنُ حلُّها بالقسمةِ على عددٍ سالبٍ وحلُّها $x \geq \frac{1}{4}$

21 **تبريرٌ:** أكتبُ متباينةً وأحلُّها؛ لتمثّلَ المحيطَ الممكنَ للدائرةِ المجاورةِ، وأبرّرُ إجابتي.



أتذكّرُ

يمكنُ إيجادُ محيطِ الدائرةِ C باستعمالِ الصّيغةِ: $C = 2\pi r$، حيثُ r طولُ نصفِ قُطرِ الدائرةِ.

22 **أكتشفُ الخطأَ:** أنظرُ الحلَّ الآتيَ، وأكتشفُ الخطأَ الواردَ فيهِ، ثُمَّ أصحّحُهُ.

$$-6 > \frac{2}{3}x$$
$$\frac{3}{2}(-6) < \frac{3}{2}\left(\frac{2}{3}x\right)$$
$$-\frac{18}{2} < x$$
$$-9 < x$$

23 **أكتبُ** كيفَ أستعملُ خاصّيّتَي الضربِ والقسمةِ للمتبايناتِ في حلِّ متباينةٍ؟

الدرسُ 4 حلُّ المتبايناتِ متعددةِ الخطواتِ

فكرةُ الدرسِ

أحلُّ متبايناتٍ باستعمالِ أكثرَ مِنْ خطوةٍ، وأمثّلُ الحلَّ على خطِّ الأعدادِ.

أستكشفُ

تبلغُ كتلةُ جهادٍ 95 kg، ويريدُ إنقاصَها إلى أقلَّ مِنْ 80 kg، ويمكنُهُ أنْ يفقدَ ما معدلُهُ 1.5 kg مِنْ كتلتِهِ أسبوعيًّا باتباعِ حِميةٍ غذائيةٍ معيّنةٍ. أكتبُ متباينةً وأحلُّها؛ لأجدَ عددَ الأسابيعِ الّتي تلزمُ جهادًا حتى يصلَ إلى هدفِهِ.

يمكنُ حلُّ المتبايناتِ الّتي تحتوي أكثرَ مِنْ عمليةٍ بنفسِ طريقةِ حلِّ المتبايناتِ الّتي تحتوي عمليةً واحدةً، وذلكَ باستعمالِ خصائصِ المتبايناتِ لتحويلِ المتباينةِ الأصليةِ إلى متباينةٍ أبسطَ مكافئةٍ لَها مرورًا بسلسلةٍ مِنَ المتبايناتِ المتكافئةِ.

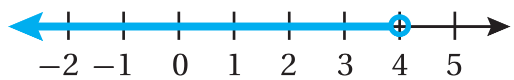
مثال 1

أحلُّ كلَّ متباينةٍ ممّا يأتي، وأمثّلُ الحلَّ على خطِّ الأعدادِ، ثُمَّ أتحقّقُ مِنْ صحّتِهِ:

1 $5y - 8 < 12$

المتباينةُ الأصليةُ	$5y - 8 < 12$
أجمعُ 8 لطرفَي المتباينةِ	$5y - 8 + 8 < 12 + 8$
أقسمُ طرفَي المتباينةِ على 5	$\frac{5y}{5} < \frac{20}{5}$
أبسّطُ	$y < 4$

إذنْ، الحلُّ هُوَ $y < 4$، وتمثيلُهُ على خطِّ الأعدادِ على النّحوِ الآتي:



أتحقّقُ مِنْ صحّةِ الحلِّ:

لأتحقّقَ مِنْ صحّةِ الحلِّ، أعوّضُ بدلًا مِنْ y في المتباينةِ الأصليةِ عددًا أقلَّ مِنْ 4، مثلًا (0).

المتباينةُ الأصليةُ	$5y - 8 < 12$
أعوّضُ عَنْ y بـ 0	$5(0) - 8 \overset{?}{<} 12$
أبسّطُ	$-8 < 12$ ✓

2 $-7b + 19 < -16$

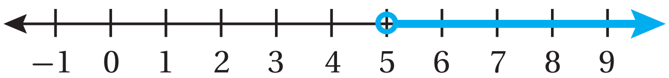
المتباينةُ الأصليةُ $\quad -7b + 19 < -16$

أطرحُ 19 مِنْ طرفَيِ المتباينةِ $\quad -7b + 19 - 19 < -16 - 19$

أقسمُ طرفَيِ المتباينةِ على -7، وأغيّرُ اتّجاهَ رمزِ المتباينةِ $\quad \dfrac{-7b}{-7} > \dfrac{-35}{-7}$

أبسّطُ $\quad b > 5$

إذنْ، الحلُّ هُوَ $b > 5$، وتمثيلُهُ على خطِّ الأعدادِ على النّحوِ الآتي:



أتحقّقُ مِنْ صحّةِ الحلِّ:

لأتحقّقَ مِنْ صحَةِ الحلِّ، أعوّضُ بدلًا مِنْ b في المتباينةِ الأصليةِ عددًا أكبرَ مِنْ 5، مثلًا (10).

المتباينةُ الأصليةُ $\quad -7b + 19 < -16$

أعوّضُ عَنْ b بـ 10 $\quad -7(10) + 19 \overset{?}{<} -16$

أبسّطُ $\quad -51 < -16 \quad ✓$

أتحققُ من فهمي:

3 $2x + 6 \le 14$

4 $-3x + 7 > -5$

تحتوي بعضُ المتبايناتِ متغيراتٍ في طرفَيْها، وفي هذِهِ الحالةِ نحتاجُ أوّلًا إلى تجميعِ الحدودِ الّتي تحتوي متغيراتٍ في طرفٍ واحدٍ مِنَ المتباينةِ، والحدودِ الثابتةِ في الطرفِ الآخَرِ، ثُمَّ حَلِّ المتباينةِ.

مثال 2

أحلُّ المتباينةَ: $6x - 5 \ge 2x + 11$، وأمثّلُ الحلَّ على خطِّ الأعدادِ، ثُمَّ أتحقّقُ مِنْ صحَّتِهِ:

المتباينةُ الأصليةُ $\quad 6x - 5 \ge 2x + 11$

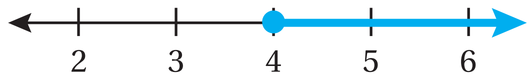
أجمعُ 5 لطرفَيِ المتباينةِ $\quad 6x - 5 + 5 \ge 2x + 11 + 5$

أطرحُ $2x$ مِنْ طرفَيِ المتباينةِ $\quad 6x - 2x \ge 2x - 2x + 16$

أقسمُ طرفَيِ المتباينةِ على 4 $\quad \dfrac{4x}{4} \ge \dfrac{16}{4}$

أبسّطُ $\quad x \ge 4$

إذنْ، الحلُّ هُوَ $x \geq 4$، وتمثيلُهُ على خطِّ الأعدادِ على النّحوِ الآتي:



أتحقّقُ مِنْ صحّةِ الحلِّ:

لأتحقّقَ مِنْ صحّةِ الحلِّ، أعوّضُ بدلًا مِنْ x في المتباينةِ الأصليةِ عددًا أكبرَ مِنْ 4، مثلًا (5).

المتباينةُ الأصليةُ $6x - 5 \geq 2x + 11$

أعوّضُ عَنْ x بـ 5 $6(5) - 5 \overset{?}{\geq} 2(5) + 11$

أبسّطُ $25 \geq 21$ ✓

أتحقّقُ من فهمي:

أحلُّ المتباينةَ: $5w - 7 > 3w + 2$، وأمثّلُ الحلَّ على خطِّ الأعدادِ، ثُمَّ أتحقّقُ مِنْ صحّتِهِ.

عندَ حلِّ متبايناتٍ تحتوي أقواسًا، يمكنُني استعمالُ خاصّيّةِ التوزيعِ للتخلّصِ مِنَ الأقواسِ أوّلًا، ثُمَّ أحلُّ المتباينةَ.

مثال 3

أحلُّ المتباينةَ: $3(t + 1) > 4t - 5$

المتباينةُ الأصليةُ $3(t + 1) > 4t - 5$

خاصّيّةُ التوزيعِ $3t + 3 > 4t - 5$

أطرحُ 3 مِنْ طرفَيِ المتباينةِ $3t + 3 - 3 > 4t - 5 - 3$

أطرحُ $4t$ مِنْ طرفَيِ المتباينةِ $3t - 4t > 4t - 4t - 8$

أقسمُ طرفَيِ المتباينةِ على -1، وأغيّرُ اتّجاهَ رمزِ المتباينةِ $\frac{-t}{-1} < \frac{-8}{-1}$

أبسّطُ $t < 8$

إذنْ، الحلُّ هُوَ $t < 8$

أتحقّقُ من فهمي:

أحلُّ المتباينةَ: $15 \leq 5 - 2(4m + 7)$

في بعضِ الأحيانِ، يعطي حلُّ المتباينةِ جملةً رياضيةً صحيحةً دائمًا، مثلَ $8 > 5$، وفي هذِهِ الحالةِ فإنَّ الحلَّ هُوَ جميعُ الأعدادِ الحقيقيةِ، وفي أحيانٍ أُخرى يعطي حلُّ المتباينةِ جملةً رياضيةً غيرَ صحيحةٍ أبدًا مثلَ $1 > 7$، وهذا يعني أنَّهُ لا يوجدُ حلٌّ للمتباينةِ.

مثال 4

أحلُّ كلًّا مِنَ المتباينات الآتيةِ:

1 $\mathbf{14 + 6b > 2(5 + 3b)}$

المتباينةُ الأصليةُ	$14 + 6b > 2(5 + 3b)$
خاصّيّةُ التوزيعِ	$14 + 6b > 10 + 6b$
أطرحُ $6b$ مِنْ طرفَيِ المتباينةِ	$14 + 6b - 6b > 10 + 6b - 6b$
أبسّطُ	$14 > 10$

بِما أنَّ المتباينةَ $14 > 10$ صحيحةٌ دائمًا مهما كانَتْ قيمةُ b، فإنَّ حلَّ المتباينةِ $(14 + 6b > 2(5 + 3b))$ هُوَ جميعُ الأعدادِ الحقيقيةِ.

2 $\mathbf{5 - 7m < m + 3 - 8m}$

المتباينةُ الأصليةُ	$5 - 7m < m + 3 - 8m$
أبسّطُ	$5 - 7m < 3 - 7m$
أجمعُ $7m$ إلى طرفَيِ المتباينةِ	$5 - 7m + 7m < 3 - 7m + 7m$
أبسّطُ	$5 < 3$

بِما أنَّ المتباينةَ $5 < 3$ غيرُ صحيحةٍ أبدًا مهما كانَتْ قيمةُ m، فإنَّ المتباينةَ $(5 - 7m < m + 3 - 8m)$ ليسَ لَها حلٌّ.

أتحققُ من فهمي:

3 $\mathbf{12 - 8h \leq 2(6 - 4h)}$

4 $\mathbf{3(2 + m) > 5m + 9 - 2m}$

يمكنُ استعمالُ المتبايناتِ الّتي يحتاجُ حلُّها إلى أكثرَ مِنْ خطوةٍ في حلِّ مسائلَ حياتيةٍ.

مثال 5: منَ الحياةِ

مصاعدُ: يبلغُ الحدُّ الأقصى لحمولةِ مصعدٍ في البنايةِ الّتي يسكنُ فيها هشامٌ 400 kg إذا أرادَ هشامٌ تحميلَ مجموعةٍ مِنَ الصّناديقِ كتلةُ الواحدِ مِنْها 20 kg، فأكتبُ متباينةً وأحلُّها؛ لأجدَ الحدَّ الأقصى لعددِ الصناديقِ الّتي يمكنُ لِهشامٍ تحميلُها في المصعدِ بأمانٍ، علمًا بأنَّ كتلةَ هشامٍ 80 kg

بِالْكَلِماتِ	كتلةُ هشامٍ وكتلةُ الصناديقِ أقلُّ مِنْ أَوْ يُساوي 400
المتغيرُ	لِيَكنْ x عددَ الصناديقِ، إذنْ كتلةُ الصناديقِ $20x$
المتباينةُ	$80 + 20x \leq 400$

المتباينةُ الأصليةُ
$$80 + 20x \leq 400$$

أطرحُ 80 مِنْ طرفَيِ المتباينةِ
$$80 - 80 + 20x \leq 400 - 80$$

أقسمُ طرفَيِ المتباينةِ على 20
$$\frac{20x}{20} \leq \frac{320}{20}$$

أبسّطُ
$$x \leq 16$$

إذنْ، يمكنُ لهشامٍ تحميلُ 16 صُندوقًا كحدٍّ أقصى في المصعدِ.

أتحققُ من فهمي:

تسويقٌ: ترغبُ ريمُ في الإعلانِ عَنْ منتجاتِ شركتِها على موقعٍ إلكترونيٍّ مقابلَ JD 10 شهريًّا، إضافةً إلى JD 0.05 عَنْ كلِّ مَنْ يزورُ موقعَ الإعلانِ. أكتبُ متباينةً وأحلُّها؛ لأجدَ أقلَّ عددٍ مِنَ الزّياراتِ الشهريةِ لموقعِ الإعلانِ ليكونَ المبلغُ الشهريُّ الّذي يتقاضاهُ الموقعُ الإلكترونيُّ مِنْ شركةِ ريمَ JD 100 على الأقلِّ.

أتدرب وأحل المسائل

أحلُّ كلَّ متباينةٍ ممّا يأتي، وأمثّلُ الحلَّ على خطِّ الأعدادِ، ثُمَّ أتحقّقُ مِنْ صحّتِهِ:

1) $3x - 2 < 13$

2) $-6 > 3 - 3x$

3) $-5 \geq 4x + 7$

4) $5 - 2x < 17$

5) $7b - 4 \leq 10$

6) $-6g + 2 > 20$

أحلُّ كلًّا مِنَ المتبايناتِ الآتيةِ، وأتحقّقُ مِنْ صحّةِ الحلِّ:

7) $3y + 6 < 2y - 8$

8) $6x + 10 \leq 2(7 - x)$

9) $3(x + 1) > 10 + 2x$

10) $2(7 - 3a) \leq 14 - 6a$

11) $x - 4 - 7x > 1 - 6x$

12) $8.1x + 1 > 8.1x - 10$

13) $\frac{x}{2} + 4 < 7$

14) $5w - 7 \leq 3w + 4$

15) $2(4x - 1) \leq 3(x + 4)$

16) $\frac{2t - 2}{7} > 4$

17) $3(x - 2) < 15$

18) $2(4t - 3) \geq 36$

19) $9h + 8 - 3h \geq 2(3h + 1) + 6$

20) $n - 1 > 3n + 4 - 2n$

أتذكّرُ

أستعملُ أولًا خاصّيّةَ التوزيعِ للتخلّصِ مِنَ الأقواسِ في طرفَيِ المتباينةِ، ثُمَّ أحلُّ المتباينةَ.

أكتبُ متباينةً تمثّلُ كلَّ جملةٍ ممّا يأتي، ثُمَّ أحلُّها:

21) ثُلُثا عددٍ مطروحًا مِنْهُ 5 لا يزيدُ على 15

22) أربعةُ أمثالِ مجموعِ عددٍ مَعَ 5 أكبرُ مِن 2

23 **تجارةٌ:** يمتلكُ كرمٌ معملًا لإنتاجِ الطاولاتِ تكلفةُ تشغيلِهِ الأسبوعيةُ JD 270، إضافةً إلى JD 60 لإنتاجِ الطاولةِ الواحدةِ. يبيعُ كرمٌ الطاولةَ الواحدةَ بمبلغِ JD 150 . أكتبُ متباينةً يمكنُ استخدامُها لتحديدِ عددِ الطاولاتِ الّتي يجبُ إنتاجُها وبيعُها لتحقيقِ ربحٍ أسبوعيٍّ، وأحلُّ المتباينةَ.

24 **علومٌ:** إذا كانَتْ C تمثّلُ درجةَ الحرارةِ بالسّليسْيوسِ وَ F تمثّلُ درجةَ الحرارة بالفِهْرنهايتِ وَ $C = \frac{5(F-32)}{9}$، فأكتبُ متباينةً يمكنُ استعمالُها لأجدَ درجاتِ الحرارةِ بالفِهْرنهايتِ الّتي يكونُ عندَها الذهبُ صُلبًا، ثُمَّ أحلُّها، علمًا بأنَّ درجةَ انصهارِ الذهبِ 1064°C

أتعلّمُ

درجةُ الانصهارِ هيَ الدرجةُ الّتي تتغيرُ عندَها المادّةُ مِنَ الحالةِ الصُّلبةِ إلى الحالةِ السائلةِ.

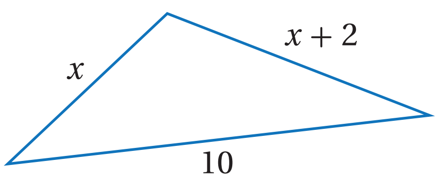
مهاراتُ التفكيرِ العُليا

تحدٍّ: أحلُّ كلًّا مِنَ المتبايناتِ الآتيةِ:

25 $25 + \frac{2x}{3} > 35 - x$

26 $\frac{3x}{4} + 5 \leq \frac{1}{2} - 6x$

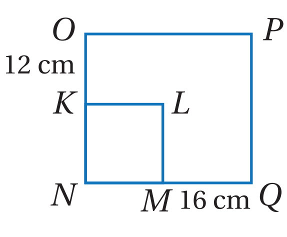
27 **تبريرٌ:** اعتمادًا على الشكلِ المجاورِ، أكتبُ متباينةً وأحلُّها، لأجدَ أقلَّ قيمةٍ لـ x، علمًا بأنَّ x عددٌ كلّيٌّ.



إرشادٌ

طولُ أيِّ ضلعٍ في مثلثٍ أصغرُ مِنْ مجموعِ طولَي الضلعَينِ الآخَرَين.

28 **تحدٍّ:** تمدّدَتْ أضلاعُ المربعِ $KLMN$ فتشكّلَ المستطيلُ $NOPQ$ كما في الشكلِ المجاورِ، إذا كانَ محيطُ المستطيلِ لا يقلُّ عَنْ مِثْلَيْ محيطِ المربعِ، فأكتبُ متباينةً وأحلُّها؛ لأجدَ أكبرَ طولٍ ممكنٍ لضلعِ المربعِ.



29 **أكتبُ** كيفَ أحلُّ متباينةً تحتوي متغيراتٍ في طرفَيْها؟

اختبارُ نهايةِ الوحدةِ

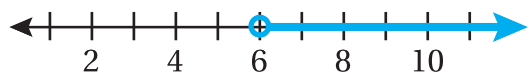
أختارُ رمزَ الإجابةِ الصحيحةِ لكلٍّ ممّا يأتي:

1 المتباينةُ الّتـي تمثّلُ الجملةَ (مِثْلا x مضافًا إليهِ 4 أقلُّ مِنْ 7) هِيَ:

a) $2(x+4) < 7$ **b)** $2x+4 > 7$

c) $2x+4 < 7$ **d)** $2x+4 \leq 7$

2 التمثيلُ البيانيُّ الآتي يمثّلُ حلَّ المتباينةِ:



a) $x > 6$ **b)** $x < 6$

c) $x \leq 6$ **d)** $x \geq 6$

3 أيُّ الأعدادِ الآتيةِ يعدُّ أحدَ حلولِ المتباينةِ $15 - 6y \leq 9$ ؟

a) -1 **b)** 1

c) 0 **d)** -2

4 حلُّ المتباينةِ $(-\frac{3}{4} < 6y)$ هُوَ:

a) $y < -\frac{1}{8}$ **b)** $y > -\frac{1}{8}$

c) $y > -\frac{9}{2}$ **d)** $y > -\frac{2}{9}$

5 المتباينةُ $\left(-\frac{1}{2}y \geq -\frac{3}{2}\right)$ تكافِئُ:

a) $y \leq \frac{3}{4}$ **b)** $y \leq \frac{4}{3}$

c) $y \leq -3$ **d)** $y \leq 3$

6 حلُّ المتباينةِ $5n-12 > 2(n+9)$ هُوَ:

a) $n > 6$ **b)** $n > 3$

c) $n > 10$ **d)** $n < 10$

7 حلُّ المتباينةِ $12 < 18 - 2x$ هُوَ:

a) $x < 6$ **b)** $x < 15$

c) $x > 3$ **d)** $x < 3$

أكتبُ متباينةً تمثّلُ كلَّ جملةٍ ممّا يأتي، ثُمَّ أحلُّها:

8 عددٌ ما مطروحٌ منهُ 15 أقلُّ مِنْ 7

9 جمعُ اثنينِ إلى ناتجِ قسـمةِ عددٍ على -6 يُساوي 8 على الأكثرِ.

10 مجموعُ عددٍ وَ9 أقلُّ مِنْ -1

11 خُمسُ عددٍ أقلُّ مِنْ 10

12 أربعةُ أمثالِ عددٍ مضافًا إلى 8 أقلُّ مِنْ 20

13 خمسةُ أمثالِ مجموعِ عددٍ مَعَ 6 أكبرُ مِنْ 20

أحلُّ كلَّ متباينةٍ ممّا يأتي، وأمثّلُ الحلَّ على خطِّ الأعدادِ، ثُمَّ أتحقّقُ مِنْ صحّتِهِ:

14 $x-5 < 6$

15 $3x > 21$

16 $x+4 \leq 7$

17 $t+5 > 3$

18 $p+12 \geq 2$

19 $2x-3 < 7$

20 $\frac{x}{2}+4 > 5$

21 $\frac{y}{5}+6 \leq 3$

22 $6 \geq 9-x$

23 $10-2x \leq 3$

24 يتقاضى موظفُ مبيعاتٍ في أحـدَ المراكزِ التجاريةِ مبلـغَ 75 JD أسـبوعيًّا، إضافةً إلى 4% مِـنْ قيمةِ مبيعاتِـهِ. يخطّطُ هـذا الموظفُ ألّا يقـلَّ دخلُهُ هذا الأسـبوعَ عَنْ 95 JD، أجدُ الحـدَّ الأدنى للمبيعاتِ الّتي تحقّقُ هدفَهُ.

أحلُّ كلًّا مِنَ المتبايناتِ الآتيةِ، وأتحقّقُ مِنْ صحّةِ الحلِّ:

25 $3 + \frac{r}{-4} \geq 6$

26 $2 > -3t - 10$

27 $5x - 12 < 3x - 4$

28 $2(k-5) < 2k + 5$

29 $2(5z - 20) < -3(4-z)$

30 **مسـاعداتٌ:** تخطّطُ جمعيةٌ خيريةٌ لإقامةِ بازارٍ تبيعُ فيهِ أطباقًا مِنَ الطعامِ وتوزيعِ رَيعِ مبيعاتِهِ على عائلاتٍ فقيرةٍ. إذا كانَ سعرُ الطّبقِ الواحدِ 1.25 JD وتخطّطُ الجمعيةُ لجمعِ ما لا يقلُّ عَنْ 400 JD، فأكتبُ متباينةً وأحلُّها؛ لأجـدَ أقلَّ عددٍ مِنَ الأطباقِ التي يجبُ بيعُها في البازارِ لتحقّقَ الجمعيةُ هدفَها.

تدريبٌ على الاختباراتِ الدّوليّةِ

31 حلُّ المتباينةِ $u - 13 < -18$ هُوَ:

a) $u < -5$ b) $u > 5$

c) $u > -5$ d) $u < 5$

32 ما أصغرُ عددٍ كلّيٍّ يحقّقُ المتباينةَ $-5n < 3$ ؟

a) -1 b) 0

c) 1 d) 2

33 أيُّ المتبايناتِ تكافئُ المتباينةَ $w > 4$ ؟

a) $w < 4$ b) $-4 < w$

c) $w < -4$ d) $-w < -4$

34 قرّرَتْ إدارةُ أحـدِ المطاراتِ صيانـةَ أحدِ مدارجِها البالغِ طولُهُ 456 m، إذا أُنجزَ أقلُّ مِنْ ثُلثِ العملِ في المرحلةِ الأولى، فإنَّ المتباينةَ الّتي تمثّلُ عددَ الأمتارِ الّتي ما زالَتْ تحتاجُ للصيانةِ هِيَ:

a) $d > 304$ b) $d \leq 304$

c) $d \geq 304$ d) $d < 304$

35 تكلفـةُ الدقيقـةِ الواحـدةِ مِنَ المكالماتِ الدوليةِ على الهاتفِ النّقّالِ لسميرٍ 8 قروشٍ. إذا كانَ الحدُّ الأعلى للمبلغِ الّذي يمكنُ أنْ يصرفَهُ سـميرٌ علـى مكالمةٍ دوليةٍ 2.4 JD فما المتباينةُ الّتي تُستعمَلُ لإيجادِ مدّةِ المكالمةِ؟

a) $0.08\,x \leq 2.4$ b) $0.08\,x \geq 2.4$

c) $0.08 \leq 2.4\,x$ d) $0.08 \geq 2.4\,x$

الوحدةُ

6

أنظمةُ المعادلاتِ الخطّيّةِ

ما أهميَّةُ هذهِ الوحدةِ؟

يمكــنُ نمذجــةُ مواقــفَ حياتيــةٍ عديدةٍ باستعمالِ معادلتَينِ خطّيّتَينِ بمتغيّرَينِ، مثلَ تغيّرِ الطّولِ، وتغيّرِ درجاتِ الحرارةِ في أثناءِ اليومِ، وتغيّرِ ارتفاعٍ ما، فمثلًا يســاعدُ حلُّ نظامِ المعــادلاتِ على تحديدِ الوقتِ الّذي يصبحُ فيهِ مِنطادانِ على الارتفاعِ نفسِــهِ إذا كانَ معدّلُ التغيّرِ في ارتفاعِهما مختلفًا.

تعلّمتُ سابقًا:

- ✓ تعيـيــنَ إحداثيَّــيْ نقطةٍ في المســتوى الإحداثيِّ.
- ✓ حلَّ المعادلةِ الخطّيّةِ بمتغيّرٍ واحدٍ.
- ✓ كتابــةَ معادلةِ المســتقيمِ بصيغــةِ المَيلِ والمقطعِ.

سأتعلَّمُ في هذهِ الوحدةِ:

- حلَّ نظــامِ معادلاتٍ خطّيّــةٍ بمتغيّرَينِ بيانيًّا.
- حلَّ نظامِ معــادلاتٍ خطّيّــةٍ بمتغيّرَينِ بالتعويضِ.
- حــلَّ نظامِ معــادلاتٍ خطّيّــةٍ بمتغيّرَينِ بالحذفِ.

مشروعُ الوحدةِ: الأشجارُ سريعةُ النّمُوِّ

أستعدُّ ومجموعتي لتنفيذِ مشــروعِنا الخاصِّ لكتابةِ معادلاتٍ خطّيّةٍ تمثّلُ نُمُوَّ أشــجارٍ ســريعةِ النّمُوِّ، وتكوينِ أنظمةِ معادلاتٍ مِنْها، وحلِّها.

خُطواتُ تنفيذِ المشروعِ:

1. أبحثُ في شــبكةِ الإنترنتْ عَنْ 4 أشجارٍ سريعةِ النّمُوِّ وأجدُ معدّلَ نُمُوِّ كلٍّ مِنها، مَعَ ضرورةِ الانتباهِ لتوحيدِ وَحداتِ الزّمنِ، ووَحداتِ الطولِ للأشجارِ جميعِها.

2. أكتبُ أربعَ معادلاتٍ خطّيّةٍ لأطوالِ الأشــجارِ الأربعِ بالنسبةِ للزمنِ معتمدًا على معدّلِ النّمُوِّ وَفقَ الشروطِ الآتيةِ:
   - أفترضُ طولًا أوّليًّا للشــجرتَينِ ذواتَيْ معدّلِ النّمُوِّ الأقلِّ على أَنْ يكونَ أكثرَ مِنْ 2 m
   - أفترضُ طولًا أوّليًّا للشــجرتَينِ ذواتَيْ معدّلِ النّمُوِّ الأعلى على أَنْ يكونَ أقلَّ مِنْ 1 m

3. أســتعملُ المعادلاتِ الأربعَ الناتجةَ في الخطوةِ (2) لأكوّنَ 4 أنظمةِ معادلاتٍ خطّيّةٍ، كلُّ نظامٍ مِنها مكوّنٌ مِنْ معادلتَينِ خطّيّتَينِ، إحداهُما مِنَ الشجرتَينِ ذواتَيْ معدّلِ النّمُوِّ الأعلى والأُخرى مِنَ الشــجرتَينِ ذواتَيْ معدّلِ النّمُوِّ الأقلِّ.

4. أجدُ مَتى يصبحُ طولُ الشجرتَينِ في كلِّ نظامِ معادلاتٍ كوَّنْتُــهُ في الخطوةِ (2) متســاويًا، وذلكَ بحلِّ النظامِ بيانيًّا وجبريًّا باســتعمالِ طريقتَي التعويضِ والحذفِ، وأبرّر إجابتي.

5. أســتعملُ برمجيةَ جيوجيبرا لحــلِّ أنظمةِ المعادلاتِ الخطّيّةِ والتحقّقِ مِنْ صحّةِ الحلِّ.

6. أُعِدُّ مطويةً مِنْ 4 صفحاتٍ، أُدرجُ في كلِّ صفحةٍ مِنْها صورةً لإحدى الأشجارِ الأربعِ ومعلوماتٍ عَنْها.

عرضُ النتائجِ:

- أعرضُ المطويةَ أمامَ طلبةِ صفّي، معَ توضيحِ المعادلاتِ الّتي كوّنْتُها لأطوالِ الأشجارِ.
- أطلبُ إلــى زُملائي / زميلاتي في المجموعاتِ الأُخرى حلَّ أنظمةِ المعادلاتِ الّتي كوّنْتُها، ثُمَّ أعرضُ لَهُمُ الحلَّ الجبريَّ والبيانيَّ.

الدرسُ 1

حلُّ نظامٍ مِنْ معادلتَينِ خطّيّتَينِ بيانيًّا

فكرةُ الدرسِ

أحلُّ نظامَ معادلاتٍ مكوّنًا من معادلتَينِ خطّيّتَينِ بيانيًّا.

المصطلحاتُ:

نظامُ المعادلاتِ الخطّيّةِ، حلُّ نظامِ المعادلاتِ الخطّيّةِ.

أستكشفُ

شجرةٌ طولُها 0.6 m ويزدادُ طولُها بمعدّلٍ ثابتٍ مقدارُهُ 0.3 m في السنةِ، وشجرةٌ أُخرى طولُها 1.8 m ويزدادُ طولُها بمعدّلٍ ثابتٍ مقدارُهُ 0.15 m لكلِّ سنةٍ. بعدَ كمْ سنةٍ يصبحُ للشجرتَينِ الطولُ نفسُهُ؟

يتكوّنُ **نظامُ المعادلاتِ الخطّيّةِ** (system of linear equations) مِنْ معادلتَينِ خطّيّتَينِ أَوْ أكثرَ لَها المتغيّراتُ نفسُها، وفي ما يأتي مثالٌ على نظامٍ مكوّنٍ مِنْ معادلتَينِ خطّيّتَينِ:

المعادلةُ 1 $\quad y = 2x + 1$

المعادلةُ 2 $\quad y = x - 3$

حلُّ نظامِ المعادلاتِ الخطّيّةِ (solution of a system of linear equations) بمتغيّرَينِ هُوَ زوجٌ مرتّبٌ يحقّقُ كلَّ معادلةٍ في النظامِ.

مثال 1

أحدّدُ ما إذا كانَ الزّوجُ المرتّبُ يمثّلُ حلًّا لنظامِ المعادلاتِ الخطّيّةِ المُعطى في كلٍّ ممّا يأتي:

1) $(4, 1);\quad x + 2y = 6$
$\qquad\qquad x - y = 3$

أعوّضُ الزّوجَ المرتّبَ $(4, 1)$ في كِلا المعادلتَينِ حيثُ $x = 4$ وَ $y = 1$

المعادلةُ 1	المعادلةُ 2
$x + 2y = 6$	$x - y = 3$
$(4) + 2(1) \stackrel{?}{=} 6$	$4 - 1 \stackrel{?}{=} 3$
$6 = 6$ ✓	$3 = 3$ ✓

بِما أنَّ الزّوجَ المرتَّبَ $(4, 1)$ يمثّلُ حلًّا لِكِلا المعادلتَينِ، إذنْ $(4, 1)$ يمثّلُ حلًّا لنظامِ المعادلاتِ الخطّيّةِ.

2 $(1, -2)$; $2x + y = 0$
$-x + 2y = 5$

أعوّضُ الزّوجَ المرتَّبَ في كِلا المعادلتَينِ حيثُ $x = 1$ وَ $y = -2$

المعادلةُ 1	المعادلةُ 2
$2x + y = 0$	$-x + 2y = 5$
$2(1) + (-2) \stackrel{?}{=} 0$	$-(1) + 2(-2) \stackrel{?}{=} 5$
$0 = 0$ ✓	$-5 \neq 5$ ✗

ألاحظُ أنَّ الزّوجَ المرتَّبَ $(1, -2)$ يمثّلُ حلًّا للمعادلةِ الأولى، ولكنَّهُ لا يمثّلُ حلًّا للمعادلةِ الثانيةِ، إذنْ $(1, -2)$ **لا يمثّلُ حلًّا** لنظامِ المعادلاتِ الخطّيّةِ.

أتحققُ من فهمي:

4 $(-1, 2)$; $2x + 5y = 8$
$3x - 2y = 5$

3 $(1, 3)$; $2x + y = 5$
$-2x + y = 1$

إحدى طرائقِ حلِّ نظامِ معادلاتٍ مكوّنٍ مِنْ معادلتَينِ خطّيّتَينِ هِيَ تمثيلُهما في المستوى الإحداثيِّ نفسِهِ، وإيجادُ النقطةِ الّتي يتقاطعُ عندَها المستقيمانِ والّتي تمثّلُ حلًّا للنظامِ.

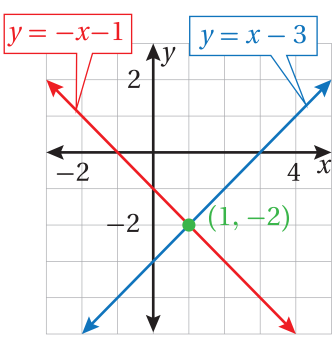
مثال 2

أحلُّ نظامَ المعادلاتِ الخطّيّةِ الآتيَ بيانيًّا:

$$y = x - 3$$
$$y = -x - 1$$

الْخُطْوَةُ 1 أمثّلُ المعادلتَينِ في المستوى الإحداثيِّ نفسِهِ.

ألاحظُ أنَّ كلا المعادلتَينِ مكتوبتانِ بصيغةِ المَيلِ والمقطعِ؛ لِـذا يمكنُ تمثيلُهما باستعمالِ المقطعِ y والمَيلِ.



الْخُطْوَةُ 2 أحدّدُ نقطةَ تقاطعِ المستقيمَينِ.

ألاحظُ مِنَ التمثيلِ البيانيِّ أنَّ المستقيمَينِ يتقاطعانِ في النقطةِ $(1, -2)$

الْخُطْوَةُ 3 أتحقّقُ مِنْ صحّةِ الحلِّ.

أتحقّقُ مِنْ أنَّ الزّوجَ المرتَّبَ $(1, -2)$ يمثّلُ حلًّا لِكِلا المعادلتَينِ:

المعادلةُ 1	المعادلةُ 2
$y = x - 3$	$y = -x - 1$
$-2 \stackrel{?}{=} 1 - 3$	$-2 \stackrel{?}{=} -(1) - 1$
$-2 = -2$ ✓	$-2 = -2$ ✓

إذنْ، حلُّ النظامِ $(1, -2)$.

أتحقّقُ من فهمي:

1) $y = -4 - x$
$y = 2x + 14$

2) $y = -x + 5$
$y = x - 3$

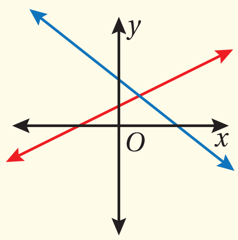
إرشادٌ: أستعملُ أوراقَ المربعاتِ الموجودةَ في نهايةِ كتابِ التمارينِ.

إنَّ التمثيلَ البيانيَّ لنظامِ معادلاتٍ مكوّنٍ مِنْ معادلتَينِ خطّيّتَينِ يكونُ إمّا مستقيمَينِ متقاطعَينِ وهذا يعني وجودَ حلٍّ واحدٍ فقطْ للنظامِ هُوَ نقطةُ التقاطعِ، أَوْ مستقيمَينِ متوازيَينِ ممّا يعني أنَّهُ لا يوجدُ حلٌّ للنظامِ، أَوِ المستقيمَ نفسَهُ وهذا يعني وجودَ عددٍ لانهائيٍّ مِنَ الحلولِ.

مفهومٌ أساسيٌّ: الحلولُ الممكنةُ لنظامِ المعادلاتِ الخطّيّةِ

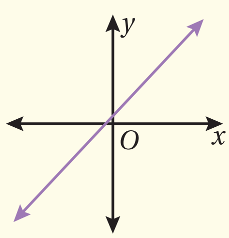
يمكنُ أَنْ يكونَ لنظامِ المعادلاتِ المكوّنِ مِنْ معادلتَينِ خطّيّتَينِ حلٌّ واحدٌ فقطْ، أَوْ عددٌ لانهائيٌّ مِنَ الحلولِ، أَوْ أنَّهُ لا يوجدُ لَهُ حلٌّ.

حلٌّ واحدٌ



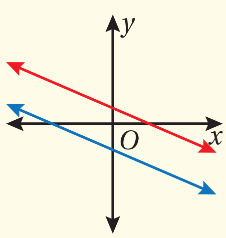
مستقيمانِ متقاطعانِ

عددٌ لانهائيٌّ مِنَ الحلولِ



المستقيمُ نفسُهُ

لا يوجدُ حلٌّ



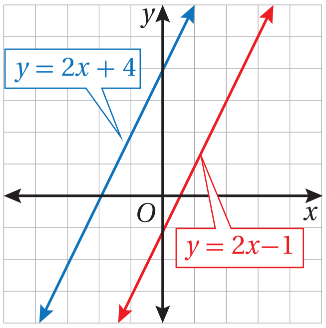
مستقيمانِ متوازيانِ

مثال 3

أحلُّ كلًّا مِنْ أنظمةِ المعادلاتِ الآتيةِ بيانيًّا:

1 $y = 2x + 4$

$y = 2x - 1$



الْخُطْوَةُ 1 أمثّلُ المعادلتَينِ في المستوى الإحداثيِّ نفسِهِ.

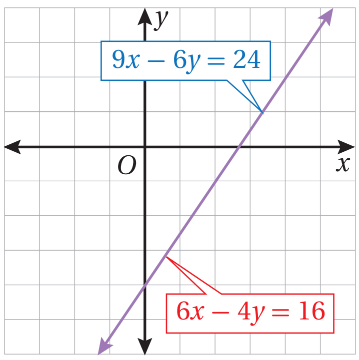
الْخُطْوَةُ 2 أحدّدُ نقطةَ تقاطعِ المستقيمَين.

ألاحظُ مِنَ التمثيلِ البيانيِّ أنَّ المستقيمَينِ متوازيانِ، وهذا يعني أنَّهُ لا توجدُ نقطةٌ مشتركةٌ بَيْنَ المعادلتَينِ.

إذنْ، لا يوجدُ حلٌّ لِهذا النظامِ.

2 $9x - 6y = 24$

$6x - 4y = 16$



الْخُطْوَةُ 1 أمثّلُ المعادلتَينِ في المستوى الإحداثيِّ نفسِهِ.

ألاحظُ أنَّ المعادلتَينِ على الصورةِ القياسيةِ للمعادلةِ الخطّيّةِ، ولتمثيلِهما بيانيًّا يمكنُني أوّلًا كتابتُهُما على صورةِ الميلِ والمقطعِ، أوِ اختيارُ قيمتَينِ لِـ x، ثُمَّ تعويضُهُما في المعادلةِ لأجدَ قِيَمَ y المقابلةَ لَها.

الْخُطْوَةُ 2 أحدّدُ نقطةَ تقاطعِ المستقيمَين.

ألاحظُ أنَّ كِلا المعادلتَينِ لَهُما التمثيلُ البيانيُّ نفسُهُ، وأنَّ أيَّ زوجٍ مرتَّبٍ حقّقَ المعادلةَ الأولى سيحقّقُ بالضرورةِ المعادلةَ الثانيةَ.

إذنْ، يوجدُ للنظامِ عددٌ لانهائيٌّ مِنَ الحلولِ.

أتعلّمُ

إذا كانَ للمعادلتَينِ في نظامِ المعادلاتِ الخطّيّةِ المَيلُ نفسُهُ والمقطعُ y نفسُهُ، فإنَّ للنظامِ عددًا لانهائيًّا مِنَ الحلولِ، أمّا إذا كانَ للنظامِ المَيلُ نفسُهُ والمقطعُ y مختلفٌ فلا يوجدُ حلٌّ للنظامِ.

أتحقق من فهمي:

3 $y = 2x + 1$

$y = 2x - 5$

4 $-2x + y = 3$

$-4x + 2y = 6$

إرشادٌ: أستعملُ أوراقَ المربعاتِ الموجودةَ في نهايةِ كتابِ التمارينِ.

يُمكنُ نمذجةُ مواقفَ حياتيةٍ عديدةٍ باستعمالِ نظامِ معادلاتٍ خطّيّةٍ مكوَّنٍ مِنْ معادلتَينِ خطّيّتَينِ، وحلِّهِ بيانيًّا.

مثال 4: منَ الحياةِ

منطادٌ: مِنطادانِ ارتفاعُ أحدِهِما 4 m عَنْ سطحِ الأرضِ، ويزدادُ ارتفاعُهُ بمعدّلٍ ثابتٍ مقدارُهُ 5 m لكلِّ دقيقةٍ، والمِنطادُ الآخَرُ ارتفاعُهُ 10 m عَنْ سطحِ الأرضِ، ويزدادُ ارتفاعُهُ بمعدّلٍ ثابتٍ مقدارُهُ 3 m لكلِّ دقيقةٍ. بعدَ كَمْ دقيقةٍ يصبحُ للمِنطادَينِ الارتفاعُ نفسُهُ؟

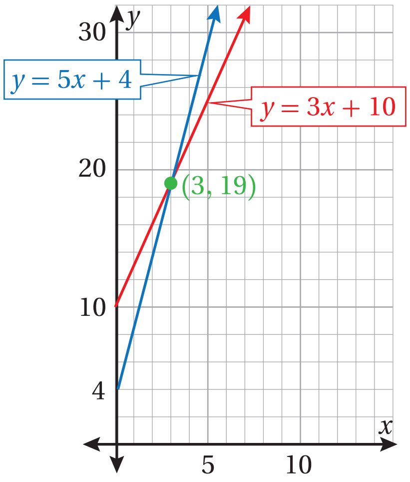
بِالكَلِماتِ ارتفاعُ المِنطادِ يُساوي معدّلَ ارتفاعِهِ مضروبًا بعددِ الدّقائقِ مضافًا إليهِ ارتفاعُهُ الأصليُّ.

المتغيرُ لِيَكنْ x عددَ الدقائقِ، وَ y ارتفاعَ المِنطادِ.

المعادلاتُ معادلةُ ارتفاعِ المِنطادِ الأولِ: $y = 5x + 4$

معادلةُ ارتفاعِ المِنطادِ الثّاني: $y = 3x + 10$

لإيجادِ متى يصبحُ للمِنطادَينِ الارتفاعُ نفسُهُ، أمثّلُ المعادلتَينِ $y = 5x + 4$، وَ $y = 3x + 10$ بيانيًّا، لأجدَ نقطةَ تقاطعِ المستقيمَينِ وَهِيَ $(3, 19)$.



أتحقّقُ مِنْ صحّةِ الحلِّ:

أتحقّقُ مِنْ أنَّ الزّوجَ المرتَّبَ $(3, 19)$ يمثّلُ حلًّا لِكِلا المعادلتَينِ:

المعادلةُ 1	المعادلةُ 2
$y = 5x + 4$	$y = 3x + 10$
$19 \stackrel{?}{=} 5(3) + 4$	$19 \stackrel{?}{=} 3(3) + 10$
$19 = 19$ ✓	$19 = 19$ ✓

إذنْ، يصبحُ للمِنطادَينِ الارتفاعُ نفسُهُ بعدَ 3 دقائقَ، ويكونُ ارتفاعُهُما عَنْ سطحِ الأرضِ 19 m

أتحققُ من فهمي:

لعبةٌ إلكترونيةٌ: تريدُ الأُختانِ هُدى ونَدى شراءَ لعبةٍ إلكترونيةٍ، وتوفِّرانِ مِنْ مصروفِهِما مِنْ أجلِ ذلكَ. إذا كانَ مَعَ هُدى 14 JD وتوفِّرُ أسبوعيًّا 3 JD، ومَعَ نَدى 6 JD وتوفِّرُ أسبوعيًّا 5 JD فبعدَ كَمْ أسبوعٍ يكونُ مَعَ الأُختَينِ المبلغُ نفسُهُ؟

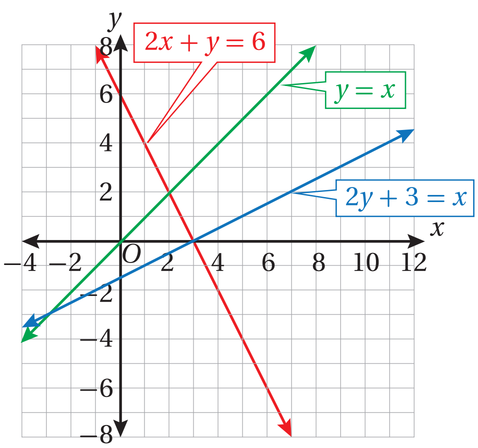
أتدرب وأحل المسائل

أحدِّدُ ما إذا كانَ الزّوجُ المرتَّبُ يمثِّلُ حلًّا لنظامِ المعادلاتِ الخطّيّةِ المُعطى في كلٍّ ممّا يأتي:

1) $(2, -2);\ 3x + y = 4$, $x - 3y = 8$

2) $(-1, 3);\ y = -7x - 4$, $y = 8x + 5$

أستعملُ التمثيلَ البيانيَّ المجاورَ لأجدَ حلَّ كلِّ نظامِ معادلاتٍ ممّا يأتي:



3) $y = x$, $2x + y = 6$

4) $2y + 3 = x$, $2x + y = 6$

5) $2y + 3 = x$, $y = x$

أحلُّ كلًّا مِنْ أنظمةِ المعادلاتِ الآتيةِ بيانيًّا:

6) $y = 4x + 2$, $y = -2x - 4$

7) $y = x - 6$, $y = x + 2$

8) $y = -3$, $y = x - 3$

9) $x + y = 4$, $3x + 3y = 12$

10) $2x + 3y = 12$, $2x - y = 4$

11) $y = 6x + 3$, $y = 2x + 3$

12) $8x - 4y = 16$, $-5x - 5y = 5$

13) $4x - 6y = 12$, $-2x + 3y = -6$

14) $\frac{3}{4}x + \frac{1}{2}y = \frac{1}{4}$, $\frac{2}{3}x + \frac{1}{6}y = \frac{1}{2}$

إرشاد

يسهِّلُ التخلّصُ مِنَ الكسورِ حلَّ أنظمةِ المعادلاتِ، ويتمُّ ذلكَ بضربِ معاملاتِ الحدودِ في كلِّ معادلةٍ بالمضاعفِ المشتركِ الأصغرِ لمقاماتِ الكسورِ.

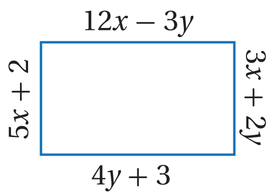
15 **أعمارٌ:** يقلُّ عُمرُ نوالَ عَنْ عُمرِ والدتِها بمقدارِ 26 عامًا، ومجموعُ عُمرَيهِما 50 عامًا. أكتبُ نظامًا مِنْ معادلتَينِ خطّيّتَينِ يُمثّلُ عُمرَ نوالَ وعُمرَ والدَتِها، ثُمَّ أجدُ عُمرَ كلٍّ مِنْهُما.

مواقعُ إنترنتْ: **موقعانِ تعليميّانِ على شبكةِ الإنترنتْ، سجّلَ الأولُ مليونَ زيارةٍ عامَ 2018م، وفي كلِّ عامٍ لاحقٍ ازدادَ عددُ زياراتِهِ بمعدّلٍ ثابتٍ مقدارُهُ نصفُ مليونِ زيارةٍ. وسجّلَ الموقعُ الثّاني عشرةَ ملايينِ زيارةٍ عامَ 2018م، ولكنَّ هذا العددَ تناقصَ في كلِّ عامٍ لاحقٍ بمعدّلٍ ثابتٍ يُساوي مليونَ زيارةٍ.**

16 أكتبُ نظامًا مِنْ معادلتَينِ خطّيّتَينِ يُمثّلُ أعدادَ زياراتِ الموقعَينِ.

17 في أي عامٍ سيصبحُ عددُ زياراتِ كلٍّ مِنَ الموقعَينِ متساويًا؟

18 **هندسةٌ:** أجدُ قيمتَيْ x وَ y للمستطيلِ المجاورِ.



19 أعودُ إلى فقرةِ (أستكشفُ) بدايةَ الدرسِ، وأحلُّ المسألةَ.

مهاراتُ التفكيرِ العُليا

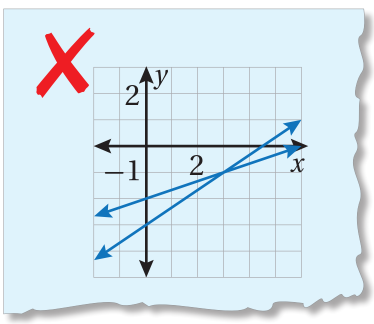
20 **تبريرٌ:** هَلْ يمكنُ أَنْ يكونَ لنظامِ معادلاتٍ خطّيّةٍ مكوَّنٍ مِنْ معادلتَينِ خطّيّتَينِ حلّانِ مختلفانِ؟ أبرّرُ إجابَتي.

21 **أكتشفُ الخطأَ:** يبيّنُ الشكلُ المجاورُ أنَّ حلَّ نظامِ المعادلاتِ الآتي هُوَ النقطةُ $(3, -1)$:

$$x - 3y = 6$$

$$2x - 3y = 3$$

أكتشفُ الخطأَ في الحلِّ، وأصحّحُهُ.



22 **مسألةٌ مفتوحةٌ:** أكتبُ نظامَ معادلاتٍ خطّيّةٍ مكوّنًا مِنْ معادلتَينِ خطّيّتَينِ ليسَ لَهُ حلٌّ، ونظامًا آخَرَ لَهُ عددٌ لانهائيٌّ مِنَ الحلولِ.

23 **أكتبُ** كيفَ أجدُ حلَّ نظامِ معادلاتٍ خطّيّةٍ مكوّنٍ مِنْ معادلتَينِ خطّيّتَينِ بيانيًّا؟

معلومةٌ

ازدادَتْ أعدادُ مستخدمي المواقعِ التعليميةِ على الإنترنتْ في أثناءِ جائحةِ كورونا.

معملُ برمجيةِ جيوجيبرا

تمثيلُ نظامٍ مِنْ معادلتَينِ خطّيّتَينِ بيانيًّا

يُمكنُ استعمالُ برمجيةِ جيوجيبرا لحلِّ نظامِ معادلاتٍ خطّيّةٍ مكوَّنٍ مِنْ معادلتَينِ خطّيّتَينِ بمتغيّرَينِ بيانيًّا في المستوى الإحداثيِّ.

نشاطٌ أحلُّ نظامَ المعادلاتِ الآتيَ بيانيًّا باستعمالِ برمجيةِ جيوجيبرا.

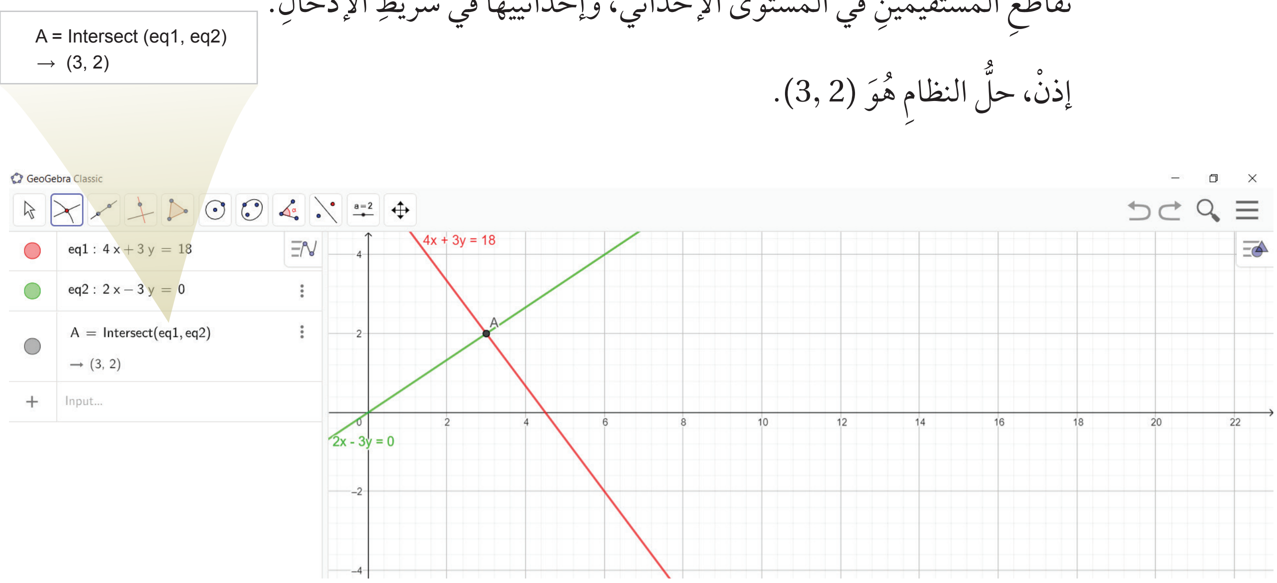
$$4x + 3y = 18$$
$$2x - 3y = 0$$

الْخُطْوَةُ 1 أُدخلُ في شريطِ الإدخالِ المعادلةَ الأولى: $4x + 3y = 18$، ثُمَّ أضغطُ Enter .

الْخُطْوَةُ 2 أُدخلُ في شريطِ الإدخالِ المعادلةَ الثانيةَ: $2x - 3y = 0$ ثُمَّ أضغطُ Enter .

الْخُطْوَةُ 3 أختـارُ أيقونةَ Intersect مِنْ شـريطِ الأدواتِ، ثُمَّ أنقرُ على المسـتقيمَينِ، وألاحظُ ظهورَ نقطةِ تقاطعِ المستقيمَينِ في المستوى الإحداثيِّ، وإحداثيَّيْها في شريطِ الإدخالِ.

إذنْ، حلُّ النظامِ هوَ $(3, 2)$.



أتدرب

أحلُّ كلَّ نظامِ معادلاتٍ ممّا يأتي بيانيًّا باستعمالِ برمجيةِ جيوجيبرا:

1) $x + y = 8$
$x - 2y = 2$

2) $y = 2x - 6$
$y = 2x + 2$

3) $y = 4x + 2$
$y = -2x - 5$

4) $2x + 3y = 12$
$2x - y = 4$

الدرسُ 2 حلُّ نظامٍ مِنْ معادلتَينِ خطّيّتَينِ بالتعويضِ

فكرةُ الدرسِ

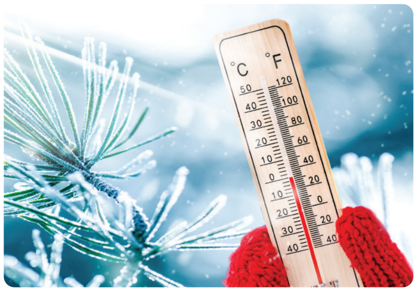
أحلُّ نظامَ معادلاتٍ مكوّنًا مِنْ معادلتَينِ خطّيّتَينِ بالتعويضِ.

المصطلحاتُ

التعويضُ.

أستكشفُ

قاسَتْ حنينُ درجةَ الحرارةِ في أحدِ أيّامِ الشتاءِ في منتصفِ النّهارِ، ثُمَّ قاسَتْها مرّةً ثانيةً في منتصفِ الليلِ، لتجدَ أنَّ مجموعَ درجتَي الحرارة 5°C والفرقَ بينَهُما 11°C. ما درجةُ الحرارةِ في منتصفِ النّهارِ؟ وما درجةُ الحرارةِ في منتصفِ الليلِ؟



تعلَّمْتُ في الدرسِ السابقِ حلَّ نظامٍ مكوّنٍ مِنْ معادلتَينِ خطّيّتَينِ بيانيًّا، وسأتعلّمُ في هذا الدرسِ طريقةً أُخرى لحلِّ نظامِ المعادلاتِ تُستعمَلُ فيها الخصائصُ الجبريةُ وتسمّى طريقةَ **التعويضِ** (substitution).

مفهومٌ أساسيٌّ: حلُّ نظامِ معادلاتٍ خطّيّةٍ بالتعويضِ

الخُطْوَةُ 1 إذا لزمَ الأمرُ، أكتبُ إحدى المعادلتَينِ على الأقلِّ بالنسبةِ لأحدِ المتغيّرَينِ.

الخُطْوَةُ 2 أعوّضُ المقدارَ الناتجَ مِنَ **الخطوةِ 1** في المعادلةِ الثانيةِ، ثُمَّ أحلُّها.

الخُطْوَةُ 3 أعوّضُ القيمةَ الناتجةَ مِنَ **الخطوةِ 2** في أيٍّ مِنَ المعادلتَينِ، ثُمَّ أحلُّ المعادلةَ الناتجةَ لأجدَ قيمةَ المتغيّرِ الثّاني، ثُمَّ أكتبُ الحلَّ في صورةِ زوجٍ مرتَّبٍ.

مثال 1

أستعملُ التعويضَ لحلِّ نظامِ المعادلاتِ الآتي:

$$y = 2x + 3$$
$$3x + 4y = 1$$

الخُطْوَةُ 1 بِما أنَّ المعادلةَ الأولى مكتوبةٌ بالنسبةِ إلى y؛ إذنْ أنتقلُ مباشرةً إلى الخطوةِ الثانيةِ.

الْخُطْوَةُ 2 أعوّضُ $(2x + 3)$ بدلاً مِنْ y في المعادلةِ الثانيةِ.

المعادلةُ الثانيةُ	$3x + 4y = 1$
أعوّضُ عَنْ y بـِ $(2x + 3)$	$3x + 4(2x + 3) = 1$
خاصيّةُ التوزيعِ	$3x + 8x + 12 = 1$
أجمعُ الحدودَ المتشابهةَ	$11x + 12 = 1$
أطرحُ 12 مِنْ طرفَيِ المعادلةِ	$11x + 12 - 12 = 1 - 12$
أقسمُ طرفَيِ المعادلةِ علَى 11	$\frac{11x}{11} = \frac{-11}{11}$
أبسّطُ	$x = -1$

الْخُطْوَةُ 3 أعوّضُ -1 بدلًا مِنْ x في أيٍّ مِنَ المعادلتَينِ لإيجادِ قيمةِ y.

المعادلةُ الأولى	$y = 2x + 3$
أعوّضُ عَنْ x بـِ -1	$= 2(-1) + 3$
أبسّطُ	$= 1$

إذنْ، حلُّ النظامِ هُوَ $(-1, 1)$.

التحقّقُ: أتحقّقُ مِنْ صحّةِ الحلِّ بتعويضِ الزّوجِ المرتَّبِ في كلٍّ مِنْ معادلتَيِ النظامِ.

أتحقّقُ من فهمي:

أحلُّ كلًّا مِنْ أنظمةِ المعادلاتِ الآتيةِ باستعمالِ التعويضِ:

1) $y = 17 - 4x$
$2x + y = 9$

2) $y - 5x = 1$
$x = y + 3$

لاحظتُ في المثالِ السابقِ أنَّ إحدى المعادلتَينِ كانَتْ مكتوبةً بالنسبةِ إلى أحدِ المتغيّراتِ، أمّا إذا لَمْ يَكُنِ الأمرُ كذلكَ، فأحلُّ إحدى المعادلتَينِ أوّلًا بالنسبةِ إلى أحدِ المتغيّرَينِ، ثُمَّ أحلُّ النظامَ بالتعويضِ.

مثال 2

أستعملُ التعويضَ لحلِّ نظامِ المعادلاتِ الآتي:

$$\mathbf{3x + y = 5}$$

$$\mathbf{5x - 2y = 12}$$

الْخُطْوَةُ 1 أحلُّ المعادلةَ الأولى بالنسبةِ للمتغيِّرِ y؛ لأنَّ معاملَهُ 1

المعادلةُ الأولى	$3x + y = 5$
أطرحُ $3x$ مِنْ طرفَيِ المعادلةِ	$3x - 3x + y = 5 - 3x$
أبسّطُ	$y = 5 - 3x$

الْخُطْوَةُ 2 أعوّضُ $(5-3x)$ بدلاً مِنْ y في المعادلةِ الثانيةِ.

المعادلةُ الثانيةُ	$5x - 2y = 12$
أعوّضُ عَنْ y بـ $(5-3x)$	$5x - 2(5-3x) = 12$
خاصّيّةُ التوزيعِ	$5x - 10 + 6x = 12$
أجمعُ الحدودَ المتشابهةَ	$11x - 10 = 12$
أجمعُ 10 إلى طرفَيِ المعادلةِ	$11x - 10 + 10 = 12 + 10$
أقسمُ طرفَيِ المعادلةِ على 11	$\frac{11x}{11} = \frac{22}{11}$
أبسّطُ	$x = 2$

الْخُطْوَةُ 3 أعوّضُ 2 بدلًا مِنْ x في أيٍّ مِنَ المعادلتَينِ لإيجادِ قيمةِ y.

المعادلةُ الأولى	$3x + y = 5$
أعوّضُ عَنْ x بـ 2	$3(2) + y = 5$
أبسّطُ	$6 + y = 5$
أطرحُ 6 مِنْ طرفَيِ المعادلةِ	$y = -1$

إذنْ، حلُّ النظامِ هُوَ $(2, -1)$.

التحقّقُ: أتحقّقُ مِنْ صحّةِ الحلِّ بتعويضِ الزّوجِ المرتَّبِ في كلٍّ مِنْ معادلتَيِ النظامِ.

أتحققُ من فهمي:

أحلُّ كلًّا مِنْ أنظمةِ المعادلاتِ الآتيةِ باستعمالِ التعويضِ:

1) $4x + 3y = 37$
$2x + y = 17$

2) $x + 3y = 7$
$2x - y = 7$

بشكلٍ عامٍّ، إذا كانَ ناتجُ حلِّ نظامِ معادلاتٍ مكوَّنٍ مِنْ معادلتَينِ خطّيّتَينِ جملةً صحيحةً مثلَ $(-2 = -2)$، فإنَّ للنظامِ عددًا لانهائيًّا مِنَ الحلولِ، أمّا إذا كانَ الناتجُ جملةً خطأً مثلَ $(5 = -2)$، فلا يوجدُ حلٌّ للنظامِ.

مثال 3

أحلُّ كلًّا مِنْ أنظمةِ المعادلاتِ الآتيةِ باستعمالِ التعويضِ:

1) $\mathbf{x - 4y = 12}$
$\mathbf{8y - 2x = 20}$

الخُطْوَةُ 1 أحلُّ المعادلةَ الأولى بالنسبةِ للمتغيّرِ x؛ لأنَّ معاملَهُ 1

المعادلةُ الأولى	$x - 4y = 12$
أجمعُ $4y$ إلى طرفَيِ المعادلةِ	$x - 4y + 4y = 12 + 4y$
أبسّطُ	$x = 12 + 4y$

الخُطْوَةُ 2 أعوّضُ $(12 + 4y)$ بدلاً مِنْ x في المعادلةِ الثانيةِ.

المعادلةُ الثّانيةُ	$8y - 2x = 20$
أعوّضُ عَنْ x بـِ $(12 + 4y)$	$8y - 2(12 + 4y) = 20$
خاصّيّةُ التوزيعِ	$8y - 24 - 8y = 20$
أجمعُ الحدودَ المتشابهةَ	$-24 = 20$

بِما أنَّ الجملةَ الناتجةَ خطأٌ، إذنْ، لا يوجدُ حلٌّ للنظامِ.

2) $x - y = 5$
$2x = 2y + 10$

الْخُطْوَةُ 1 أحلُّ المعادلةَ الأولى بالنسبةِ للمتغيّرِ x؛ لأنَّ معاملَهُ 1

المعادلةُ الأولى	$x - y = 5$
أجمعُ y إلى طرفَيِ المعادلةِ	$x - y + y = 5 + y$
أبسّطُ	$x = 5 + y$

الْخُطْوَةُ 2 أعوّضُ $(5 + y)$ بدلًا مِنْ x في المعادلةِ الثانيةِ.

المعادلةُ الثانيةُ	$2x = 2y + 10$
أعوّضُ عَنْ x بـِ $(5 + y)$	$2(5 + y) = 2y + 10$
خاصّيّةُ التوزيعِ	$10 + 2y = 2y + 10$
أطرحُ $2y$ مِنْ طرفَيِ المعادلةِ	$10 + 2y - 2y = 2y - 2y + 10$
أبسّطُ	$10 = 10$

بما أنَّ الجملةَ الناتجةَ صحيحةٌ، إذنْ، يوجدُ عددٌ لانهائيٌّ مِنَ الحلولِ.

أتحققُ من فهمي:

4) $x - 5y = 15$
$10y - 2x = -30$

3) $x - 2y = 4$
$8y - 4x = 8$

يمكنُ استعمالُ التعويضِ لحلِّ مسائلَ مِنْ واقعِ الحياةِ تتضمّنُ نظامًا مِنْ معادلتَيْنِ خطّيّتَيْنِ بمتغيّرَيْنِ.

مثال 4: منَ الحياةِ

اختباراتٌ: تقدّمَتْ أماني لاختبارٍ مكوّنٍ مِنْ 50 سؤالًا تحصلُ فيهِ على علامتَيْنِ عَنْ كلِّ سؤالٍ إجابتُهُ صحيحةٌ، وتخسرُ علامةً عَنْ كلِّ سؤالٍ إجابتُهُ خطأٌ. فإذا أجابَتْ أماني عَنْ أسئلةِ الاختبارِ جميعِها وحصلَتْ على 67 علامةً، فكَمْ سؤالًا أجابَتْ عَنْهُ إجابةً صحيحةً؟

لِتكُنْ x عددَ الأسئلةِ الّتي إجابتُها صحيحةٌ، وَ y عددَ الأسئلةِ الّتي إجابتُها خطأٌ.

إذنْ، نظامُ المعادلاتِ الّذي يعبّرُ عَنِ المسألةِ هُوَ:

$$x + y = 50$$

$$2x - y = 67$$

الْخُطْوَةُ 1 أحلُّ المعادلةَ الأولى بالنسبةِ للمتغيّرِ y؛ لأنَّ معاملَهُ 1

المعادلةُ الأولى	$x + y = 50$
أطرحُ x مِنْ طرفَيِ المعادلةِ	$x - x + y = 50 - x$
أبسّطُ	$y = 50 - x$

الْخُطْوَةُ 2 أعوّضُ $(50 - x)$ بدلاً مِنْ y في المعادلةِ الثانيةِ.

المعادلةُ الثانيةُ	$2x - y = 67$
أعوّضُ عَنْ y بـ $(50-x)$	$2x - (50 - x) = 67$
خاصّيّةُ التوزيعِ	$2x - 50 + x = 67$
أجمعُ الحدودَ المتشابهةَ	$3x - 50 = 67$
أجمعُ 50 إلى طرفَيِ المعادلةِ	$3x - 50 + 50 = 67 + 50$
أقسمُ طرفَيِ المعادلةِ على 3	$3x = 117$
أبسّطُ	$x = 39$

إذنْ، أجابَتْ أماني في الاختبارِ عَنْ 39 سؤالًا إجابةً صحيحةً.

أتحقّقُ من فهمي:

تسوّقٌ: اشترى خالدٌ كتابًا وناقلةَ بياناتٍ بـ JD 14، إذا كانَ مِثْلا ثَمنِ الكتابِ يزيدُ عَنْ ثمنِ ناقلةِ البياناتِ بمقدارِ JD 10، فَما سعرُ كلٍّ مِنْ ناقلةِ البياناتِ والكتابِ؟

أتدرب وأحل المسائل

أحلُّ كلًّا مِنْ أنظمةِ المعادلاتِ الآتيةِ باستعمالِ التعويضِ:

1) $y = 4x + 2$
$2x + y = 8$

2) $y = x + 5$
$y = -2x - 4$

3) $x = 3 - \frac{1}{2}y$
$5x - y = 1$

4) $\frac{1}{2}x - y = 2$
$y = 9 - 5x$

5) $x - 4y = 20$
$y - 3x = 6$

6) $y - 6x = 3$
$y - 2x = 3$

7) $8x - y = 16$
$\frac{1}{4}y - 2x = 3$

8) $6x - 9y = 18$
$-2x + 3y = -6$

9) $y + 3x + 6 = 0$
$y + 6x + 24 = 0$

أتذكر
يمكنُني أيضًا استعمالُ استراتيجيةِ التخمينِ والتحقّقِ لإيجادِ عددِ الدجاجِ والأرانبِ.

10) **مزرعةٌ:** مزرعةُ حيواناتٍ فيها دجاجٌ وأرانبُ، إذا عددْتُ رؤوسَها سأجدُها 18 رأسًا، وإذا عددْتُ أرجُلَها سأجدُها 50 رِجْلًا. كَمْ دجاجةً وَكَمْ أرنبًا في هذِهِ المزرعةِ؟

فاكهةٌ: اشترى مُرادٌ وفؤادٌ برتقالًا وتفاحًا مِنَ النوعِ نفسِهِ، فدفعَ مرادٌ JD 3.25 عندَ شرائِهِ 5 kg برتقالًا وَ 1 kg تفاحًا، ودفعَ فؤادٌ JD 3.75 عندَ شرائِهِ 3 kg تفاحًا وَ 3 kg برتقالًا:

11) أكتبُ نظامًا مِنْ معادلتَينِ خطّيّتَينِ يُمثّلُ المسألةَ، ثُمَّ أحلُّهُ لأجدَ سعرَ الكيلوغرامِ الواحدِ مِنْ كلٍّ مِنَ التفاحِ والبرتقالِ.

12) إذا اشترَتْ منالُ 2 kg مِنَ نوعِ التفاحِ نفسِهِ وَ 2 kg مِنَ نوعِ البرتقالِ نفسِهِ، فَما المبلغُ الّذي دفعَتْهُ؟

معلومةٌ

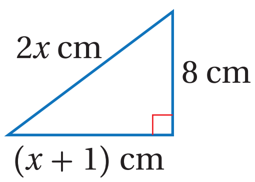
توجدُ فـي الأردنِّ مواقعُ أثريةٌ عدةٌ تعودُ لحضاراتٍ وحقبٍ تاريخيةٍ مختلفةٍ.

13 **سياحةٌ:** يُبيِّنُ الجدولُ الآتي أعدادَ السيّاحِ في موقعَينِ أثريَّينِ في أحدِ الأعوامِ، ومعدّلَ الزيادةِ السنويةِ في أعدادِ السيّاحِ (بالآلافِ) بعدَ ذلكَ العامِ:

	أعدادُ السيّاحِ (بالآلافِ)	معدّلُ الزيادةِ في أعدادِ السيّاحِ (بالآلافِ لكلِّ عامٍ)
الموقعُ (أ)	57	1.1
الموقعُ (ب)	61	0.7

إذا استمرّتِ الزيادةُ في أعدادِ السيّاحِ وفقَ هذِهِ المعدّلاتِ، فبعدَ كَمْ عامٍ يمكنُ أَنْ تتساوى أعدادُ السيّاحِ في الموقعَينِ؟ وَكَمْ يبلغُ عددُهُمْ حينئِذٍ؟

14 **هندسةٌ:** إذا كانَتِ القيمةُ العدديةُ لمحيطِ المثلثِ المجاورِ تُساوي القيمةَ العدديةَ لمساحتِهِ، فَما قيمةُ x؟



مهاراتُ التفكيرِ العُليا

15 **تبريرٌ:** أجدُ قيمتَي الثابتَينِ a وَ b في نظامِ المعادلاتِ الخطّيّةِ الآتي، حيثُ الزّوجُ المرتَّبُ $(-9, 1)$ هُوَ حلُّ النظامِ، وأبرّر إجابَتي:

$$ax + by = -31$$
$$ax - by = -41$$

16 **مسألةٌ مفتوحةٌ:** أكتبُ نظامَ معادلاتٍ خطّيّةٍ مكوّنًا مِنْ معادلتَينِ خطّيّتَينِ حيثُ يمثّلُ الزّوجُ المرتَّبُ $(3, -5)$ حلًّا لإحدى المعادلتَينِ فقطْ، ويمثّلُ الزّوجُ المرتَّبُ $(-1, 7)$ حلًّا للنظامِ.

معلومةٌ

تسعى مديريةُ الدفاعِ المدنيِّ إلى تعميقِ مفهومِ الوعيِ الوقائيِّ، ونشرِهِ في المجتمعِ، عَنْ طريقِ برامجَ تدريبيةٍ تنمّي مهاراتِ إطفاءِ الحرائقِ والإنقاذِ والإسعافِ.

17 **تحدٍّ:** تتألّفُ دُفعةٌ مِنْ خرّيجي دورةٍ للدفاعِ المدنيِّ مِنْ 240 شخصًا، نسبةُ الذكورِ فيها إلى الإناثِ 7 : 5، أكتبُ نظامًا مِنْ معادلتَينِ خطّيّتَينِ يُمثّلُ المسألةَ، ثُمَّ أحلُّهُ لأجدَ عددَ الذكورِ وعددَ الإناثِ في هذِهِ الدفعةِ مِنَ الخرّيجينَ.

المملكة الأردنية الهاشمية
الدفاع المدني

18 **أكتبُ** كيفَ أحلُّ نظامَ معادلاتٍ خطّيّةٍ مكوّنًا مِنْ معادلتَينِ بالتعويضِ؟

الدرسُ 3 حلُّ نظامٍ مِنْ معادلتَينِ خطّيّتَينِ بالحذفِ

فكرةُ الدرسِ

أحلُّ نظامَ معادلاتٍ خطّيّةٍ مكوّنًا مِنْ معادلتَينِ بالحذفِ.

المصطلحاتُ

الحذفُ.

أستكشفُ

تمارسُ سميرةُ الرياضةَ كلَّ صباحٍ لمدّةِ 40 دقيقةً، بحيثُ تلعبُ أوّلًا تمارينَ الإطالةِ الّتي تحرقُ بها 4 سعراتٍ حراريةٍ في الدقيقةِ، ثُمَّ تلعبُ مجموعةً مِنَ التمارينِ الهوائيةِ؛ لتساعدَها على حرقِ 11 سعرةً حراريةً في الدقيقةِ. كَمْ دقيقةً علَى سميرةَ أَنْ تلعبَ مِنْ كُلِّ نشاطٍ لتحرقَ 335 سعرةً حراريةً؟

في بعضِ الأحيانِ يؤدّي جمعُ معادلتَينِ أَوْ طرحُهُما إلى حذفِ أحدِ المتغيّراتِ، وتسمّى هذِهِ الطريقةُ الجبريةُ في حلِّ نظامِ المعادلاتِ الخطّيّةِ طريقةَ **الحذفِ** (elimination).

مفهومٌ أساسيٌّ — **حلُّ نظامِ معادلاتٍ خطّيّةٍ بالحذفِ**

الْخُطْوَةُ 1 أضربُ – إنْ لزمَ الأمرُ – إحدى المعادلتَينِ أَوْ كلتَيهِما في عددٍ ثابتٍ بحيثُ يكونُ هناكَ على الأقلِّ حدّانِ متشابهانِ معاملاهُما متساويانِ أَوْ معاملُ أحدِهِما معكوسٌ للآخَرِ.

الْخُطْوَةُ 2 أكتبُ النظامَ بحيثُ تكونُ الحدودُ المتشابهةُ فوقَ بعضِها بعضًا.

الْخُطْوَةُ 3 أجمعُ المعادلتَينِ أَوْ أطرحُهُما للتخلّصِ مِنْ أحدِ المتغيّراتِ، ثُمَّ أحلُّ المعادلةَ الناتجةَ.

الْخُطْوَةُ 4 أعوّضُ القيمةَ الناتجةَ في **الخطوةِ 3** في إحدى المعادلتَينِ، ثُمَّ أحلُّها لإيجادِ قيمةِ المتغيّرِ الثاني، ثُمَّ أكتبُ الحلَّ في صورةِ زوجٍ مرتَّبٍ.

مثال 1

أستعملُ الحذفَ لحلِّ نظامِ المعادلاتِ الآتي:

$$5x + y = 22$$

$$2x - y = 6$$

الْخُطْوَةُ 1 بِما أنَّ معاملَيْ y في المعادلتَينِ كُلٌّ منهُما معكوسٌ للآخَرِ، فهذا يعني أنَّني لستُ بحاجةٍ إلى ضربِ أيٍّ مِنَ المعادلتَينِ بثابتٍ؛ إذنْ أنتقلُ مباشرةً إلى الخطوةِ الثانيةِ.

الْخُطْوَةُ 2 أجمعُ المعادلتَينِ.

$$
\begin{array}{rl}
 & 5x + y = 22 \\
(+) & 2x - y = 6 \\
\hline
 & 7x \quad = 28
\end{array}
$$

أحذفُ المتغيّرَ y

أقسمُ طرفَيِ المعادلةِ على 7

$$\frac{7x}{7} = \frac{28}{7}$$

أبسّطُ

$$x = 4$$

الْخُطْوَةُ 3 أعوّضُ 4 بدلًا مِنْ x في إحدى المعادلتَينِ؛ لإيجادِ قيمةِ y.

المعادلةُ الأولى
$$5x + y = 22$$

أعوّضُ عَنْ x بِـ 4
$$5(4) + y = 22$$

أبسّطُ
$$20 + y = 22$$

أطرحُ 20 مِنْ كِلا الطرفَينِ
$$20 - 20 + y = 22 - 20$$

أبسّطُ
$$y = 2$$

إذنْ، حلُّ النظامِ هُوَ $(4, 2)$.

التحقّقُ: أتحقّقُ مِنْ صحّةِ الحلِّ بتعويضِ الزّوجِ المرتَّبِ في كلٍّ مِنْ معادلتَيِ النظامِ.

أتحققُ من فهمي:

أحلُّ كلًّا مِنْ أنظمةِ المعادلاتِ الآتيةِ باستعمالِ الحذفِ:

1. $2x + y = 7$
   $5x - y = 14$

2. $3x + 2y = 16$
   $6y - 3x = -12$

يمكنُني استعمالُ الطرحِ لحلِّ نظامِ معادلاتٍ خطّيّةٍ مكوّنٍ مِنْ معادلتَينِ خطّيّتَينِ، وذلكَ عندَما يكونُ في المعادلتَينِ حدّانِ متشابهانِ معاملاهُما متساويانِ.

مثال 2

أستعملُ الحذفَ لحلِّ نظامِ المعادلاتِ الآتي:

$$12x + 2y = 30$$

$$8x + 2y = 22$$

الْخُطْوَةُ 1 ألاحظُ أنَّ كِلا المعادلتَيْنِ تحويانِ $2y$، وهذا يعني أنَّني لستُ بحاجةٍ إلى ضربِ أيٍّ مِنَ المعادلتَيْنِ بثابتٍ، وأنَّهُ يمكنُ حلُّ النظامِ بطرحِ إحدى المعادلتَيْنِ مِنَ الأُخرى.

الْخُطْوَةُ 2 أطرحُ معادلةً مِنَ الأُخرى.

$$\begin{array}{rl} & 12x + 2y = 30 \\ (-) & 8x + 2y = 22 \\ \hline & 4x \qquad = 8 \end{array}$$

أحذفُ المتغيّرَ y

$$\frac{4x}{4} = \frac{8}{4}$$

أقسمُ طرفَيِ المعادلةِ على 4

$$x = 2$$

أبسّطُ

الْخُطْوَةُ 3 أعوّضُ 2 بدلًا مِنْ x في إحدى المعادلتَيْنِ؛ لإيجادِ قيمةِ y.

$$12x + 2y = 30$$

المعادلةُ الأولى

$$12(2) + 2y = 30$$

أعوّضُ عَنْ x بـ 2

$$24 + 2y = 30$$

أبسّطُ

$$24 - 24 + 2y = 30 - 24$$

أطرحُ 24 مِنْ كِلا الطرفَيْنِ

$$2y = 6$$

أبسّطُ

$$\frac{2y}{2} = \frac{6}{2}$$

أقسمُ طرفَيِ المعادلةِ على 2

$$y = 3$$

أبسّطُ

إذنْ، حلُّ النظامِ هُوَ $(2, 3)$.

التحقّقُ: أتحقّقُ مِنْ صحّةِ الحلِّ بتعويضِ الزّوجِ المرتّبِ في كلٍّ مِنْ معادلتَيِ النظامِ.

أتحقق من فهمي:

أحلُّ كلًّا مِنْ أنظمةِ المعادلاتِ الآتيةِ باستعمالِ الحذفِ:

1 $2x + 5y = 16$
$2x + 3y = 18$

2 $3x - 4y = 17$
$x - 4y = 3$

أحتاجُ في بعضِ حالاتِ حلِّ أنظمةِ المعادلاتِ الخطّيّةِ إلى ضربِ إحدى المعادلتَينِ في عددٍ ثابتٍ؛ للحصولِ على معادلتَينِ فيهما حدّانِ متشابهانِ معاملُ أحدِهما معكوسٌ للآخَرِ.

مثال 3

أستعملُ الحذفَ لحلِّ نظامِ المعادلاتِ الآتي:

$$\mathbf{3x + 2y = 18}$$
$$\mathbf{2x - y = 5}$$

الْخُطْوَةُ 1 أضربُ المعادلةَ الثانيةَ في 2

$$3x + 2y = 18 \qquad\qquad 3x + 2y = 18$$
$$2x - y = 5 \xrightarrow{\text{أضربُ كلَّ حدٍّ في 2}} 4x - 2y = 10$$

الْخُطْوَةُ 2 أجمعُ المعادلتَينِ.

$$\begin{array}{rrl} & 3x + 2y & = 18 \\ (+) & 4x - 2y & = 10 \\ \hline & 7x & = 28 \end{array}$$

أحذفُ المتغيِّرَ y

$$\frac{7x}{7} = \frac{28}{7}$$

أقسمُ طرفَيِ المعادلةِ على 7

$$x = 4$$

أبسّطُ

الْخُطْوَةُ 3 أعوّضُ 4 بدلًا مِنْ x في إحدى المعادلتَينِ؛ لإيجادِ قيمةِ y.

المعادلةُ الثانيةُ	$2x - y = 5$
أعوّضُ عَنْ x بِـ 4	$2(4) - y = 5$
أبسّطُ	$8 - y = 5$
أطرحُ 8 مِنْ كِلا الطرفَينِ	$8 - 8 - y = 5 - 8$
أبسّطُ	$-y = -3$
أقسمُ طرفَي المعادلةِ على -1	$\frac{-y}{-1} = \frac{-3}{-1}$
أبسّطُ	$y = 3$

إذنْ، حلُّ النظامِ هُوَ $(4, 3)$.

التحقّقُ: أتحقّقُ مِنْ صحّةِ الحلِّ بتعويضِ الزّوجِ المرتَّبِ في كلٍّ مِنْ معادلتَي النظامِ.

أتحققُ من فهمي:

أحلُّ كلًّا مِنْ أنظمةِ المعادلاتِ الآتيةِ باستعمالِ الحذفِ:

1) $5x + 2y = 4$
$4x - y = 11$

2) $3x + 5y = 15$
$x + 3y = 7$

أحتاجُ في بعضِ حالاتِ حلِّ أنظمةِ المعادلاتِ الخطّيّةِ إلى ضربِ كلِّ معادلةٍ في عددٍ ثابتٍ مختلفٍ للحصولِ على معادلتَينِ فيهِما حدّانِ متشابهانِ معاملُ أحدِهما معكوسٌ للآخَرِ.

مثال 4

أستعملُ الحذفَ لحلِّ نظامِ المعادلاتِ الآتي:

$$4x + 3y = 27$$
$$5x - 2y = 5$$

الْخُطْوَةُ 1 أضربُ المعادلةَ الأولى في 2 والمعادلةَ الثانيةَ في 3؛ لأحذفَ المتغيّرَ y

$4x + 3y = 27$ → أضربُ كلَّ حدٍّ في 2 → $8x + 6y = 54$

$5x - 2y = 5$ → أضربُ كلَّ حدٍّ في 3 → $15x - 6y = 15$

الْخُطْوَةُ 2 أجمعُ المعادلتَينِ.

$$\begin{array}{lr} & 8x + 6y = 54 \\ (+) & 15x - 6y = 15 \\ \hline & 23x \quad = 69 \end{array}$$

أحذفُ المتغيّرَ y

$$\frac{23x}{23} = \frac{69}{23}$$

أقسمُ طرفَيِ المعادلةِ على 23

$$x = 3$$

أبسّطُ

أتعلّمُ

يمكنُ أيضًا حلُّ النظامِ بحذفِ المتغيّرِ x، فمثلًا: يمكنُني ضربُ المعادلةِ الأولى في 5 وضربُ المعادلةِ الثانيةِ في -4

الْخُطْوَةُ 3 أعوّضُ 3 بدلًا مِنْ x في إحدى المعادلتَينِ؛ لإيجادِ قيمةِ y.

$$5x - 2y = 5$$ المعادلةُ الثانيةُ

$$5(3) - 2y = 5$$ أعوّضُ عَنْ x بـِ 3

$$15 - 2y = 5$$ أبسّطُ

$$15 - 15 - 2y = 5 - 15$$ أطرحُ 15 مِنْ كِلا الطرفَينِ

$$-2y = -10$$ أبسّطُ

$$\frac{-2y}{-2} = \frac{-10}{-2}$$ أقسمُ طرفَيِ المعادلةِ على -2

$$y = 5$$ أبسّطُ

إذنْ، حلُّ النظامِ هُوَ $(3, 5)$.

التحقّقُ: أتحقّقُ مِنْ صحّةِ الحلِّ بتعويضِ الزّوجِ المرتَّبِ في كلٍّ مِنْ معادلتَيِ النظامِ.

أتحققُ من فهمي:

أحلُّ كلًّا مِنْ أنظمةِ المعادلاتِ الآتيةِ باستعمالِ الحذفِ:

1) $2x + 5y = 15$
$3x - 2y = 13$

2) $5x - 3y = 14$
$4x - 5y = 6$

يمكنُ استعمالُ الحذفِ لحلِّ مسائلَ حياتيةٍ وعلميةٍ تتضمّنُ نظامًا مِنْ معادلتَين خطّيّتَينِ بمتغيّرَين.

مثال 5: منَ الحياةِ

وظيفةٌ: يعملُ ماجدٌ وحازمٌ أثناءَ عطلةِ الجامعةِ في محطّتَينِ مختلفتَينِ لوقودِ السيّاراتِ، ويتقاضى كلٌّ منهُما أجرتَهُ على عددِ ساعاتِ العملِ. في أحدِ الأيّامِ عملَ ماجدٌ 6 ساعاتٍ وعملَ حازمٌ 7 ساعاتٍ، فكانَ مجموعُ ما تقاضَياهُ معًا 36 JD، وفي اليومِ التّالي عملَ ماجدٌ 8 ساعاتٍ وعملَ حازمٌ 6 ساعاتٍ، فكانَ مجموعُ ما تقاضَياهُ معًا 38 JD. كَمْ يتقاضى كلٌّ منهُما عَنْ كلِّ ساعةِ عملٍ؟

لِتكُنْ x الأجرةَ الّتي يتقاضاها ماجدٌ عَنْ كلِّ ساعةِ عملٍ، وَy الأجرةَ الّتي يتقاضاها حازمٌ عَنْ كلِّ ساعةِ عملٍ.

إذنْ، نظامُ المعادلاتِ الّذي يعبّرُ عَنِ المسألةِ هُوَ:

$$6x + 7y = 36$$
$$8x + 6y = 38$$

الْخُطْوَةُ 1 أضربُ المعادلةَ الأولى في 4 والمعادلةَ الثانيةَ في -3؛ لأحذفَ المتغيّرَ x.

$$6x + 7y = 36 \xrightarrow{\text{أضربُ كلَّ حدٍّ في } 4} 24x + 28y = 144$$

$$8x + 6y = 38 \xrightarrow{\text{أضربُ كلَّ حدٍّ في } -3} -24x - 18y = -114$$

الْخُطْوَةُ 2 أجمعُ المعادلتَينِ.

$$\begin{array}{rr} & 24x + 28y = 144 \\ (+) & -24x - 18y = -114 \\ \hline & 10y = 30 \end{array}$$

أحذفُ المتغيّرَ x

$$\frac{10y}{10} = \frac{30}{10}$$

أقسمُ طرفَي المعادلةِ على 10

$$y = 3$$

أبسّطُ

أتعلّمُ

يمكنُ أيضًا حلُّ النظامِ بحذفِ المتغيّرِ y، فمثلًا: يمكنُني ضربُ المعادلةِ الأولى في 6 وضربُ المعادلةِ الثانيةِ في -7

الْخُطْوَةُ 3 أعوّضُ 3 بدلًا مِنْ y في إحدى المعادلتَيْنِ؛ لإيجادِ قيمةِ x.

المعادلةُ الأولى	$6x + 7y = 36$
أعوّضُ عَنْ y بـِ 3	$6x + 7(3) = 36$
أبسّطُ	$6x + 21 = 36$
أطرحُ 21 مِنْ كِلا الطرفَيْنِ	$6x + 21 - 21 = 36 - 21$
أبسّطُ	$6x = 15$
أقسمُ طرفَيِ المعادلةِ على 6	$\frac{6x}{6} = \frac{15}{6}$
أبسّطُ	$x = 2.5$

أيْ إنَّ ماجدًا يتقاضى JD 2.5 عَنْ كلِّ ساعةِ عملٍ، أمّا حازمٌ فيتقاضى JD 3 عَنْ كلِّ ساعةِ عملٍ.

أتحققُ من فهمي:

حافلةٌ فيها ركّابٌ مِنَ النّساءِ والأطفالِ، إذا كانَ ثلاثةُ أمثالِ عددِ النّساءِ مضافًا إليهِ مِثْلا عددِ الأطفالِ يُساوي 29، وكانَ مِثْلا عددِ النّساءِ مضافًا إليهِ عددُ الأطفالِ يُساوي 17، فَكَمِ امرأةً وَكَمْ طفلًا في الحافلةِ؟

أتدرب وأحل المسائل

أحلُّ كلًّا مِنْ أنظمةِ المعادلاتِ الآتيةِ باستعمالِ الحذفِ:

1) $4x - y = -2$
$2x + y = 8$

2) $3x + y = 4$
$5x + y = 6$

3) $6x + 2y = 14$
$3x - 5y = 10$

4) $11x - 20y = 28$
$3x + 4y = 36$

5) $-2x - 5y = 9$
$3x + 11y = 4$

6) $y + 2x = 4$
$x - y = 5$

7) $2x + 3y = 30$
$5x + 7y = 71$

8) $3x - 4y = 4.5$
$x + y = 5$

9) $0.5x - 9y = 28$
$30.5x + 7y = 40$

إرشادٌ

ترتيبُ الحدودِ المتشابهةِ في المعادلتَيْنِ تحتَ بعضِهِما بعضًا يسهّلُ حلَّ نظامِ المعادلاتِ.

10 $8x + y = 1$
$8x - y = 3$

11 $12x - 7y = -2$
$8x + 11y = 30$

12 $9x + 2y = 39$
$6x + 13y = -9$

13 **طقسٌ:** لاحظَ راصــدٌ جوّيٌّ أَنَّ عددَ الأيّامِ مِنْ شــهرِ كانونِ الأولِ الّتي تســاقطَتْ فيها الأمطارُ يزيدُ 7 أيّامٍ عَنْ تلكَ الّتي لَمْ تتساقطْ فيها الأمطارُ. أكتبُ نظامًا مِنْ معادلتَينِ خطّيّتَينِ يُمثّلُ المســألةَ، ثُمَّ أحلُّهُ لأجدَ عددَ الأيّامِ الّتي تساقطَتْ فيها الأمطارُ وعددَ الأيّامِ الّتي لَمْ تتساقطْ فيها الأمطارُ في هذا الشّهرِ.

أفكّرُ

كَمْ يومًا في شــهرِ كانونِ الأولِ؟

14 أربطُ كلَّ زوجٍ مرتَّــبٍ مَعَ نظامِ معادلاتٍ خطّيّةٍ مكوّنٍ مِــنْ معادلتَينِ مِنَ المعادلاتِ الأربعِ المُعطاةِ، بحيثُ يكونُ الزّوجُ المرتّبُ حَلًّا للمعادلتَينِ:

الزّوجُ المرتَّبُ
$(1, -2)$
$(-1, 3)$
$(2, 1)$
$(3, -3)$

المعادلاتُ
$5x + 2y = 1$
$4x + y = 9$
$3x - y = 5$
$3x + 2y = 3$

15 **أعدادٌ:** ثلاثةُ أمثالِ عددٍ مطروحًا مِنْها عددٌ آخَرُ يُساوي -3، إذا كانَ مجموعُ العددَينِ يُساوي 11، فَما العددانِ؟

16 **موادُّ غذائيةٌ:** في مخزنِ أحدِ المطاعمِ مجموعةٌ مِنْ أكيــاسِ الأرزِّ وأكياسِ الســكّرِ. كتلــةُ 3 أكياسٍ مِنَ الســكّرِ وَ4 أكياسٍ مِــنَ الأرزِّ 12 kg، وكتلةُ 5 أكياسٍ مِنَ الســكّرِ وكيسَــينِ مِنَ الأرزِّ 13 kg . كيفَ يمكنُ مساعدةُ طبّاخِ المطعمِ على إيجادِ كتلةِ كيسَينِ مِنَ السكّرِ وخمسةِ أكياسٍ مِنَ الأرزِّ؟

معلومةٌ

يفضَّــلُ تخزينُ الحبوبِ في مكانٍ جافٍّ بعيدًا عَنْ أشعّةِ الشمسِ المباشرةِ؛ حفاظًا عليها مِنَ التّلفِ.

17 **مبنًى حكوميٌّ**: يبلغُ ارتفاعُ مبنًى حكوميٍّ مَعَ ساريةِ العَلَمِ الأردنيِّ المثبّتةِ على سطحِهِ 21.6 m، إذا كانَ ارتفاعُ المبنى مطروحًا منهُ ارتفاعُ ساريةِ العلمِ يُساوي 10.4 m، فَما ارتفاعُ المبنى؟ وكَمْ يبلغُ طولُ ساريةِ العَلَمِ؟

18 أعودُ إلى فقرةِ (أستكشفُ) بدايةَ الدرسِ، وأحلُّ المسألةَ.

مهاراتُ التفكيرِ العُليا

19 **أكتشفُ الخطأَ**: أنظرُ الحلَّ الآتيَ وأكتشفُ الخطأَ الواردَ فيهِ، وأصحّحُهُ.

$$4x + 3y = 8 \qquad\qquad 4x + 3y = 8$$

$$x - 2y = -13 \quad \xrightarrow{\text{أضربُ في } -4} \quad -4x + 8y = -13$$

$$11y = -5$$

$$y = \frac{-5}{11}$$

20 **مسألةٌ مفتوحةٌ**: أقترحُ قيمةً لِـ a تجعلُ لنظامِ المعادلاتِ الآتي حلًّا، وأبرّر إجابتي.

$$x + y = 4$$

$$a\,x + 3y = 4$$

21 **تحدٍّ**: أجدُ عددًا مِنْ منزلتَينِ مجموعُ رقْمَيهِ 8، ورقْمُ آحادِهِ مضافًا إلى مثلَيْ رقْمِ عشراتِهِ يساوي 10

22 **أكتبُ** كيفَ أجدُ حلَّ نظامِ معادلاتٍ خطّيّةٍ مكوّنٍ مِنْ معادلتَينِ بالحذفِ؟

اختبارُ نهايةِ الوحدةِ

أختارُ رمزَ الإجابةِ الصحيحةِ لكلٍّ ممّا يأتي:

1 حلُّ نظامِ المعادلاتِ الآتي هُوَ:

$$x + y = 6$$
$$x - y = 8$$

a) $(2, 4)$ **b)** $(4, 2)$

c) $(7, -1)$ **d)** $(-1, 7)$

2 حلُّ نظامِ المعادلاتِ الآتي هُوَ:

$$y = -4x$$
$$6x - y = 30$$

a) $(3, 4)$ **b)** $(3, -4)$

c) $(3, 12)$ **d)** $(3, -12)$

3 أيُّ أنظمةِ المعادلاتِ الآتيةِ لَهُ عددٌ لانهائيٌّ مِنَ الحلولِ؟

a) $x + y = 1$, $x - y = 3$ **b)** $2y = 4x + 1$, $x - 2y = 7$

c) $2x - y = 6$, $-3y = -6x + 18$ **d)** $5x = y + 5$, $-x + 3y = 13$

4 أيُّ المعادلاتِ الآتيةِ لَها التمثيلُ البيانيُّ نفسُهُ للمعادلةِ $4x + 8y = 12$؟

a) $x + y = 3$ **b)** $2x + y = 3$

c) $x + 2y = 3$ **d)** $2x + 3y = 6$

أحلُّ كلًّا مِنْ أنظمةِ المعادلاتِ الآتيةِ بيانيًّا:

5 $y = 2x - 5$, $y = -2x + 7$

6 $y = x + 4$, $y = 2x + 1$

7 $x + 2y = 3$, $y = 4x - 3$

8 $y = 4 - x$, $y = x - 4$

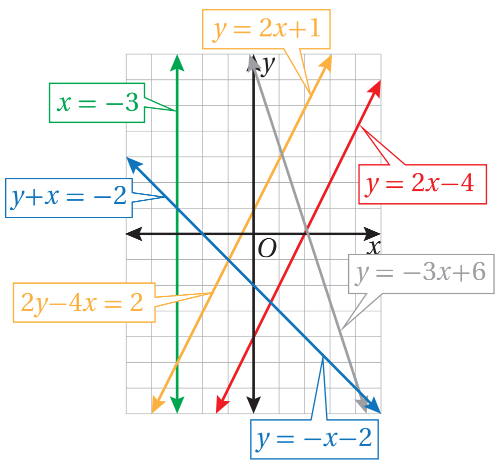
9 $y = 0.5x + 10$, $y = 4x - 4$

10 $y + x = 0$, $3y + 6x = -9$

11 $7x + 2y = 13$, $3y - 2x = -3$

12 $y - x = 17$, $y = 4x + 2$

أستعملُ التمثيلَ البيانيَّ أدناهُ، لأحدّدَ ما إذا كانَ لكلٍّ مِنْ أنظمةِ المعادلاتِ الآتيةِ حلٌّ واحدٌ، أَمْ لا يوجدُ لَهُ حلٌّ، أَمْ لَهُ عددٌ لانهائيٌّ مِنَ الحلولِ:



13 $x = -3$, $y = 2x + 1$

14 $y = 2x + 1$, $y = 2x - 4$

15 $y + x = -2$, $y = -x - 2$

16 $2y - 4x = 2$, $y = 2x - 4$

17 $y = -3x + 6$, $y = 2x - 4$

18 $2y - 4x = 2$, $y = -3x + 6$

أحلُّ كلًّا مِنْ أنظمةِ المعادلاتِ الآتيةِ باستعمالِ التعويضِ:

19 $y = x + 3$, $2x + y = 12$

20 $x - 2y = 6$, $2x + y = 2$

21 $x = 2y + 7$, $3x - 2y = 3$

22 $4x - 2y = 14$, $y = 0.5x - 1$

أحلُّ كلًّا مِنْ أنظمةِ المعادلاتِ الآتيةِ باستعمالِ الحذفِ:

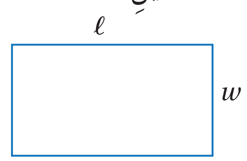
23 $3x + y = 20$, $2x - y = 5$

24 $x - 6y = 4$, $2x + y = -5$

25 $3x - 2y = 4$, $6x - 2y = -2$

26 $5y = 15 - 5x$, $y = -2x + 3$

27 يبيّنُ الشّكلُ أدناهُ مستطيلًا محيطُهُ 40 m، إذا كانَ طولُ المستطيلِ يقلُّ 1 m عَنْ مِثْلَيْ عرضِهِ، فأكتبُ نظامًا مِنْ معادلتينِ خطّيّتينِ يمثّلُ المسألةَ، ثُمَّ أحلُّهُ لأجدَ بُعدَيِ المستطيلِ.



28 باعَ محلٌّ كمّيّةً مِنْ خليطِ مكسّراتِ اللّوزِ والفستقِ تبلغُ قيمتُها 27 JD، ويُبيّنُ الجدولُ الآتي سعرَ الأوقيةِ الواحدةِ مِنْ كلِّ نوعٍ في الخليطِ:

سعرُ الأوقيةِ	النّوعُ
JD 4	الفستقُ
JD 1.5	اللّوزُ

إذا كانَتْ كمّيّةُ الفستقِ تُساوي ثلاثةَ أمثالِ كمّيّةِ اللّوزِ في الأوقيةِ الواحدةِ في الخليطِ المَبيعِ، فأجدُ كَمّيّةَ كُلٍّ مِنَ اللّوزِ والفستقِ المبيعةَ.

29 سجّلَ أحدُ لاعبي كرةِ القدمِ في الدّوري 10 أهدافٍ. إذا كانَ مِثلا عددِ ما سجّلَهُ في مرحلةِ الذهابِ يساوي ثلاثةَ أمثالِ عددِ ما سجّلَهُ في مرحلةِ الإيابِ، فأكتبُ نظامَ معادلاتٍ خطّيّةٍ مكوّنًا مِنْ معادلتينِ خطّيّتينِ يمثّلُ المسألةَ، ثُمَّ أحلُّهُ لأجدَ ما سجّلَهُ اللاعبُ في كُلٍّ مِنْ مرحلتَي الذهابِ والإيابِ.

تدريبٌ على الاختباراتِ الدّوليّةِ

30 أيُّ المعادلاتِ الآتيةِ ينتجُ عَنْ تمثيلِها في المستوى الإحداثيِّ مستقيمٌ موازٍ للمستقيمِ $y - 3x = 6$؟

a) $y = -3x + 4$ b) $y = 3x - 2$

c) $y = \frac{1}{3}x + 6$ d) $y = -\frac{1}{3}x + 6$

31 كَمْ حلًّا لنظامِ المعادلاتِ الآتي؟

$4x + y = 7$

$3x - y = 0$

a) لا يوجدُ حلٌّ b) حلٌّ واحدٌ فقطْ

c) عددٌ لا نهائيٌّ مِنَ الحلولِ d) حلّانِ

32 حلُّ نظامِ المعادلاتِ الآتي هُوَ:

$2x - 3y = -9$

$-x + 3y = 6$

a) $(3, 3)$ b) $(3, -1)$

c) $(-3, 1)$ d) $(1, -3)$

الوحدةُ 7

الأشكالُ ثنائيةُ الأبعادِ

ما أهميَّةُ هذهِ الوحدةِ؟

للأشكالِ الهندسيةِ أنواعٌ كثيرةٌ وخصائصُ لا يمكنُ حصرُها؛ لذا تُستعمَلُ في مجالاتٍ حياتيةٍ وعلميةٍ شتّى. ولا يمكنُ إنتاجُ أيِّ تصميمٍ أَوْ عملٍ فنّيٍّ أَوْ معماريٍّ مِنْ دونِ استعمالِ خصائصِ الأشكالِ الهندسيةِ، وهذا يعني أنَّهُ لا بدَّ مِنْ فهمِ هذِهِ الخصائصِ قبلَ البدءِ بأيِّ تصميمٍ.

تعلَّمتُ سابقًا:

- ✓ تصنيفَ الأشكالِ الرباعيةِ حسبَ خواصِّها الأساسيةِ.
- ✓ العلاقةَ بَيْنَ الأضلاعِ والزوايا المتناظرةِ في مضلعينِ متشابهَينِ.
- ✓ رسمَ مضلعٍ تحتَ تأثيرِ تكبيرٍ.

سأتعلَّمُ في هذهِ الوحدةِ:

- تحديدَ المثلثاتِ المتشابهةِ باستعمالِ حالاتِ التشابهِ AA وَSSS وَ SAS
- خصائصَ أضلاعِ وزوايا وأقطارِ متوازي الأضلاعِ، وحالاتِهِ الخاصةِ.
- رسمَ صورةِ مضلعٍ تحتَ تأثيرِ تمدّدٍ في المستوى الإحداثيِّ.

مشروعُ الوحدةِ: المِنساخُ

أســتعدُّ ومجموعتي لتنفيذِ مشروعِنا الخاصِّ، الّذي سنوظّفُ فيهِ ما نتعلمُهُ في هذِهِ الوَحدةِ لتصميمِ أداةٍ هندسيةٍ تُسمّى المنساخَ.

الموادُّ والأدواتُ:

- لوحتانِ مِنَ الكرتونِ المقوّى.
- ورقةٌ كبيرةٌ.
- دبابيسُ ومِثقبٌ.
- مسطرة ومِقصٌّ.

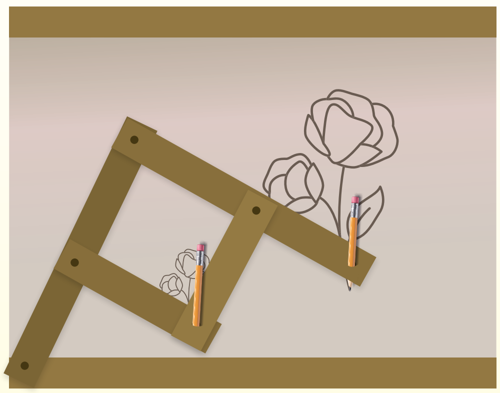
خُطواتُ تنفيذِ المشروعِ:

أشاهدُ المقطعَ المرئيَّ (الفيديو) في الرمزِ المجاورِ، ثُمَّ أنفّذُ الخطواتِ الآتيةَ:

1. أقصُّ أربعَ قطعٍ مســتطيلةِ الشكلِ مِنَ الكرتونِ المقوّى: قطعتَينِ طولُ كلٍّ منهُما 20 cm، وقطعتَينِ أُخريَينِ طولُ كلٍّ منهُما 10 cm، وَعرضُ كُلِّ قطعةٍ منها 2.5 cm
2. أســتعملُ المثقبَ لصنــعِ فتحاتٍ في طــرفِ كلٍّ مِنَ القطعتَينِ الطويلتَيــنِ، وأربطُ بينَهُما مِنْ خلالِ الثقبَينِ باستعمالِ الدبابيسِ.
3. أســتعملُ المثقبَ لصنعِ فتحاتٍ في منتصــفِ كلٍّ مِنَ القطعتَينِ الطويلتَينِ وطرفِ كلٍّ مِنَ القطعتَينِ القصيرتَينِ، وأصلُ بَيْنَ القطعتَينِ القصيرتَينِ والطويلتَينِ بالدبابيسِ.
4. أثقبُ الطرفَ الآخَرَ في كلٍّ مِنَ القطعتَينِ القصيرتَينِ، وأضعُ إحداهُما فوقَ الأُخــرى بحيثُ ينطبقُ الثّقبانِ، ثُمَّ أثقبُ الطرفَ الآخَرَ لكلٍّ مِنَ القطعتَينِ الطويلتَينِ.
5. أرسمُ على ورقةٍ خارجيةٍ متوازيَ أضلاعٍ بأبعادٍ محدَّدةٍ، وأضعُ الورقةَ تحتَ أحدَ قلمَي الرّصاصِ، وأتتبّعُ محيطَ المتوازي، ثُمَّ ألاحظُ الرسمَ الناتجَ مِنَ القلمِ الآخَرِ.
6. أحدّدُ العلاقةَ بَيْنَ الرسمَينِ مِنْ حيثُ: أطوالُ الأضلاعِ، وقياساتُ الزوايا.
7. أكرّرُ الخطوتَينِ 8 وَ 9 باختيارِ أشكالٍ رباعيةٍ مختلفةٍ.

عرضُ النتائجِ:

- أعرضُ المِنساخَ الّذي صمّمْتُهُ أمامَ طلبةِ صفّي، وأوضحُ أهميتَهُ وعلاقتَهُ بِما تعلّمْتُهُ في الوَحدةِ.
- أُعِدُّ عرضًــا تقديميًّا، وأتحدثُ بالتفصيــلِ عَنْ خطواتِ تصميمِ المِنساخِ والنتائجِ الّتي توصّلْتُ إليها.



الدرسُ 1 إثباتُ توازي المستقيماتِ وتعامدِها

فكرةُ الدرسِ

أميّزُ المستقيماتِ المتوازيةَ بناءً على علاقاتٍ بَيْـنَ أزواجٍ مِنَ الزوايا الناتجةِ عَنْ مســتقيمين قاطعٍ.

أستكشفُ

يبيّنُ الشكلُ المجاورُ سُلَّمًا كلُّ درجةٍ مِنْ درجاتِهِ عموديةٌ على الدّعامتَينِ الرئيستَينِ.

1) هَلِ الدعامتانِ الرئيستانِ متوازيتانِ؟ أبرّرُ إجابتي.

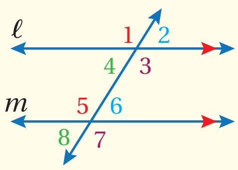
2) هَلِ الدرجاتُ جميعُها متوازيةٌ؟ أبرّرُ إجابتي.

تعلّمْتُ سابقًا أنَّهُ إذا قطعَ مستقيمٌ مستقيمَينِ متوازيَينِ في المستوى نفسِهِ، فإنَّ هذا يقودُ إلى النظرياتِ الآتيةِ حولَ العلاقةِ بَيْنَ أزواجِ الزوايا الناتجةِ عَنْ هذا التقاطعِ.

مراجعةُ المفهومِ: نظرياتُ المستقيمَينِ المتوازيَينِ وأزواجِ الزوايا

- **مسلّمةُ الزاويتَينِ المتناظرتَينِ**

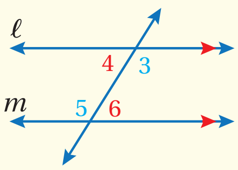
إذا قطعَ قاطعٌ مستقيمَينِ متوازيَينِ، فإنَّ كلَّ زاويتَينِ متناظرتَينِ متطابقتانِ.



مثالٌ: $\angle 5 \cong \angle 1$ وَ $\angle 6 \cong \angle 2$ وَ $\angle 8 \cong \angle 4$ وَ $\angle 7 \cong \angle 3$

- **نظريةُ الزاويتَينِ المتبادلتَينِ داخليًّا**

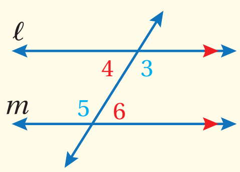
إذا قطعَ قاطعٌ مستقيمَينِ متوازيَينِ، فإنَّ كلَّ زاويتَينِ متبادلتَينِ داخليًّا متطابقتانِ.



مثالٌ: $\angle 6 \cong \angle 4$ و $\angle 5 \cong \angle 3$

- **نظريةُ الزاويتَينِ المتحالفتَينِ**

إذا قطعَ قاطعٌ مستقيمَينِ متوازيَينِ، فإنَّ كلَّ زاويتَينِ متحالفتَينِ متكاملتانِ.

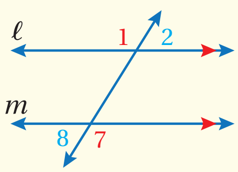


مثالٌ: $m\angle 4 + m\angle 5 = 180°$

$m\angle 3 + m\angle 6 = 180°$

- **نظريةُ الزاويتَينِ المتبادلتَينِ خارجيًّا**

إذا قطعَ قاطعٌ مستقيمَينِ متوازيَينِ، فإنَّ كلَّ زاويتَينِ متبادلتَينِ خارجيًّا متطابقتانِ.



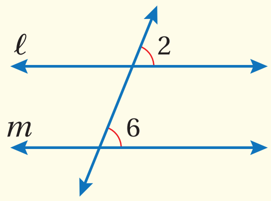
مثالٌ: $\angle 7 \cong \angle 1$ و $\angle 8 \cong \angle 2$

ســأتعلّمُ في هذا الدرسِ كيفيةَ اســتعمالِ أزواجِ الزوايا الناتجةِ عَنْ مســتقيمَينِ يقطعُهُما قاطعٌ في المســتوى نفسِهِ لإثباتِ توازيهِما، فمثلًا، تكونُ الزوايا المتناظرةُ متطابقةً حينَ يكونُ المستقيمانِ متوازيَينِ، وعكسُ هذِهِ المسلّمةِ صحيحٌ أيضًا.

مسلّمةٌ عكسُ مسلّمةِ الزاويتَينِ المتناظرتَينِ

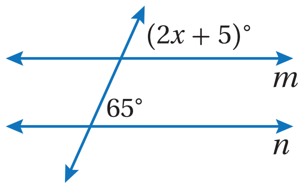
إذا قطعَ قاطعٌ مستقيمَينِ، ونتجَ عَنِ التقاطعِ زاويتانِ متناظرتانِ متطابقتانِ، فإنَّ المستقيمَينِ متوازيانِ.

مثالٌ: إذا كانَتْ $\angle 2 \cong \angle 6$ فإنَّ $\ell \parallel m$



مثال 1

أجدُ قيمةَ x الّتي تجعلُ $m \parallel n$.



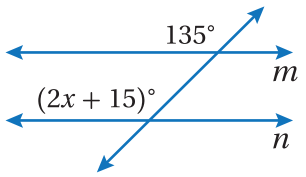
يكونُ المستقيمانِ m وَ n متوازيَينِ إذا كانَتِ الزاويتانِ المتناظرتانِ متطابقتَينِ.

أستعملُ عكسَ مسلّمةِ الزاويتَينِ المتناظرتَينِ لكتابةِ معادلةٍ	$(2x + 5)^\circ = 65^\circ$
أكتبُ المعادلةَ مِنْ دونِ رمزِ الدرجةِ	$2x + 5 = 65$
أطرحُ 5 مِنْ طرفَيِ المعادلةِ	$2x = 60$
أقسمُ طرفَيِ المعادلةِ على 2	$x = 30$

إذنْ، قيمةُ x الّتي تجعلُ المستقيمَينِ m وَ n متوازيَينِ تُساوي 30

أتحققُ من فهمي:

أجدُ قيمةَ x الّتي تجعلُ $m \parallel n$.



يمكنُ أنْ تحدّدَ أزواجُ الزوايا الناتجةِ عَنْ مستقيمَينِ يقطعُهُما قاطعٌ في المستوى نفسِهِ ما إذا كانَ المستقيمانِ متوازيَينِ أَمْ لا.

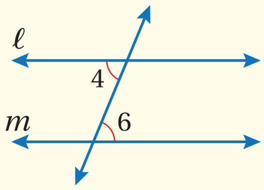
نظرياتٌ

عكسُ نظرياتِ المستقيمَينِ المتوازيَينِ وأزواجِ الزوايا

- **عكسُ نظريةِ الزاويتَينِ المتبادلتَينِ داخليًّا**

إذا قطعَ قاطعٌ مســـتقيمَينِ، ونتجَ عَنِ التقاطعِ زاويتانِ متبادلتانِ داخليًّا متطابقتانِ، فإنَّ المستقيمَينِ متوازيانِ.

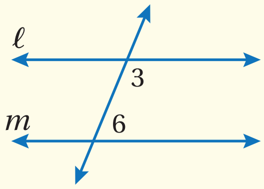
مثالٌ: إذا كانَتْ $\angle 4 \cong \angle 6$ فإنَّ $\ell \parallel m$



- **عكسُ نظريةِ الزاويتَينِ المتحالفتَينِ**

إذا قطعَ قاطعٌ مســـتقيمَينِ، ونتجَ عَنِ التقاطعِ زاويتـــانِ متحالفتانِ متكاملتانِ، فإنَّ المستقيمَينِ متوازيانِ.

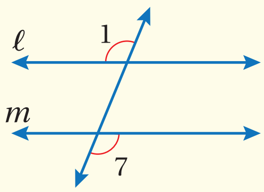
مثالٌ: إذا كانَتْ $m\angle 3 + m\angle 6 = 180°$ فإنَّ $\ell \parallel m$



- **عكسُ نظريةِ الزاويتَينِ المتبادلتَينِ خارجيًّا**

إذا قطعَ قاطعٌ مســـتقيمَينِ، ونتجَ عَنِ التقاطعِ زاويتانِ متبادلتانِ خارجيًّا متطابقتانِ، فإنَّ المستقيمَينِ متوازيانِ.

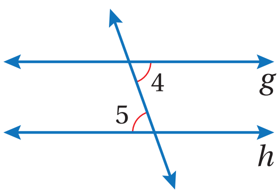
مثالٌ: إذا كانَتْ $\angle 1 \cong \angle 7$ فإنَّ $\ell \parallel m$



يمكنُ استعمالُ عكسِ مسلّمةِ الزاويتَينِ المتناظرتَينِ لإثباتِ النظرياتِ السابقةِ.

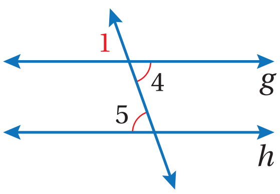
مثال 2: إثباتُ نظريةٍ

في الشكلِ المجاورِ، إذا كانَ $\angle 5 \cong \angle 4$ فأثبتُ أنَّ $g \parallel h$ باستعمالِ المخطّطِ السهميِّ.



أخطّطُ للحلِّ باتباعِ الخطواتِ الآتيةِ:

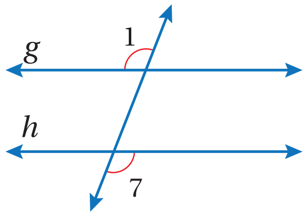
الْخُطْوَةُ 1 أسمّي $\angle 1$ الّتي تقابلُ بالرأسِ $\angle 4$



الْخُطْوَةُ 2 أستعملُ تطابقَ الزوايا الناتجَ عَنِ التقابلِ بالرأسِ في إثباتِ توازي المستقيمَينِ.

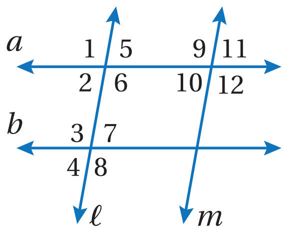
$\angle 4 \cong \angle 5$ (معطًى) ، $\angle 1 \cong \angle 4$ (زاويتانِ متقابلتانِ بالرأسِ) ← $\angle 1 \cong \angle 5$ (نتيجةٌ) ← $g \parallel h$ (عكسُ مسلّمةِ الزاويتَينِ المتناظرتَينِ)

أتحققُ من فهمي:



في الشكلِ المجاورِ، إذا كانَ $\angle 7 \cong \angle 1$ فأثبتُ أنَّ $g \parallel h$ باستعمالِ المخطّطِ السهميِّ.

مثال 3



هَلْ يمكنُ إثباتُ أنَّ أيًّا مِنْ مستقيماتِ الشكلِ المجاورِ متوازيةٌ اعتمادًا على المعطيَاتِ في كلٍّ ممّا يأتي؟ أبرّرُ إجابتي باستعمالِ مسلّمةٍ أَوْ نظريةٍ.

1 $\angle 1 \cong \angle 8$

$\angle 8$ وَ $\angle 1$ متبادلتانِ خارجيًّا بالنسبةِ للمستقيمَينِ a وَ b، وَبِما أنَّ $\angle 8 \cong \angle 1$ فإنَّ $b \parallel a$ بحسبِ عكسِ نظريةِ الزاويتَينِ المتبادلتَينِ خارجيًّا.

2 $m\angle 5 + m\angle 9 = 180°$

$\angle 9$ وَ $\angle 5$ متحالفتانِ بالنسبةِ للمستقيمَينِ m وَ ℓ، وَبِما أنَّ $m\angle 5 + m\angle 9 = 180°$ فإنَّ $m \parallel \ell$ بحسبِ عكسِ نظريةِ الزاويتَينِ المتحالفتَينِ.

أتحققُ من فهمي:

3 $\angle 7 \cong \angle 2$

4 $\angle 6 \cong \angle 12$

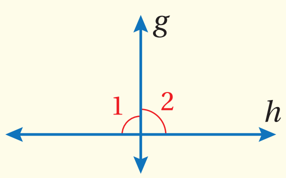
5 $m\angle 3 + m\angle 2 = 180°$

في ما يأتي بعضُ النظرياتِ المتعلقةِ بالمستقيماتِ المتعامدةِ، إضافةً إلى نظرياتٍ خاصةٍ تنتجُ حينَ يكونُ قاطعُ المستقيمَينِ عموديًّا عليهِما:

نظرية — نظريةُ الزاويتَينِ المتجاورتَينِ المتطابقتَينِ

- **نظريةُ الزاويتَينِ المتجاورتَينِ المتطابقتَينِ**

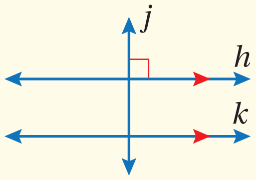
إذا تقاطعَ مستقيمانِ لتشكيلِ زاويتَينِ متجاورتَينِ متطابقتَينِ، فإنَّ المستقيمَينِ متعامدانِ.



مثالٌ: إذا كانَتْ $\angle 2 \cong \angle 1$ فإنَّ $g \perp h$

نظرياتٌ: نظريةُ القاطعِ العموديِّ وعكسُها

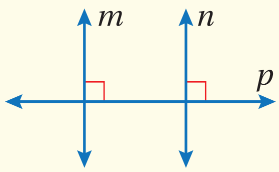
- **نظريةُ القاطعِ العموديِّ**



إذا كانَ مستقيمٌ عموديًّا على أحدِ مســـتقيمَينِ متوازيَينِ، فإنَّهُ يكونُ عموديًّا على المستقيمِ الآخَرِ.

مثالٌ: إذا كانَ $h \parallel k$ وَ $j \perp h$، فإنَّ $j \perp k$

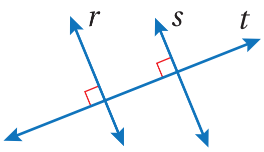
- **عكسُ نظريةِ القاطعِ العموديِّ**



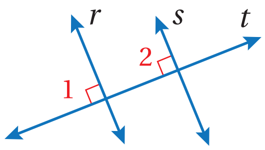
إذا قطعَ قاطعٌ مستقيمَينِ وكانَ عموديًّا على كلٍّ منهُما، فإنَّ المستقيمَينِ متوازيانِ.

مثالٌ: إذا كانَ $p \perp m$، و $p \perp n$ فإنَّ $m \parallel n$

مثال 4: إثباتُ نظريةٍ

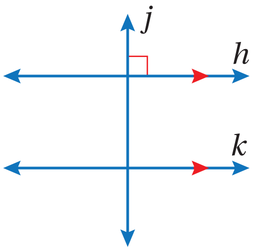


أســـتعملُ المعلوماتِ المعطاةَ في الشـــكلِ المجاورِ لأثبتَ أنَّ $r \parallel s$ باســـتعمالِ البرهانِ ذي العمودَينِ.



العباراتُ	المبرّراتُ
1) $\angle 1$ وَ $\angle 2$ قائمتانِ	1) معطًى.
2) $\angle 1 \cong \angle 2$	2) الزوايا القائمةُ متطابقةٌ
3) $r \parallel s$	3) عكسُ مسلّمةِ الزاويتَينِ المتناظرتَينِ

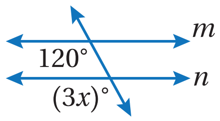
أتحقّقُ من فهمي:

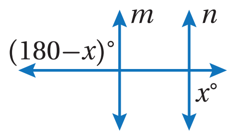


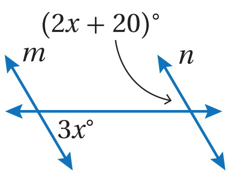
أستعملُ المعلوماتِ المعطاةَ في الشكلِ المجاورِ؛ لأثبتَ أنَّ $j \perp k$ باستعمالِ البرهانِ ذي العمودَينِ.

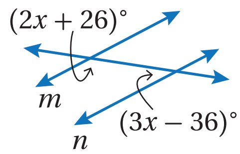
أتدرب وأحل المسائل

أجدُ قيمةَ x التي تجعلُ $m \parallel n$ في كلٍّ ممّا يأتي:

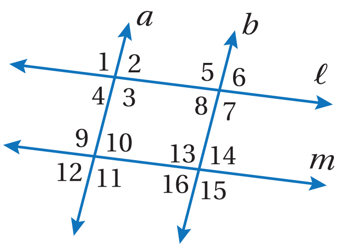
1 

2 

3 

4 

هَلْ يمكنُ إثباتُ أنَّ أيًّا مِنْ مستقيماتِ الشكلِ المجاورِ متوازيةٌ اعتمادًا على المعطيَاتِ في كلٍّ ممّا يأتي؟ أبرّرُ إجابتي باستعمالِ مسلّمةٍ أَوْ نظريةٍ.



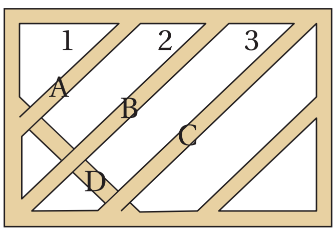
5 $\angle 2 \cong \angle 8$

6 $\angle 9 \cong \angle 15$

7 $\angle 6 \cong \angle 16$

8 $m\angle 10 + m\angle 13 = 180°$

عريشٌ خشبيٌّ: صمّمَ نجارٌ عريشًا خشبيًّا خاصًّا بنموِّ النباتاتِ المتسلّقةِ يتكوّنُ مِنْ قطعٍ خشبيةٍ مرتّبةٍ بشكلٍ قُطريٍّ:



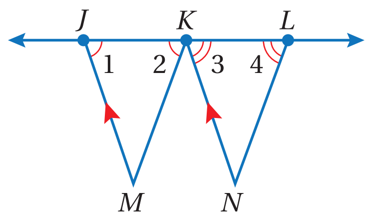
9 يحتاجُ النجّارُ إلى أنْ تكونَ القطعُ الخشبيةُ A وَ B وَ C متوازيةً، فكيفَ يحقّقُ ذلكَ مِنْ خلالِ $\angle 1$ وَ $\angle 2$ وَ $\angle 3$؟

10 وصلَ النجّارُ القطعةَ الخشبيةَ D بحيثُ تكونُ عموديةً على القطعةِ الخشبيةِ A، فَهَلِ القطعةُ D عموديةٌ على القطعتَينِ B وَ C، علمًا بأنَّ النجّارَ جعلَ القطعَ الخشبيةَ A وَ B وَ C متوازيةً؟ أبرّرُ إجابتي.

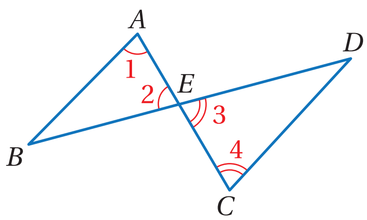
أتذكّرُ

أستعملُ خصائصَ المساواةِ لحلِّ معادلاتٍ تحتوي متغيراتٍ في طرفَيْها.

11 أستعملُ المعلوماتِ المعطاةَ في الشكلِ الآتي؛ لأثبتَ أنَّ $\overline{KM} \parallel \overline{LN}$ باستعمالِ البرهانِ ذي العمودَين.

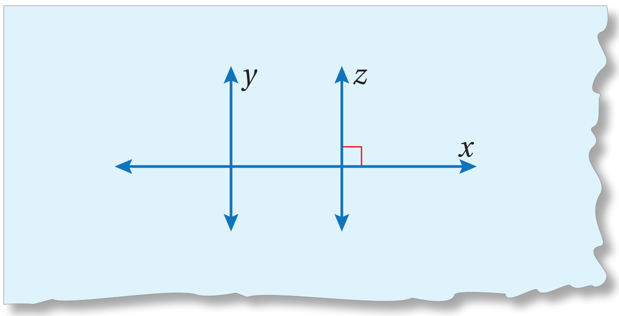


12 في الشكلِ الآتي، إذا كانَتْ $\angle 2 \cong \angle 1$ وَ $\angle 4 \cong \angle 3$، فأثبتُ أنَّ $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ باستعمالِ البرهانِ السهميِّ.



مهاراتُ التفكيرِ العُليا

13 **أكتشفُ الخطأَ:** يقولُ زيادٌ: بِما أنَّ $z \perp x$ فإنَّ $z \parallel y$ في الشكلِ الآتي بحسبِ نظريةِ عكسِ القاطعِ العموديِّ. أكتشفُ الخطأَ في ما يقولُهُ زيادٌ، وأصحّحُهُ.



تحدٍّ: أحدّدُ المستقيماتِ المتوازيةَ في الشكلِ الرباعيِّ $QLMN$ في كلٍّ ممّا يأتي، وأبرّر إجابتي:

14 $m\angle Q = 72°, m\angle L = 108°, m\angle M = 72°, m\angle N = 108°$

15 $m\angle Q = 59°, m\angle L = 37°, m\angle M = 143°, m\angle N = 121°$

إرشادٌ

أرسمُ شكلًا توضيحيًّا لكلٍّ مِنَ الشكلَينِ الرّباعيَّينِ الواردَينِ في السؤالَينِ 14 وَ 15 وفقَ المعلوماتِ المعطاةِ.

16 **أكتبُ** كيفَ يمكنُ أنْ تحدّدَ أزواجُ الزوايا الناتجةِ عَنْ مستقيمَينِ يقطعُهُما قاطعٌ في المستوى نفسِهِ ما إذا كانَ المستقيمانِ متوازيَينِ أمْ لا؟

الدرسُ 2 متوازي الأضلاعِ

فكرةُ الدرسِ

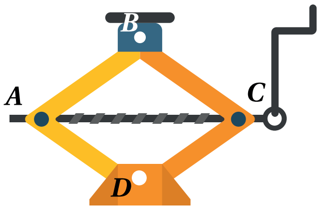
أتعـرّفُ خصائصَ أضــلاعِ وزوايا وأقطارِ متوازي الأضلاعِ.

المصطلحاتُ

متوازي الأضلاعِ، الزوايا المتحالفةُ

أستكشفُ

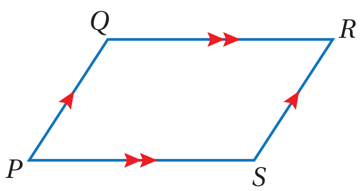
يبيّنُ الشكلُ المجاورُ رافعةَ سيّاراتٍ:



1) ما اسمُ الشكلِ الرباعيِّ $ABCD$؟

2) ما العلاقةُ بَيْنَ $\angle A$ وَ $\angle C$؟

3) ما العلاقةُ بَيْنَ $\angle B$ وَ $\angle D$؟



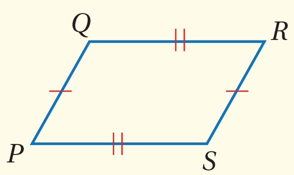
متوازي الأضلاعِ (parallelogram) هوَ شــكلٌ رباعيٌّ فيهِ كلُّ ضلعَينِ متقابلَينِ متوازيانِ، ويُرمَزُ إليهِ بالرمزِ ▱

فَفي $\square QRSP$ المبيَّنِ جانبًا $\overline{PQ} \parallel \overline{SR}$ وَ $\overline{PS} \parallel \overline{QR}$ بحسبِ التعريفِ.

وتقدّمُ النظرياتُ الآتيةُ خصائصَ أُخرى لمتوازي الأضلاعِ.

نظرياتٌ — خصائصُ متوازي الأضلاعِ (1)

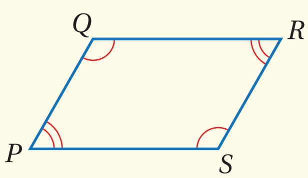
- **نظريةُ الأضلاعِ المتقابلةِ في متوازي الأضلاعِ**



إذا كانَ الشكلُ الرباعيُّ متوازيَ أضلاعٍ، فإنَّ الأضلاعَ المتقابلةَ متطابقةٌ.

مثالٌ: إذا كانَ $PQRS$ متوازيَ أضلاعٍ، فإنَّ $\overline{PQ} \cong \overline{SR}, \overline{QR} \cong \overline{PS}$

- **نظريةُ الزوايا المتقابلةِ في متوازي الأضلاعِ**

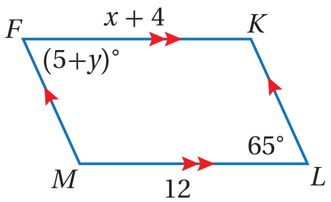


إذا كانَ الشكلُ الرباعيُّ متوازيَ أضلاعٍ، فإنَّ الزوايا المتقابلةَ متطابقةٌ.

مثالٌ: إذا كانَ $PQRS$ متوازيَ أضلاعٍ، فإنَّ $\angle P \cong \angle R, \angle Q \cong \angle S$

يمكنُ استعمالُ الخصائصِ السابقةِ لمتوازي الأضلاعِ لإيجادِ قِيَمٍ مجهولةٍ.

مثال 1



أجدُ قيمةَ كلٍّ مِنْ x وَ y في الشكلِ المجاورِ.

بِما أنَّ كلَّ ضلعَينِ متقابلَينِ متوازيانِ في الشكلِ الرباعيِّ $FKLM$ فإنَّهُ متوازي أضلاعٍ، ومنهُ فإنَّهُ يمكنُني استعمالُ **نظريةِ الأضلاعِ المتقابلةِ في متوازي الأضلاعِ** لإيجادِ قيمةِ x.

الأضلاعُ المتقابلةُ في متوازي الأضلاعِ متطابقةٌ	$\overline{FK} \cong \overline{ML}$
تعريفُ تطابقِ القطعِ المستقيمةِ	$FK = ML$
أعوّضُ $FK = x+4,\ ML = 12$	$x + 4 = 12$
أطرحُ 4 مِنْ طرفَيِ المعادلةِ	$x = 8$

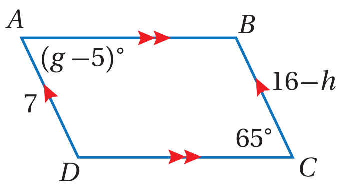
إذنْ، قيمةُ x تُساوي 8

ويمكنني إيجادُ قيمةِ y باستعمالِ **نظريةِ الزوايا المتقابلةِ في متوازي الأضلاعِ**.

الزوايا المتقابلةُ في متوازي الأضلاعِ متطابقةٌ	$\angle F \cong \angle L$
تعريفُ تطابقِ الزّوايا	$m\angle F = m\angle L$
أعوّضُ $m\angle F = (5+y)°,\ m\angle L = 65°$	$(5+y)° = 65°$
أكتبُ المعادلةَ مِنْ دونِ رمزِ الزاويةِ	$5 + y = 65$
أطرحُ 5 مِنْ طرفَيِ المعادلةِ	$y = 60$

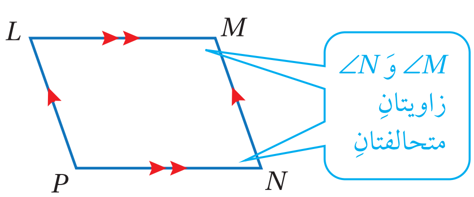
إذنْ، قيمةُ y تُساوي 60

أتحققُ من فهمي:



أجدُ قيمةَ كلٍّ مِنْ g وَ h في الشكلِ المجاورِ.

تُسمّى زوايا المضلعِ الّتي تشتركُ في الضلعِ نفسِهِ **زوايا متحالفةً** (consecutive angles). فمثلًا، في الشكلِ المجاورِ $\angle M$ و $\angle N$ زاويتانِ متحالفتانِ؛ لأنَّهُما تشتركانُ في الضلعِ $\overline{MN}$.



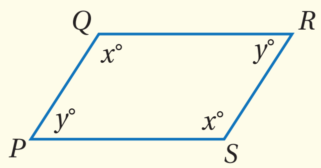
وتقدّمُ النظرياتُ الآتيةُ خصائصَ أُخرى لمتوازي الأضلاعِ تتعلّقُ بالزوايا المتحالفةِ.

مفهومٌ أساسيٌّ — خصائصُ متوازي الأضلاعِ (2)

- **نظريةُ الزوايا المتحالفةِ في متوازي الأضلاعِ**

إذا كانَ الشكلُ الرباعيُّ متوازيَ أضلاعٍ، فإنَّ كلَّ زاويتَينِ متحالفتَينِ متكاملتانِ.

مثالٌ: إذا كانَ $PQRS$ متوازيَ أضلاعٍ، فإنَّ $x° + y° = 180°$

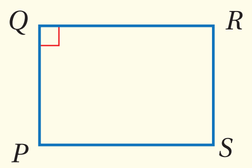


- **نظريةُ الزاويةِ القائمةِ في متوازي الأضلاعِ**

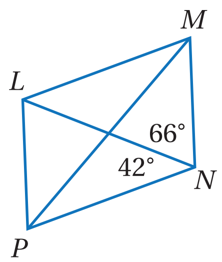
إذا كانَتْ إحدى زوايا متوازي الأضلاعِ قائمةً، فإنَّ زواياهُ الأربعَ قوائمُ.

مثالٌ: في $\square PQRS$ إذا كانت $\angle Q$ قائمةً فإنَّ:

$\angle R$, $\angle S$, $\angle P$ قوائمُ أيضًا.



مثال 2



في الشكلِ المجاورِ، إذا كانَ $LMNP$ متوازيَ أضلاعٍ، فأجدُ $m\angle PLM$ وَ $m\angle LMN$

- أجدُ $m\angle PLM$

أجمعُ قياسَي الزاويتَينِ: $m\angle MNP = 66° + 42° = 108°$

الزوايا المتقابلةُ في متوازي الأضلاعِ متطابقةٌ: $m\angle PLM = m\angle MNP$

أعوّضُ $m\angle MNP = 108°$: $m\angle PLM = 108°$

إذنْ، $m\angle PLM$ تُساوي $108°$

- أجدُ $m\angle LMN$

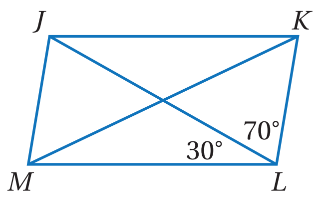
زاويتانِ متحالفتانِ في متوازي أضلاعٍ: $m\angle MNP + m\angle LMN = 180°$

أعوّضُ $m\angle MNP = 108°$: $108° + m\angle LMN = 180°$

أطرحُ $108°$ مِنْ كِلا الطرفَينِ: $m\angle LMN = 72°$

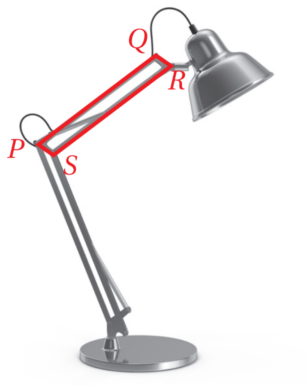
إذنْ، $m\angle LMN$ تُساوي $72°$

أتحققُ من فهمي:



في الشكلِ المجاورِ، إذا كانَ $JKLM$ متوازيَ أضلاعٍ، فأجدُ $m\angle MJK$ وَ $m\angle JKL$

مثال 3: منَ الحياةِ



إضاءةٌ: يبيّنُ الشكلُ المجاورُ جزءًا مِنْ مصباحِ مكتبٍ على شكلِ متوازي أضلاعٍ، وتتغيرُ زواياهُ عندَ رفعِهِ وخفضِهِ. أجدُ $m\angle QRS$ إذا علمْتُ أنَّ $m\angle PSR = 100°$

زاويتانِ متحالفتانِ في متوازي أضلاعٍ	$m\angle QRS + m\angle PSR = 180°$
أعوّضُ $m\angle PSR = 100°$	$m\angle QRS + 100° = 180°$
أطرحُ $100°$ مِنْ كِلا الطرفَينِ	$m\angle QRS = 80°$

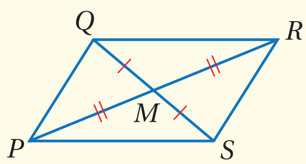
أتحققُ من فهمي:

أفترضُ أنَّ مصباحَ المكتبِ عُدِّلَ لتصبحَ $m\angle PSR = 86°$، أجدُ $m\angle QRS$

تعلّمْتُ في الأمثلةِ السابقةِ خصائصَ متوازي الأضلاعِ المتعلّقةَ بأضلاعِهِ وزواياهُ، وهناكَ أيضًا بعضُ الخصائصِ المتعلّقةِ بقُطرَيهِ.

نظرياتٌ — قُطرا متوازي الأضلاعِ

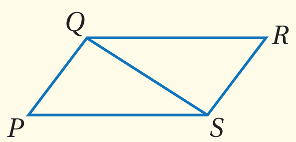
- **نظريةُ قُطرَيْ متوازي الأضلاعِ**



إذا كانَ الشكلُ الرباعيُّ متوازيَ أضلاعٍ، فإنَّ قُطرَيهِ ينصّفُ كلٌّ منهُما الآخَرَ.

مثالٌ: إذا كانَ $PQRS$ متوازيَ أضلاعٍ، فإنَّ $\overline{QM} \cong \overline{SM}$, $\overline{PM} \cong \overline{RM}$

- **نظريةُ قُطرِ متوازي الأضلاعِ**

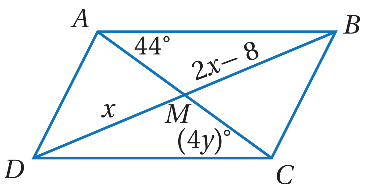


إذا كانَ الشكلُ الرباعيُّ متوازيَ أضلاعٍ، فإنَّ كلَّ قُطرٍ يقسمُهُ إلى مثلثَينِ متطابقَينِ.

مثالٌ: إذا كانَ $PQRS$ متوازيَ أضلاعٍ، فإنَّ $\Delta PQS \cong \Delta RSQ$

مثال 4

إذا كانَ $ABCD$ متوازيَ أضلاعٍ، فأجدُ قيمةَ كلٍّ مِنْ x وَ y



- أجدُ قيمةَ x

قُطرا متوازي الأضلاعِ ينصّفُ كلٌّ منهُما الآخَرَ	$\overline{DM} \cong \overline{BM}$
تعريفُ تطابقِ القطعِ المستقيمةِ	$DM = BM$
أعوّضُ	$x = 2x - 8$
أطرحُ $2x$ مِنْ طرفَيِ المعادلةِ	$-x = -8$
أقسمُ طرفَيِ المعادلةِ على -1	$x = 8$

- أجدُ قيمةَ y

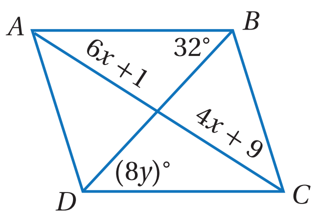
قُطرُ متوازي الأضلاعِ يقسمُهُ إلى مثلثَينِ متطابقَينِ	$\Delta DAC \cong \Delta BCA$
الزوايا المتناظرةُ في المثلثاتِ المتطابقةِ تكونُ متطابقةً	$\angle ACD \cong \angle CAB$
تعريفُ تطابقِ الزوايا	$m\angle ACD = m\angle CAB$
أعوّضُ	$(4y)^\circ = 44^\circ$
أكتبُ المعادلةَ مِنْ دونِ رمزِ الدرجةِ	$4y = 44$
أقسمُ طرفَيِ المعادلةِ على 4	$y = 11$

أفكّرُ

هَلْ يمكنُ إيجادُ قيمةِ y بطريقةٍ أُخرى؟

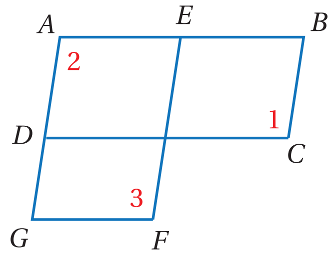
أتحققُ من فهمي:

إذا كانَ $ABCD$ متوازيَ أضلاعٍ، فأجدُ قيمةَ كلٍّ مِنْ x وَ y



يمكنُ استعمالُ خصائصِ متوازي الأضلاعِ لبرهنةِ علاقاتٍ في أشكالٍ هندسيةٍ مركّبةٍ.

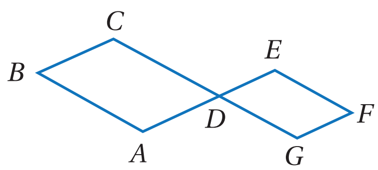
مثال 5



في الشكلِ المجاورِ، إذا كانَ $ABCD$ وَ $AEFG$ متوازيَيْ أضلاعٍ، فأثبتُ أنَّ $\angle 3 \cong \angle 1$ باستعمالِ البرهانِ ذي العمودَينِ.

العباراتُ	المبرّراتُ
1) $ABCD$ وَ $AEFG$ متوازيا أضلاع	1) معطًى.
2) $\angle 1 \cong \angle 2$	2) الزوايا المتقابلةُ في متوازي الأضلاعِ متطابقةٌ.
3) $\angle 2 \cong \angle 3$	3) الزوايا المتقابلةُ في متوازي الأضلاعِ متطابقةٌ.
4) $\angle 1 \cong \angle 3$	4) بِما أنَّ $\angle 2 \cong \angle 1$ وَ $\angle 2 \cong \angle 3$

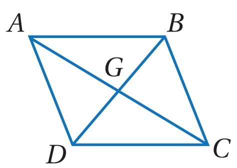
أتحققُ من فهمي:



في الشكلِ المجاورِ، إذا كانَ $ABCD$ وَ $GDEF$ متوازيَيْ أضلاعٍ، فأثبتُ أنَّ $\angle B \cong \angle F$ باستعمالِ البرهانِ ذي العمودَينِ.

أتدرب وأحل المسائل

أكملُ كلَّ جملةٍ ممّا يأتي في ما يتعلّقُ بِـ $\square ABCD$ وأبرّر إجابتي:



1) $\angle DAB \cong$ ....

2) $\angle ABD \cong$ ....

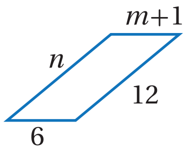
3) $\overline{AB} \parallel$ ....

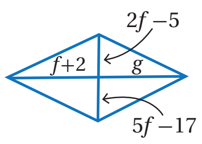
4) $\overline{BC} \parallel$ ....

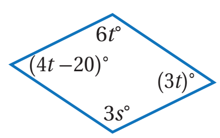
5) $\Delta ABD \cong$ ....

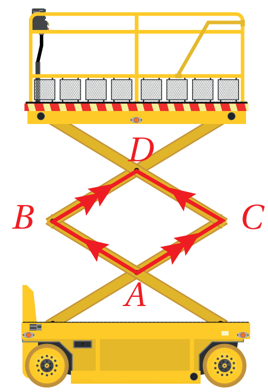
6) $\Delta ACD \cong$ ....

أجدُ قيمةَ كلِّ متغيّرٍ في كلٍّ مِنْ متوازياتِ الأضلاعِ الآتيةِ:

7) 

8) 

9) 



رافعةٌ: أستعملُ الشكلَ المجاورَ الّذي يبيّنُ رافعةَ المِقصِّ للإجابةِ عَنِ الأسئلةِ الآتيةِ:

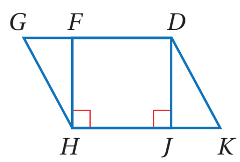
10 إذا كانَ $m\angle A = 120°$، فأجدُ $m\angle B$.

11 إذا قلَّ $m\angle A$، فَما تأثيرُ ذلكَ في $m\angle B$؟

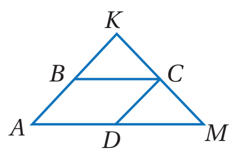
12 إذا قلَّ $m\angle A$، فَما تأثيرُ ذلكَ في طولِ $\overline{AD}$؟

13 إذا قلَّ $m\angle A$، فَما تأثيرُ ذلكَ في ارتفاعِ الرافعةِ؟

14 في الشكلِ الآتي، إذا كانَ $GDKH$ متوازيَ أضلاعٍ، فأستعملُ المعلوماتِ المعطاةَ على الشكلِ؛ لأثبتَ أنَّ $\Delta DJK \cong \Delta HFG$ باستعمالِ البرهانِ ذي العمودَينِ.



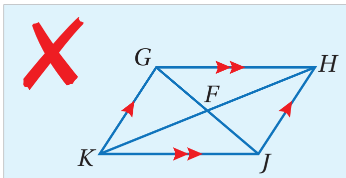
15 في الشكلِ الآتي، إذا كانَ $ABCD$ متوازيَ أضلاعٍ وَ $\overline{AK} \cong \overline{MK}$، فأثبتُ أنَّ $\angle BCD \cong \angle CMD$ باستعمالِ البرهانِ ذي العمودَينِ.



مهاراتُ التفكيرِ العُليا

16 **أكتشفُ الخطأَ:** أنظرُ الحلَّ الآتيَ، وأكتشفُ الخطأَ الواردَ فيه، وأصحّحُهُ.

بما أنَّ $GHJK$ متوازي أضلاعٍ، فإنَّ $\overline{GF} \cong \overline{FH}$



17 **تبريرٌ:** تمثّلُ المقاديرُ الجبريةُ أدناهُ أطوالَ أضلاعِ $\square MNPQ$. أجدُ محيطَ متوازي الأضلاعِ، وأبرّرُ إجابتي.

$MN = 4y + 5 \quad NP = x - 5 \quad QP = y + 14 \quad MQ = -2x + 37$

أتذكّرُ

المحيطُ يُساوي مجموعَ أطوالِ الأضلاعِ.

18 **أكتبُ** ما خصائصُ متوازي الأضلاعِ المتعلقةُ بزواياهُ وأضلاعِهِ وأقطارِهِ؟

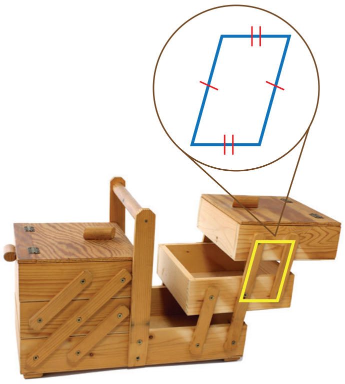
الدرسُ 3 تمييزُ متوازي الأضلاعِ

فكرةُ الدرسِ

أتعرّفُ الشروطَ الّتي تؤكّدُ أنَّ شكلًا رباعيًّا متوازي أضلاعٍ.

أستكشفُ

هَلْ تبقى رفوفُ الصُّندوقِ موازيةً لبعضِها بعضًا بغضِّ النظرِ عَنْ موقعها؟ أبرّرُ إجابتي.



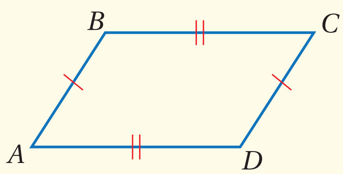
تعلّمْتُ في الدرسِ السّابقِ نظرياتٍ حولَ خصائصِ متوازي الأضلاعِ، وسأتعلّمُ في هذا الدرسِ عكسَ هذِهِ النظرياتِ، بحيثُ يمكنُ تحديدُ ما إذا كانَ الشكلُ الرباعيُّ متوازيَ أضلاعٍ أَمْ لا إذا كانَتْ أضلاعُهُ وزواياهُ وأقطارُهُ لَها خصائصُ معيَّنةٌ.

نظرياتٌ — **شروطُ متوازي الأضلاعِ (1)**

- **عكسُ نظريةِ الأضلاعِ المتقابلةِ في متوازي الأضلاعِ**

إذا كانَ كلُّ ضلعَينِ متقابلَينِ متطابقَينِ في الشكلِ الرباعيِّ، فإنَّ الشكلَ الرباعيَّ متوازي أضلاعٍ.

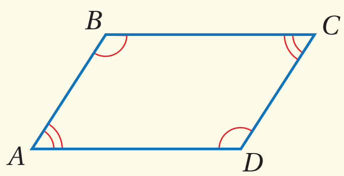
مثالٌ: إذا كانَ $\overline{AD} \cong \overline{BC}$, $\overline{DC} \cong \overline{AB}$ ، فإنَّ $ABCD$ متوازي أضلاعٍ.



- **عكسُ نظريةِ الزوايا المتقابلةِ في متوازي الأضلاعِ**

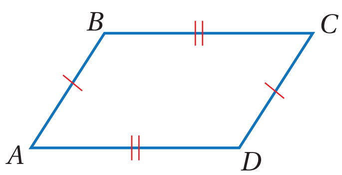
إذا كانَتْ كلُّ زاويتَينِ متقابلتَينِ متطابقتانِ في الشكلِ الرباعيِّ، فإنَّ الشكلَ الرباعيَّ متوازي أضلاعٍ.

مثالٌ: إذا كانَ $\angle D \cong \angle B$, $\angle C \cong \angle A$، فإنَّ الشكلَ الرباعيَّ $ABCD$ متوازي أضلاعٍ.

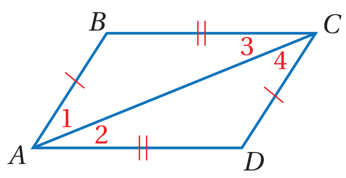


مثال 1: إثباتُ نظريةٍ

فـي الشكلِ المجاورِ، إذا كانَ $\overline{CD} \cong \overline{AB}$ و $\overline{AD} \cong \overline{BC}$ ، فأثبتُ أنَّ $ABCD$ متوازي أضلاعٍ باستعمالِ البرهانِ ذي العمودَينِ.



أخطّطُ للبرهانِ باتّباعِ الخطواتِ الآتيةِ:



الْخُطْوَةُ 1 أرسمُ القُطرَ $\overline{AC}$ ، لينتجَ ΔABC وَ ΔCDA

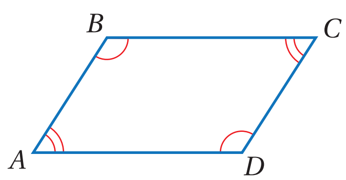
الْخُطْوَةُ 2 أســتعملُ حالةَ تطابقِ مثلثَينِ بثلاثةِ أضلاعٍ (SSS)؛ لأثبتَ أنَّ $\Delta ABC \cong \Delta CDA$

الْخُطْوَةُ 3 أستعملُ الزوايا المتبادلةَ داخليًّا؛ لأثبتَ أنَّ الأضلاعَ المتقابلةَ متوازيةٌ.

البرهانُ:

العباراتُ	المبرّراتُ
1) $\overline{BC} \cong \overline{DA}$ وَ $\overline{AB} \cong \overline{CD}$	1) معطًى.
2) $\overline{AC}$	2) ضلعٌ مشتركٌ.
3) $\Delta ABC \cong \Delta CDA$	3) SSS
4) $\angle 1 \cong \angle 4$ وَ $\angle 3 \cong \angle 2$	4) زوايا متناظرةٌ في مثلثَينِ متطابقَينِ.
5) $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ وَ $\overline{BC} \parallel \overline{DA}$	5) عكسُ نظريةِ الزاويتَينِ المتبادلتَينِ داخليًّا.
6) $ABCD$ متوازي أضلاعٍ	6) تعريفُ متوازي الأضلاعِ.

أتحققُ من فهمي:

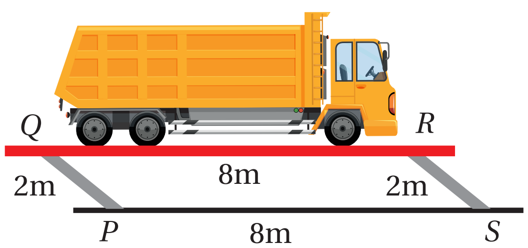


في الشكلِ المجاورِ، إذا كانَ $\angle A \cong \angle C, \angle B \cong \angle D$ فأثبتُ أنَّ $ABCD$ متوازي أضلاعٍ.

يمكنُ استعمالُ شروطِ متوازي الأضلاعِ لتوضيحِ علاقاتٍ مِنْ واقعِ الحياةِ.

مثال 2: منَ الحياةِ

رافعةٌ: يبيّنُ الشكلُ المجاورُ رافعةً للمركباتِ الثقيلةِ:



1 هَلِ الشكلُ الرباعيُّ $QRSP$ متوازي أضلاعٍ؟ أبرّرُ إجابتي.

بِما أنَّ كلَّ ضلعَينِ متقابلَينِ في الشكلِ الرباعيِّ $QRSP$ متطابقانِ، فإنَّهُ متوازي أضلاعٍ.

2 هَلِ الشاحنةُ موازيةٌ للأرضِ؟ أبرّرُ إجابتي.

بِما أنَّ $QRSP$ متوازي أضلاعٍ، فإنَّ $\overline{PS} \parallel \overline{QR}$، وبِما أنَّ $\overline{QR}$ يمثلُ المنصّةَ الّتي تستقرُّ عليها الشاحنةُ، وَ $\overline{PS}$ يقعُ على الأرضِ، فإنَّ الشاحنةَ موازيةٌ للأرضِ.

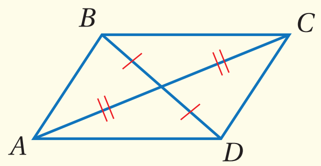
أتحققُ من فهمي:

3 ما أقصى ارتفاعٍ يمكنُ أنْ ترفعَ الرافعةُ الشاحنةَ إليهِ؟ أبرّرُ إجابتي.

نظرياتٌ — **شروطُ متوازي الأضلاعِ (2)**

• **عكسُ نظريةِ قُطرَيْ متوازي الأضلاعِ**

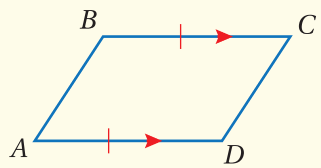
إذا كانَ قُطرا شكلٍ رباعيٍّ ينصّفُ كلٌّ منهُما الآخَرَ، فإنَّ الشكلَ الرباعيَّ متوازي أضلاعٍ.



مثالٌ: إذا كانَ $\overline{AC}$ وَ $\overline{BD}$ ينصّفُ كلٌّ منهُما الآخَرَ، فإنَّ $ABCD$ متوازي أضلاعٍ.

• **نظريةُ الأضلاعِ المتوازيةِ والمتطابقةِ**

إذا تــوازى وتطابقَ ضلعانِ متقابلانِ في شــكلٍ رباعيٍّ، فإنَّ الشــكلَ الرباعيَّ متوازي أضلاعٍ.

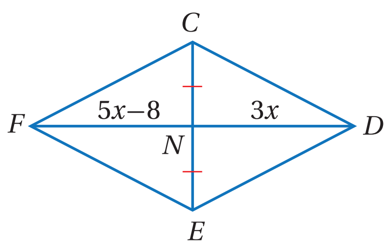


مثالٌ: إذا كانَ $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ وَ $\overline{AD} \cong \overline{BC}$ فإنَّ $ABCD$ متوازي أضلاعٍ.

يمكنُ استعمالُ شروطِ متوازي الأضلاعِ لإيجادِ القِيَمِ المجهولةِ الّتي تجعلُ الشكلَ الرباعيَّ متوازيَ أضلاعٍ.

مثال 3

أجدُ قيمةَ x الّتي تجعلُ الشكلَ الرباعيَّ $FCDE$ المجاورَ متوازيَ أضلاعٍ.



بنــاءً على عكسِ نظريةِ قُطرَيْ متوازي الأضلاعِ، فإنَّهُ إذا كانَ قُطرا شــكلٍ رباعيٍّ ينصّفُ كلٌّ منهُما الآخَرَ، فإنَّ الشكلَ الرباعيَّ متوازي أضلاعٍ، وبِما أنَّهُ معطًى في الشكلِ أنَّ $\overline{EN} \cong \overline{CN}$، أجدُ قيمةَ x الّتي تجعلُ $\overline{DN} \cong \overline{FN}$

تعريفُ تطابقِ القطعِ المستقيمةِ	$FN = DN$
أعوّضُ	$5x - 8 = 3x$
أطرحُ $3x$ مِنْ طرفَيِ المعادلةِ	$2x - 8 = 0$
أجمعُ 8 إلى طرفَيِ المعادلةِ	$2x = 8$
أقسمُ طرفَيِ المعادلةِ على 2	$x = 4$

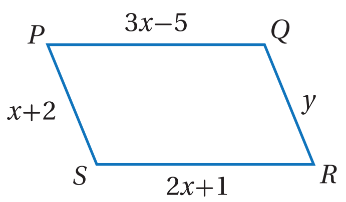
عندما $x = 4$ ، فإنَّ:

$$FN = 5(4) - 8 = 12 , \qquad DN = 3(4) = 12$$

إذنْ، عندما تكونُ $x = 4$، يكونُ الشكلُ الرباعيُّ $FCDE$ متوازيَ أضلاعٍ.

أتحققُ من فهمي:

أجدُ قيمتَيْ x وَ y اللّتَينِ تجعلانِ الشكلَ الرباعيَّ $PQRS$ المجاورَ متوازيَ أضلاعٍ.



ملخَّصُ المفهومِ: طرائقُ إثباتِ أنَّ الشكلَ الرباعيَّ متوازي أضلاعٍ

يكونُ الشكلُ الرباعيُّ متوازيَ أضلاعٍ إذا حقّقَ أيًّا مِنَ الشروطِ الآتيةِ:

1) إذا كانَ كلُّ ضلعَينِ متقابلَينِ فيهِ متوازيَينِ. (التعريفُ).

2) إذا كانَ كلُّ ضلعَينِ متقابلَينِ فيهِ متطابقَينِ. (عكسُ نظريةِ الأضلاعِ المتقابلةِ في متوازي الأضلاعِ).

3) إذا كانَتْ كلُّ زاويتَينِ متقابلتَينِ فيهِ متطابقتَينِ. (عكسُ نظريةِ الزوايا المتقابلةِ في متوازي الأضلاعِ).

4) إذا كانَ قُطراهُ ينصّفُ كلٌّ منهُما الآخَرَ. (عكسُ نظريةِ قُطرَيْ متوازي الأضلاعِ).

5) إذا كانَ فيهِ ضلعانِ متقابلانِ متوازيانِ ومتطابقانِ. (نظريةُ الأضلاعِ المتوازيةِ والمتطابقةِ).

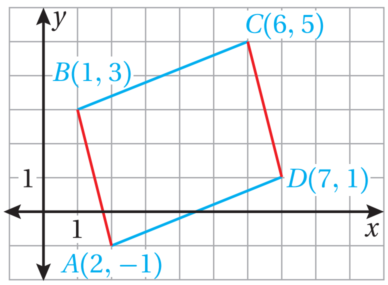
يمكنُ استعمالُ المَيلِ لتحديدِ ما إذا كانَ الشكلُ الرباعيُّ في المستوى الإحداثيِّ متوازيَ أضلاعٍ أَمْ لا.

مثال 4

أثبتُ أنَّ $A(2, -1), B(1, 3), C(6, 5), D(7, 1)$ تمثّلُ رؤوسَ متوازي أضلاعٍ.

يمكنُ إثباتُ أنَّ الأضلاعَ المتقابلةَ متوازيةٌ إذا كانَ لها المَيلُ نفسُهُ.

الخُطْوَةُ 1 أمثّلُ الشكلَ الرباعيَّ في المستوى الإحداثيِّ.



الخُطْوَةُ 2 أجدُ مَيلَ كلِّ ضلعٍ مِنْ أضلاعِ الشكلِ الرباعيِّ.

صيغةُ الميلِ $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

مَيلُ $\overline{AB}$: $m = \dfrac{3-(-1)}{1-2} = -4$

مَيلُ $\overline{CD}$: $m = \dfrac{1-5}{7-6} = -4$

مَيلُ $\overline{BC}$: $m = \dfrac{5-3}{6-1} = \dfrac{2}{5}$

مَيلُ $\overline{DA}$: $m = \dfrac{-1-1}{2-7} = \dfrac{2}{5}$

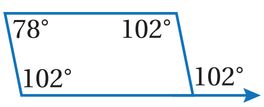
بِما أنَّ الضلعَينِ المتقابلَينِ $\overline{AB}$ وَ $\overline{CD}$ لهُما الميلُ نفسُهُ، إذنْ فهُما متوازيانِ، وبِما أنَّ الضلعَينِ المتقابلَينِ $\overline{DA}$ وَ $\overline{BC}$ لَهُما الميلُ نفسُهُ، إذنْ فَهُما متوازيانِ، وبِما أنَّ الأضلاعَ المتقابلةَ متوازيةٌ، إذنْ فالشكلُ الرباعيُّ $ABCD$ متوازي أضلاعٍ.

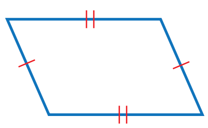
أتحققُ من فهمي:

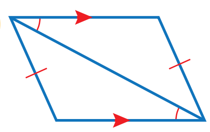
أثبتُ أنَّ $A(-3, 3), B(2, 5), C(5, 2), D(0, 0)$ تمثّلُ رؤوسَ متوازي أضلاعٍ.

أتدرب وأحل المسائل

أبيّنُ أنَّ كلَّ شكلٍ مِنَ الأشكالِ الرباعيةِ الآتيةِ متوازي أضلاعٍ، وأبرّر إجابتي:

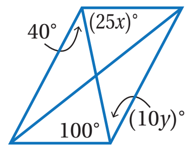
1) 

2) 

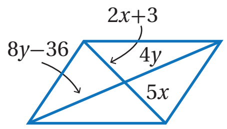
3) 

أجدُ قيمتَيْ x وَy اللّتَينِ تجعلانِ كلَّ شكلٍ رباعيٍّ ممّا يأتي متوازيَ أضلاعٍ:

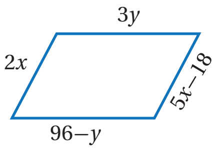
6



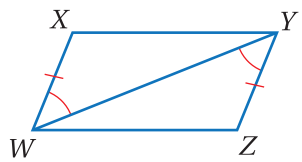
5



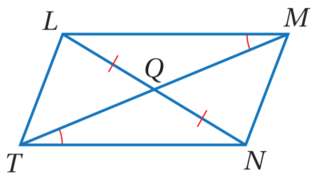
4



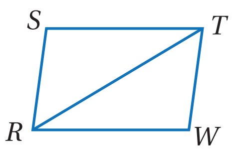
7 أستعملُ المعلوماتِ المعطاةَ في الشكلِ الآتي لكتابةِ برهانٍ سهميٍّ؛ لأثبتَ أنَّ الشكلَ الرباعيَّ $XYZW$ متوازي أضلاعٍ.



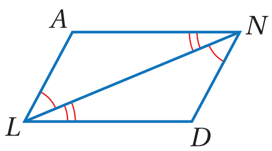
8 أستعملُ المعلوماتِ المعطاةَ في الشكلِ الآتي لكتابةِ برهانٍ سهميٍّ؛ لأثبتَ أنَّ الشكلَ الرباعيَّ $LMNT$ متوازي أضلاعٍ.



9 في الشكلِ الآتي، إذا كانَ $\triangle TRS \cong \triangle RTW$، فأثبتُ أنَّ $RSTW$ متوازي أضلاعٍ باستعمالِ البرهانِ ذي العمودَينِ.



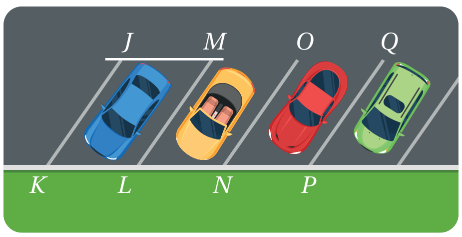
10 أستعملُ المعلوماتِ المعطاةَ في الشكلِ الآتي لكتابةِ برهانٍ ذي عمودَينِ؛ لأثبتَ أنَّ الشكلَ الرباعيَّ $ANDL$ متوازي أضلاعٍ.



معلومةٌ

يُعدُّ اصطفافُ السّيّاراتِ بطريقةٍ منتظمةٍ مِنَ المظاهرِ الحضاريةِ الّتي تعطي انطباعًا إيجابيًّا حولَ ثقافةِ المجتمعِ.

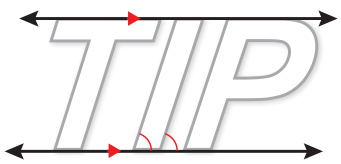
موقفُ سيّاراتٍ: يبيّنُ الشكلُ المجاورُ موقفًا للسيّاراتِ. إذا كانَ $m\angle JKL = 60°$ وَ $JK = LM = 7$ m وَ $KL = JM = 3$ m



11 هَلِ الجزءُ مِنَ الموقفِ $JKLM$ متوازي أضلاعٍ؟ أبرّرُ إجابتي.

12 أجدُ كلًّا مِنْ: $m\angle JML, m\angle KJM, m\angle KLM$

13 **حاسوبٌ:** تسمحُ معالِجاتُ نصوصٍ حاسوبيةٌ عدةٌ بكتابةِ الكلمةِ بالخطِّ العاديِّ أَوِ الخطِّ المائلِ. هَلْ حرفُ (I) متوازي أضلاعٍ؟ أبرّرُ إجابتي.



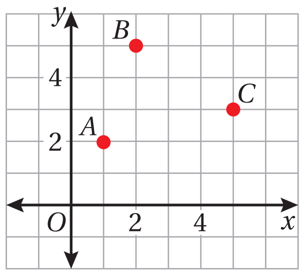
أمثّلُ في المستوى الإحداثيِّ الشكلَ الرباعيَّ المعطاةَ إحداثياتُ رؤوسِهِ في ما يأتي، وأحدّدُ ما إذا كانَ متوازيَ أضلاعٍ أَمْ لا، وأبرّر إجابتي:

14 $B(-6, -3), C(2, -3), E(4, 4), G(-4, 4)$

15 $Q(-3, -6), R(2, 2), S(-1, 6), T(-5, 2)$

مهاراتُ التفكيرِ العُليا

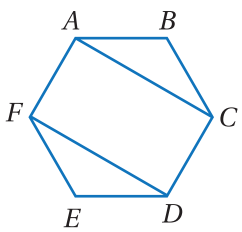
تبريرٌ: تمثلُ النقاطُ A, B, C في المستوى الإحداثيِّ المجاورِ رؤوسَ شكلٍ رباعيٍّ، أجدُ إحداثياتِ النقطةِ الرابعةِ في كلٍّ مِنَ الحالاتِ الآتيةِ، وأبرّر إجابتي:



16 النقطةُ D حيثُ $ABCD$ متوازي أضلاعٍ.

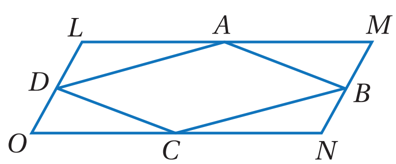
17 النقطةُ E حيثُ $ABEC$ متوازي أضلاعٍ.

18 **تبريرٌ:** أثبتُ أنَّ الشكلَ الرباعيَّ $FACD$ متوازي أضلاعٍ، علمًا بأنَّ $ABCDEF$ سداسيٌّ منتظمٌ. أبرّرُ إجابتي.



إرشادٌ
أبدأُ بإثباتِ أنَّ
$\Delta ABC \cong \Delta FED$

19 **تحدٍّ:** يبيّنُ الشكلُ المجاورُ متوازيَ الأضلاعِ $LMNO$، وتمثّلُ النقاطُ A, B, C, D منتصفاتِ أضلاعِهِ. أثبتُ أنَّ الشكلَ $ABCD$ متوازي أضلاعٍ.



20 **أكتبُ** كيفَ يمكنُ إثباتُ أنَّ شكلًا رباعيًّا يمثّلُ متوازيَ أضلاعٍ؟

الدرسُ 4 حالاتٌ خاصّةٌ مِنْ متوازي الأضلاعِ

فكرةُ الدرسِ

- أحدّدُ خصائصَ كلٍّ مِنَ: المستطيلِ، والمَعينِ، والمربعِ.
- أحدّدُ ما إذا كانَ متوازي الأضلاعِ مستطيلًا أَوْ مَعينًا أَوْ مربعًا.

المصطلحاتُ

المستطيلُ، المَعينُ، المربعُ

أستكشفُ

تتكوّنُ الرقعةُ الخاصّةُ بلعبةِ الشطرنجِ مِنْ 64 مربعًا ملوَّنًا. كيفَ يمكنُني إثباتُ أنَّ الرقعةَ نفسَها مربعةٌ؟

تعرفْتُ سابقًا خصائصَ متوازي الأضلاعِ المتعلقةَ بأضلاعِهِ وزواياهُ وأقطارِهِ، وسأتعرّفُ في هذا الدرسِ ثلاثةَ أنواعٍ خاصّةٍ مِنْ متوازي الأضلاعِ وَهِيَ: المستطيلُ، والمَعينُ، والمربعُ.

المستطيلُ

المستطيلُ (rectangle) هُوَ متوازي أضلاعٍ زواياهُ الأربعُ قوائمُ، وهذا يعني أنَّ لَهُ الخصائصَ الآتيةَ:

- زواياهُ الأربعُ قوائمُ.
- الأضلاعُ المتقابلةُ متوازيةٌ ومتطابقةٌ.
- الزوايا المتقابلةُ متطابقةٌ.
- الزوايا المتحالفةُ متكاملةٌ.
- قُطراهُ ينصّفُ كلٌّ منهُما الآخَرَ.
- كلُّ قُطرٍ مِنْ أقطارِ المستطيلِ يقسمُهُ إلى مثلثَينِ متطابقَينِ.

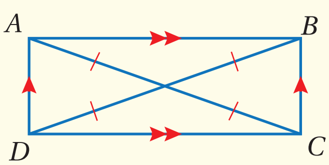
وتُضافُ إلى الخصائصِ السابقةِ خاصّيّةٌ أُخرى متعلّقةٌ بقُطرَيِ المستطيلِ موضَّحةٌ في النظريةِ الآتيةِ:

نظريةٌ — **قُطرا المستطيلِ**

- **نظريةُ قُطرَيِ المستطيلِ**

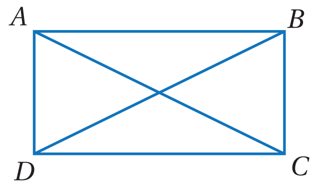
يكونُ متوازي الأضلاعِ مستطيلًا إذا وَفقطْ إذا كانَ قُطراهُ متطابقَينِ.

مثالٌ: يكونُ $\square ABCD$ مستطيلًا إذا وفقطْ إذا كانَ $\overline{AC} \cong \overline{BD}$



أداةُ الرّبطِ "إذا وفقطْ إذا" الّتي وردَتْ في نظريةِ قُطرَيِ المستطيلِ تعني أنَّ العبارةَ صحيحةٌ في الاتجاهَينِ؛ لذا، إذا كانَ قُطرا متوازي الأضلاعِ متطابقَينِ فإنَّهُ مستطيلٌ، وإذا كانَ متوازي الأضلاعِ مستطيلًا فإنَّ قُطرَيهِ متطابقانِ.

مثال 1: إثباتُ نظريةٍ



يبيّنُ الشكلُ المجاورُ المستطيلَ $ABCD$، أثبتُ أنَّ قُطرَيِ المستطيلِ $ABCD$ متطابقانِ، باستعمالِ البرهانِ ذي العمودَينِ.

أخطّطُ للبرهانِ باتّباعِ الخطواتِ الآتيةِ:

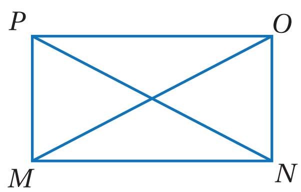
الخُطْوَةُ 1 أستعملُ حالةَ تطابقِ مثلثَينِ بضلعَينِ وزاويةٍ محصورةٍ (SAS)؛ لأثبتَ أنَّ $\triangle ADC \cong \triangle BCD$

الخُطْوَةُ 2 أستعملُ تطابقَ المثلثَينِ؛ لأثبتَ أنَّ $\overline{AC} \cong \overline{BD}$

البرهانُ:

العباراتُ	المبرّراتُ
1) $\overline{AD} \cong \overline{BC}$	1) ضلعانِ متقابلانِ في مستطيلٍ.
2) $\overline{DC}$	2) ضلعٌ مشتركٌ.
3) $\angle D \cong \angle C$	3) زوايا المستطيلِ قوائمُ.
4) $\triangle ADC \cong \triangle BCD$	4) SAS
5) $\overline{AC} \cong \overline{BD}$	5) ضلعانِ متناظرانِ في مثلثَينِ متطابقَينِ.

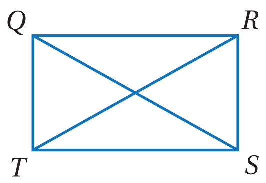
أتحققُ من فهمي:



يبيّنُ الشكلُ المجاورُ $\square PONM$، إذا كانَ $\overline{PN} \cong \overline{OM}$، فأثبتُ باستعمالِ البرهانِ ذي العمودَينِ أنَّ $PONM$ مستطيلٌ.

يمكنُ استعمالُ خصائصِ المستطيلِ لإيجادِ قِيَمٍ مجهولةٍ.

مثال 2

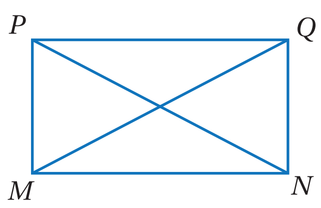


إذا كانَ $QRST$ مستطيلًا، وكانَ $QS = 6x + 14$ وَ $RT = 9x + 5$، فأجدُ قيمةَ المتغيّرِ x .

بِما أنَّ $QRST$ مستطيلٌ، فإنَّ قُطرَيهِ متطابقانِ، إذنْ أجدُ قيمةَ x الّتي تجعلُ $\overline{QS} \cong \overline{RT}$

قُطرا المستطيلِ متساويانِ في الطولِ	$QS = RT$
أعوّضُ	$9x + 5 = 6x + 14$
أطرحُ $6x$ مِنْ طرفَيِ المعادلةِ	$3x + 5 = 14$
أطرحُ 5 مِنْ طرفَيِ المعادلةِ	$3x = 9$
أقسمُ طرفَيِ المعادلةِ على 3	$x = 3$

أتحققُ من فهمي:

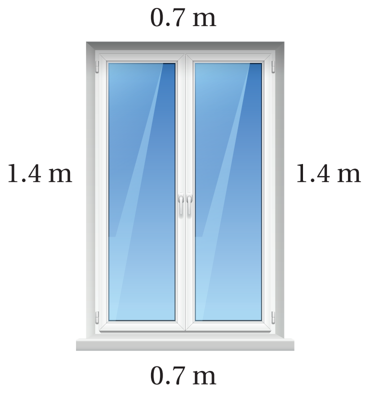


إذا كانَ $PQNM$ مستطيلًا، وكانَ $MQ = 2x + 11$ وَ $PN = 5x - 31$، فأجدُ قيمةَ المتغيّرِ x .

يمكنُ استعمالُ خصائصِ المستطيلِ لتوضيحِ علاقاتٍ مِنْ واقعِ الحياةِ.

مثال 3: منَ الحياةِ

نافذةٌ: يبيّنُ الشكلُ المجاورُ إطارَ نافذةٍ أبعادُها موضّحةٌ في الشكلِ.



1 هَلْ إطارُ النافذةِ على شكلِ مستطيلٍ؟ أبرّرُ إجابتي.

يظهرُ مِنَ الشكلِ أنَّ أضلاعَ الإطارِ المتقابلةَ لها الطولُ نفسُهُ؛ لذا فالإطارُ على شكلِ متوازي أضلاعٍ، ولكنْ لا يوجدُ ما يدلُّ على أنَّ الزوايا قوائمُ؛ لذا لا يمكنُ تحديدُ ما إذا كانَ الإطارُ على شكلِ مستطيلٍ أَمْ لا.

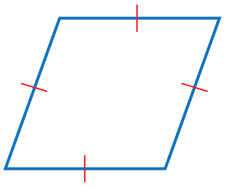
2 قاسَ تميمٌ طولَيْ قُطرَيِ الإطارِ، فوجدَ أنَّ طولَ أحدِهما 2.45 m وطولَ الآخَرِ 2.40 m ، فَهَلْ إطارُ النافذةِ على شكلِ مستطيلٍ؟ أبرّرُ إجابتي.

بالرجوعِ إلى نظريةِ قُطرَيِ المستطيلِ، فإنَّ الشكلَ الرباعيَّ يكونُ مستطيلًا إذا كانَ قُطراهُ متطابقَينِ، وبما أنَّ قُطرَيْ إطارِ النافذةِ لَيْسا متطابقَينِ؛ إذنْ فإطارُ النافذةِ ليسَ على شكلِ مستطيلٍ.

أتحققُ من فهمي:

3 أفترضُ أنَّ قُطرَيِ النافذةِ لَهُما الطولُ نفسُهُ، فَهَلْ إطارُها على شكلِ مستطيلٍ؟ أبرّرُ إجابتي.

المَعينُ

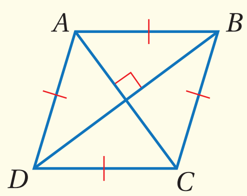


المَعينُ (rhombus) هُوَ متوازي أضلاعٍ أضلاعُهُ جميعُها متطابقةٌ.

للمَعينِ خصائصُ متوازي الأضلاعِ جميعُها، إضافةً إلى الخاصّيّتَينِ الموضَّحتَينِ في النظريتَينِ الآتيتَينِ:

نظرياتٌ — المَعينُ

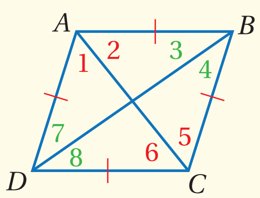
- **نظريةُ قُطرَيِ المَعينِ**



يكونُ متوازي الأضلاعِ مَعينًا إذا وَفقط إذا كانَ قُطراهُ متعامدَينِ.

مثالٌ: يكونُ $\square ABCD$ مَعينًا إذا وَفقطْ إذا كانَ $\overline{AC} \perp \overline{BD}$

- **نظريةُ الزوايا المتقابلةِ في المَعينِ**



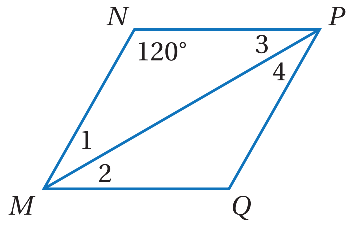
يكونُ متوازي الأضلاعِ مَعينًا إذا وَفقطْ إذا نَصَّفَ كلُّ قُطرٍ مِنْ قُطرَيهِ الزاويتَينِ المتقابلتَينِ اللّتَينِ يصلُ بَيْنَ رأسَيْهِما.

مثالٌ: يكونُ $\square ABCD$ مَعينًا إذا وَفقطْ إذا نصّفَ $\overline{AC}$ كلًّا مِنَ $\angle A$ وَ $\angle C$، وَنصَّفَ $\overline{BD}$ كلًّا مِنْ $\angle B$ وَ $\angle D$ ، وهذا يعني أنَّ:

$$\angle 1 \cong \angle 2, \angle 3 \cong \angle 4, \angle 5 \cong \angle 6, \angle 7 \cong \angle 8$$

يمكنُ استعمالُ خصائصِ المَعينِ لإيجادِ قِيَمٍ مجهولةٍ.

مثال 4



يبيّنُ الشكلُ المجاورُ المَعينَ *NPQM*. إذا كانَتْ $m\angle N = 120°$، فأجدُ قياساتِ الزوايا المرقّمةِ في الشكلِ.

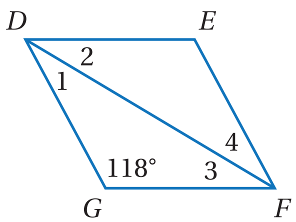
نظريةُ المثلثِ المتطابقِ الضلعَين	$m\angle 1 = m\angle 3$
مجموعُ زوايا المثلثِ	$m\angle 1 + m\angle 3 + 120° = 180°$
أعوّضُ	$2(m\angle 1) + 120° = 180°$
أطرحُ 120 مِنْ طرفَيِ المعادلةِ	$2(m\angle 1) = 60°$
أقسمُ طرفَيِ المعادلةِ على 2	$m\angle 1 = 30°$

ومنهُ فإنَّ $m\angle 1 = m\angle 3 = 30°$.

وبحسبِ **نظريةِ الزوايا المتقابلةِ في المَعينِ** فإنَّ $m\angle 1 = m\angle 2$ و $m\angle 3 = m\angle 4$، وهذا يعني أنَّ:

$$m\angle 1 = m\angle 2 = m\angle 3 = m\angle 4 = 30°$$

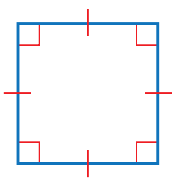
أتحققُ من فهمي:



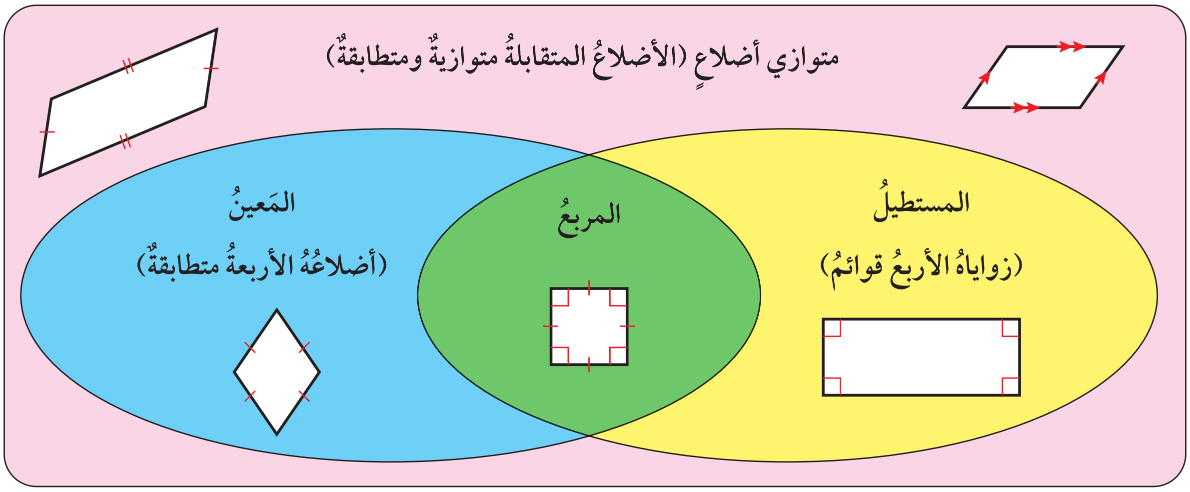
يبيّنُ الشكلُ المجاورُ المَعينَ *DEFG*. إذا كانَتْ $m\angle G = 118$، فأجدُ قياساتِ الزوايا المرقّمةِ في الشكلِ.

المربعُ

المربــعُ (square) هوَ متوازي أضلاعٍ أضلاعُهُ جميعُها متطابقــةٌ، وزواياهُ الأربعُ قوائمُ. وبما أنَّ المستطيلَ متوازي أضلاعٍ زواياهُ الأربعُ قوائمُ، والمَعينَ متوازي أضلاعٍ أضلاعُهُ الأربعةُ متطابقةٌ، فإنَّ المربعَ مستطيلٌ؛ لأنَّ زواياهُ الأربعَ قوائمُ، وهوَ أيضًا مَعينٌ؛ لأنَّ أضلاعَهُ الأربعةَ متطابقةٌ، وهذا يعني أنَّ جميعَ خصائصِ متوازي الأضلاعِ، والمستطيلِ، والمَعينِ تنطبقُ على المربعِ.



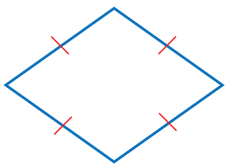
ويوضحُ شكلُ فِنْ الآتي العلاقةَ بَيْنَ متوازي الأضلاعِ، والمَعينِ، والمستطيلِ، والمربعِ.



مثال 5

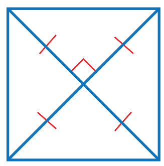
أحدّدُ ما إذا كانَ متوازي الأضلاعِ في كلٍّ ممّا يأتي مستطيلًا أَمْ مَعينًا أَمْ مربعًا، وأبرّر إجابتي:

1



بِمـا أنَّ الأضـلاعَ الأربعـةَ لمتـوازي الأضلاعِ المبيّنِ في الشكلِ متطابقةٌ، فإنَّهُ يمثّلُ مَعينًا.

2



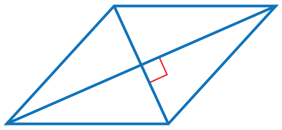
بِمـا أنَّ قُطـرَيْ متوازي الأضـلاعِ المبيّنِ في الشـكلِ متطابقـانِ، فإنَّ متـوازيَ الأضلاعِ مسـتطيلٌ، وبِما أنَّ القُطرَينِ متعامدانِ، فإنَّ متـوازيَ الأضلاعِ مَعينٌ أيضًا، ومنهُ فإنَّ متوازيَ الأضلاعِ المبيَّنَ في الشكلِ مربعٌ.

أتحققُ من فهمي:

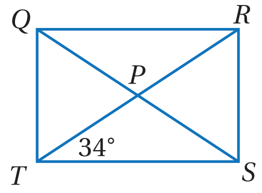
أحدّدُ ما إذا كانَ متوازي الأضلاعِ في كلٍّ ممّا يأتي مستطيلًا أَمْ مَعينًا أَمْ مربعًا، وأبرّر إجابتي:

3

4



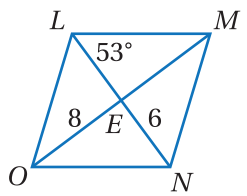
أتدرب وأحل المسائل



يبيّنُ الشكلُ المجاورُ المستطيلَ $QRST$. إذا كانَ قُطراهُ يتقاطعانِ في النقطةِ P وَ $m\angle PTS = 34°$ وَ $QS = 10$، فأجدُ كلًّا ممّا يأتي:

1 $m\angle QTR$ 2 $m\angle QRT$ 3 $m\angle SRT$

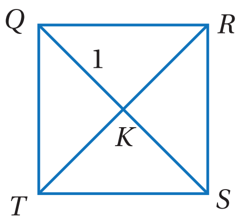
4 QP 5 RT 6 RP



يبيّنُ الشكلُ المجاورُ المَعينَ $LMNO$. إذا كانَ قُطراهُ يتقاطعانِ في النقطةِ E وَ $m\angle NLM = 53°$ وَ $OE = 8$ وَ $NE = 6$، فأجدُ كلًّا ممّا يأتي:

7 $m\angle OLN$ 8 $m\angle LEO$ 9 $m\angle LON$

10 OM 11 LE 12 LN

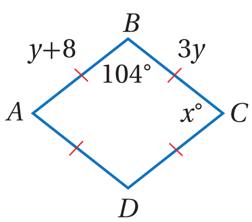


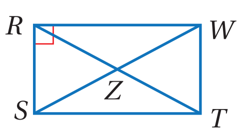
يبيّنُ الشكلُ المجاورُ المربعَ $QRST$. إذا كانَ قُطراهُ يتقاطعانِ في النقطةِ K وَ $QK = 1$، فأجدُ كلًّا ممّا يأتي:

13 $m\angle RKS$ 14 $m\angle QTK$ 15 $m\angle QRK$

16 KS 17 QS 18 RT

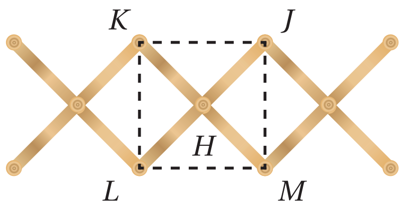
أحدّدُ ما إذا كانَ متوازي الأضلاعِ في كلٍّ ممّا يأتي مستطيلًا أَمْ مَعينًا أَمْ مربعًا، وأبرّر إجابتي، ثُمَّ أجدُ قيمةَ كلٍّ مِنْ x وَ y:

19


20


$RT = 4x + 10,$
$SW = 5x - 20$

علاقةُ ملابسَ: يبيّنُ الشكلُ المجاورُ علاقةَ ملابسَ خشبيةً. إذا كانَ $KJML$ متوازيَ أضلاعٍ، وكانَ $\overline{LJ} \perp \overline{KM}$، وَ $m\angle K = 90°$، فأجيبُ عَنْ كلٍّ ممّا يأتي:

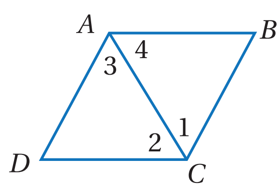


21 هَلْ متوازي الأضلاعِ $KJML$ مستطيلٌ أَمْ مَعينٌ أَمْ مربعٌ؟ أبرّرُ إجابتي.

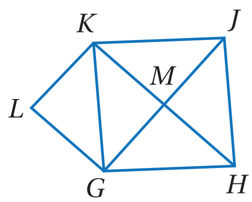
22 إذا كانَ $KJ = 20$ cm، فأجدُ KM وَ JL، وأبرّر إجابتي.

إرشادٌ
أبدأُ بإثباتِ أنَّ
$\Delta ABC \cong \Delta CDA$

23 في الشكلِ الآتي، إذا كانَ $ADCB$ متوازيَ أضلاعٍ، وكانَ $\overline{AC}$ ينصّفُ كلًّا مِنَ $\angle A$ وَ $\angle C$ فأثبتُ أنَّ $ABCD$ مَعينٌ، باستعمالِ البرهانِ ذي العمودَينِ.

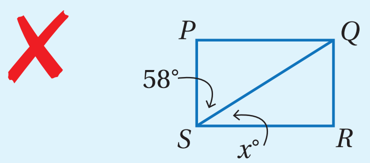


24 في الشكلِ الآتي، إذا كانَ $GHJK$ متوازيَ أضلاعٍ، وكانَ $\Delta LGK \cong \Delta MJK$، فأثبتُ أنَّ $GHJK$ مَعينٌ، باستعمالِ البرهانِ السهميِّ.



مهاراتُ التفكيرِ العُليا

25 **أكتشفُ الخطأَ:** أنظرُ الحلَّ الآتِيَ، وأكتشفُ الخطأَ الواردَ فيهِ، وأصحّحُهُ، علمًا بأنَّ $PQRS$ مستطيلٌ.



$m\angle QSP = m\angle QSR$
$= 58°$

26 **تبريرٌ:** هَلِ المَعيناتُ جميعُها متشابهةٌ؟ أبرّرُ إجابتي.

27 **أكتبُ** كيفَ أميّزُ ما إذا كانَ متوازي الأضلاعِ مستطيلًا أَمْ مَعينًا أَمْ مربعًا؟

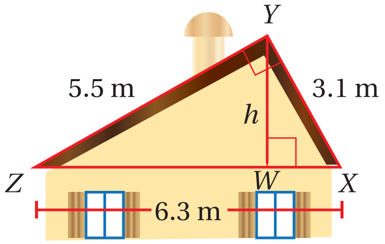
الدرسُ 5 تشابهُ المثلثاتِ

فكرةُ الدرسِ

أحدّدُ المثلثاتِ المتشابهةَ، باستعمالِ حالاتِ التشابهِ AA وَ SSS وَ SAS

أستكشفُ

يبيّنُ الشكلُ المجاورُ الواجهةَ الأماميةَ لسطحِ منزلٍ، كيفَ يمكنُني معرفةُ الارتفاعِ (h)؟

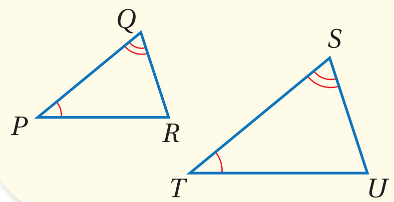


تعلّمْتُ سابقًا أنَّ المضلّعاتِ المتشابهةَ هِيَ مضلّعاتٌ زواياها المتناظرةُ متطابقةٌ، وأطوالُ أضلاعِها المتناظرةِ متناسبةٌ، وتُعَدُّ المثلثاتُ حالةً خاصّةً مِنَ المضلّعاتِ. وتوجدُ مسلّماتٌ ونظرياتٌ لإثباتِ تشابهِ المثلّثاتِ.

مسلّمةٌ **التشابهُ بزاويتَينِ (AA)**

إذا طابقَتْ زاويتانِ في مثلثٍ زاويتَينِ في مثلثٍ آخَرَ، فإنَّ المثلثَينِ متشابهانِ.

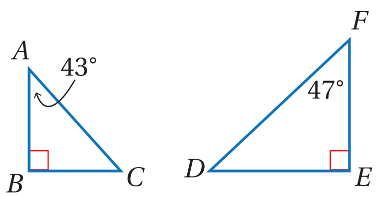
مثالٌ: إذا كانَتْ $\angle P \cong \angle T$ و $\angle Q \cong \angle S$ فإنَّ $\Delta PQR \sim \Delta TSU$



يمكنُ استعمالُ مسلّمةِ (AA) لتحديدِ ما إذا كانَ مثلثانِ متشابهَينِ أمْ لا.

مثال 1 **أحدّدُ ما إذا كانَ كلُّ مثلثَينِ ممّا يأتي متشابهَينِ أمْ لا، وإذا كانا كذلكَ، فأكتبُ عبارةَ التشابهِ، وأبرّرُ إجابتي.**

1



$\angle B \cong \angle E$؛ لأنَّهُما زاويتانِ قائمتانِ.

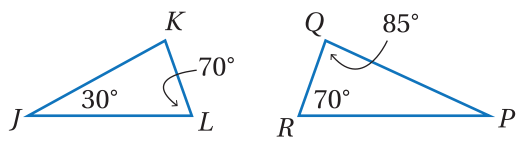
باستعمالِ مجموعِ قياساتِ زوايا المثلثِ يكونُ:

$m\angle C = 180° - (90° + 43°) = 47°$

وبما أنَّ $m\angle F = 47°$ فإنَّ $\angle C \cong \angle F$

إذنْ $\Delta ABC \sim \Delta DFE$ وفق المسلّمةِ (AA).

2



$\angle L \cong \angle R$؛ لأنَّ كِلا الزاويتَينِ قياسُهُما 70°

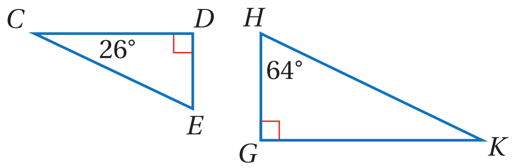
باستعمالِ مجموعِ قياساتِ زوايا المثلثِ يكونُ:

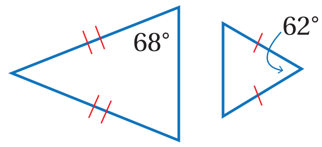
$m\angle K = 180° - (30° + 70°) = 80°$

$m\angle P = 180° - (85° + 70°) = 25°$

وبما أنَّهُ يوجدُ زوجٌ واحدٌ فقطْ مِنَ الزوايا المتطابقةِ، إذنْ ΔJKL وَ ΔPQR لَيْسا متشابهَينِ.

أتحققُ من فهمي:

3 

4 

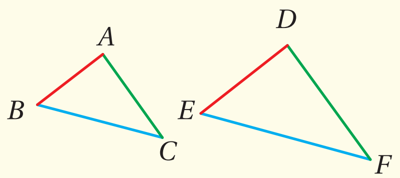
في ما يأتي طريقتانِ أُخرَيانِ لتحديدِ ما إذا كانَ مثلثانِ متشابهَينِ أَمْ لا:

نظرياتٌ — تشابهُ المثلثاتِ

- **التشابهُ بثلاثةِ أضلاعٍ (SSS)**

إذا كانَتِ الأضلاعُ المتناظرةُ لمثلثَينِ متناسبةً، فإنَّ المثلثَينِ متشابهانِ.

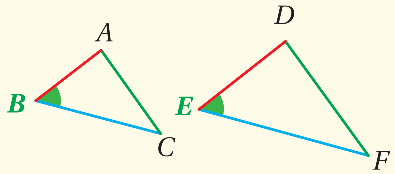
مثالٌ: إذا كانَ $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$ ، فإنَّ $\Delta ABC \sim \Delta DEF$



- **التشابهُ بضلعَينِ وزاويةٍ محصورةٍ (SAS)**

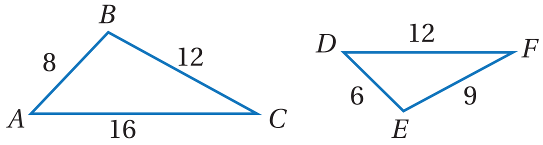
إذا كانَ طولا ضلعَينِ في مثلثٍ متناسبَينِ مَعَ طولَي الضلعَينِ المناظرَينِ لَهُما في مثلثٍ آخَرَ، وكانَتِ الزاويتانِ المحصورتانِ بينَهُما متطابقتَينِ، فإنَّ المثلثَينِ متشابهانِ.

مثالٌ: إذا كانَ $\frac{BC}{EF} = \frac{AB}{DE}$ وَ $\angle E \cong \angle B$ فإنَّ $\Delta ABC \sim \Delta DEF$



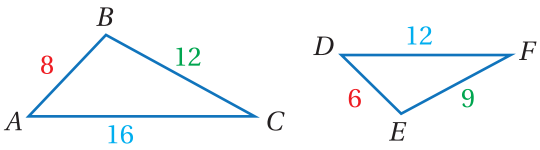
يمكنُ استعمالُ نظريَّتَيْ (SSS) وَ (SAS) لتحديدِ ما إذا كانَ مثلثانِ متشابهَينِ أَمْ لا.

مثال 2 أحدّدُ ما إذا كانَ كلُّ مثلثَينِ ممّا يأتي متشابهَينِ أَمْ لا، وإذا كانا كذلكَ، فأكتبُ عبارةَ التشابهِ، وأبرّر إجابتي.

1 

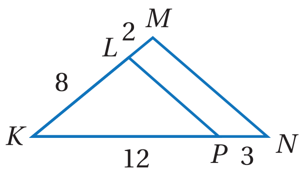
أستعملُ أطوالَ الأضلاعِ لتمييزِ الأضلاعِ المتقابلةِ، ثُمَّ أجدُ النسبةَ بَيْنَ طولِ كلِّ زوجٍ مِنْ أزواجِ الأضلاعِ المتقابلةِ في المثلثَينِ.

الضلعانِ المتبقّيانِ	أطولُ ضلعَينِ	أقصرُ ضلعَينِ
$\frac{BC}{EF} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$	$\frac{CA}{FD} = \frac{16}{12} = \frac{4}{3}$	$\frac{AB}{DE} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$

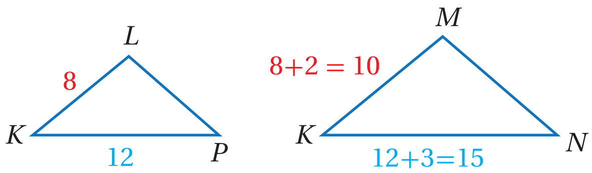


بِما أنَّ النِّسبَ جميعَها متساويةٌ، إذنْ $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ وفقَ نظريةِ التشابهِ (SSS).

2



بِما أنَّ $\angle K$ مشـــتركةٌ بَيْنَ المثلثَيْنِ، إذنْ أجدُ النسبةَ بَيْنَ طولَيْ زوجَيِ الأضلاعِ المتقابلةِ اللّذَينِ يحصرانِ $\angle K$ في المثلثَينِ.

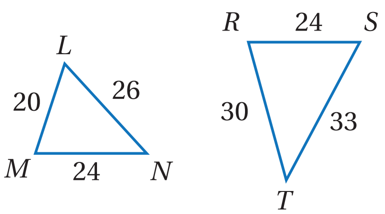


أطولُ ضلعَينِ	أقصرُ ضلعَينِ
$\frac{KP}{KN} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$	$\frac{KL}{KM} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$

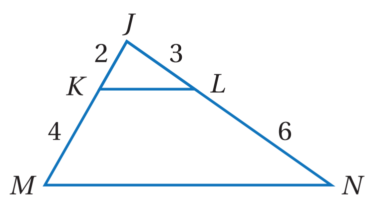
بِما أنَّ طولَيِ الضلعَينِ اللّذَينِ يحصرانِ $\angle K$ في $\triangle KLP$ متناســـبانِ مَعَ طولَيِ الضلعَينِ المناظرَينِ لَهُما في $\triangle KMN$، إذنْ $\triangle KLP \sim \triangle KMN$ وفقَ نظريةِ التشابهِ (SAS).

أتحققُ من فهمي:

3

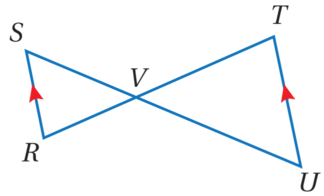


4



يمكنُني استعمالُ مسلّمةِ التشابهِ ونظرياتُهُ في إثباتِ تشابهِ مثلثَينِ.

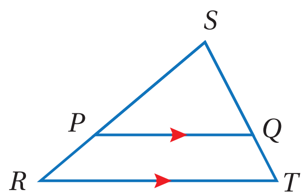
مثال 3



أستعملُ المعلوماتِ المعطاةَ في الشــكلِ المجاورِ، لأثبتَ أنَّ $\Delta SVR \sim \Delta UVT$ باستعمالِ البرهانِ ذي العمودَينِ.

العباراتُ	المبرّراتُ
1) $\angle SVR \cong \angle UVT$	1) زاويتانِ متقابلتانِ في الرأسِ.
2) $\overline{SR} \parallel \overline{UT}$	2) معطًى.
3) $\angle S \cong \angle U$	3) زاويتانِ متبادلتانِ داخليًّا.
4) $\Delta SVR \sim \Delta UVT$	4) مسلّمةُ التشابهِ (AA).

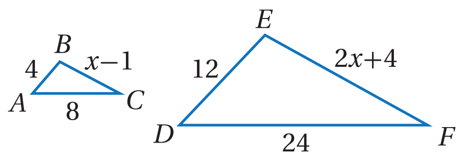
أتحققُ من فهمي:



أســتعملُ المعلوماتِ المعطاةَ على الشكلِ المجاورِ، لأثبتَ أنَّ $\Delta SPQ \sim \Delta SRT$ باستعمالِ البرهانِ السهميِّ.

يمكنُني استعمالُ تشابهِ المثلثاتِ في إيجادِ قياساتٍ مجهولةٍ.

مثال 4



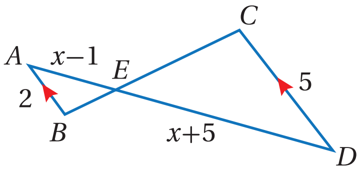
أجدُ قيمةَ x الّتي تجعلُ $\Delta ABC \sim \Delta DEF$

الْخُطْوَةُ 1 أجدُ قيمةَ x الّتي تجعلُ أطوالَ الأضلاعِ المتناظرةِ متناسبةً:

أكتبُ التناسبَ	$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$
أعوّضُ	$\frac{4}{12} = \frac{x-1}{2x+4}$
بالضربِ التبادليِّ	$4(2x+4) = 12(x-1)$
خاصّيّةُ التوزيعِ	$8x + 16 = 12x - 12$
أطرحُ $12x$ مِنْ طرفَيِ المعادلةِ	$-4x + 16 = -12$
أطرحُ 16 مِنْ طرفَيِ المعادلةِ	$-4x = -28$
أقسمُ طرفَيِ المعادلةِ على -4	$x = 7$

أتحققُ من فهمي:

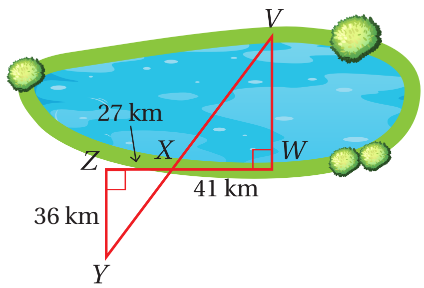
أجدُ قيمةَ x الّتي تجعلُ $\Delta ABE \sim \Delta DCE$



يمكنُ استعمالُ تشابهِ المثلثاتِ في بعضِ التطبيقاتِ الحياتيةِ.

مثال 5: منَ الحياةِ

بحيرةٌ: يريدُ مسّاحٌ قياسَ عرضِ بحيرةٍ باستعمالِ تقنيةِ المسحِ المبيَّنةِ في الشكلِ المجاورِ. أجدُ عرضَ البحيرةِ (VW).



الْخُطْوَةُ 1 أثبتُ أنَّ $\Delta YZX \sim \Delta VWX$

العباراتُ	المبرّراتُ
1) $\angle ZXY \cong \angle VXW$	1) زاويتانِ متقابلتانِ في الرأسِ.
2) $\angle Z \cong \angle W$	2) زاويتانِ قائمتانِ.
3) $\Delta YZX \sim \Delta VWX$	3) مسلّمةُ التشابهِ (AA).

الْخُطْوَةُ 2 أجدُ عرضَ البحيرةِ (VW)

بما أنَّ $\Delta YZX \sim \Delta VWX$، فيمكنُ استعمالُ التناسبِ بَيْنَ أطوالِ الأضلاعِ المتناظرةِ لإيجادِ عرضِ البحيرةِ.

أفترضُ أنَّ $VW = x$

أكتبُ التناسبَ $\frac{YZ}{VW} = \frac{ZX}{WX}$

أعوّضُ $\frac{36}{x} = \frac{27}{41}$

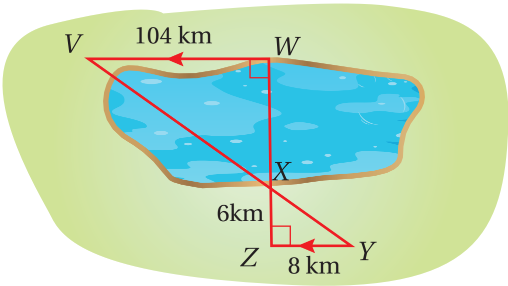
بالضربِ التبادليِّ $27x = 1476$

أستعملُ الآلةَ الحاسبةَ $x \approx 54.7$

إذنْ، عرضُ البحيرةِ يُساوي 54.7 km تقريبًا.

أتحققُ من فهمي:

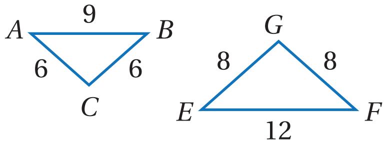
يبيّنُ الشـــكلُ المجاورُ طريقةً أُخرى لقياسِ عرضِ البحيراتِ، أجدُ عرضَ البحيرةِ **WX** فيهِ.



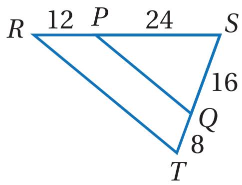
أتدرب وأحل المسائل

أحـــدّدُ ما إذا كانَ كلُّ مثلثَينِ ممّا يأتي متشـــابهَينِ أَمْ لا، وإذا كانا كذلكَ، فأكتبُ عبارةَ التشابهِ، وأبرّر إجابتي.

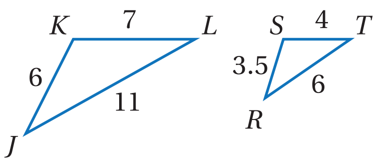
1



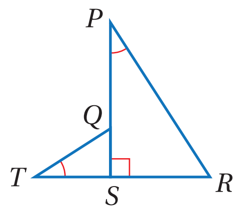
2



3

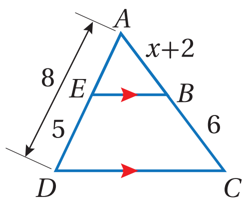


4

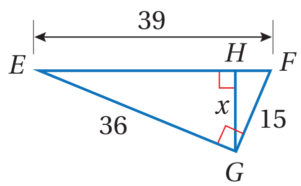


أثبتُ أنَّ كلَّ مثلثَينِ ممّا يأتي متشابهانِ، ثُمَّ أجدُ الطولَ المطلوبَ:

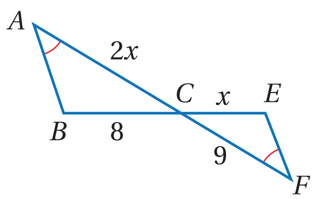
5 AB



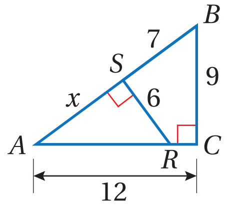
6 HG



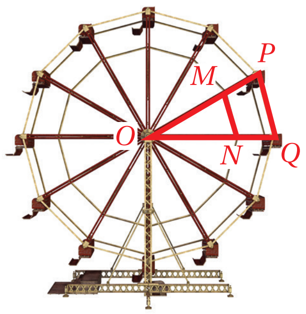
7 AC



8 AB



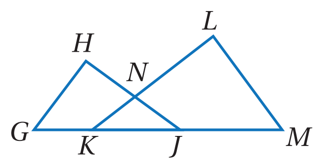
9 **عجلةٌ دوّارةٌ:** يبيّنُ الشكلُ المجاورُ عجلةً دوّارةً، فإذا علمْتُ أنَّ $MP = NQ = 1.5$ m، وأنَّ $OM = ON = 3$ m، فأبيّنُ ما إذا كانَ $\Delta OPQ \sim \Delta OMN$ أَمْ لا.



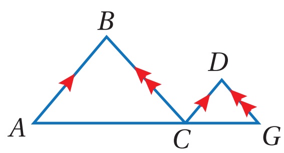
إرشادٌ

يمكنُني إعادةُ رسمِ الشكلِ وفصلِ المثلّثاتِ المتداخلةِ؛ لتسهيلِ الإثباتِ.

10 في الشكلِ الآتي، إذا كانَ ΔKNJ متطابقَ الضلعَينِ وَ $\angle N$ زاويةَ رأسِهِ، وَكانَ $\angle L \cong \angle H$، فأثبتُ أنَّ $\Delta GHJ \sim \Delta MLK$، باستعمالِ البرهانِ ذي العمودَينِ.

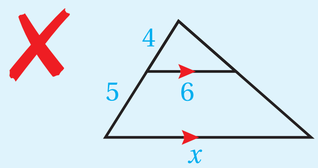


11 أستعملُ المعلوماتِ المعطاةَ على الشكلِ الآتي لأثبتَ أنَّ $AB \times CG = CD \times AC$، باستعمالِ البرهانِ السهميِّ.



مهاراتُ التفكيرِ العُليا

12 **أكتشفُ الخطأَ:** أنظرُ الحلَّ الآتيَ، وأكتشفُ الخطأَ في إيجادِ قيمةِ x، وأصحّحُهُ.

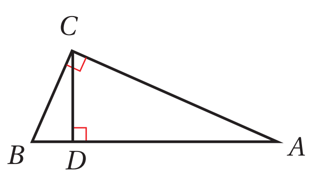


$$\frac{4}{5} = \frac{6}{x}$$

$$4x = 30$$

$$x = 7.5$$

13 **تحدٍّ:** أحدّدُ في الشكلِ المجاورِ ثلاثةَ مثلثاتٍ متشابهةٍ، ثُمَّ أكتبُ ثلاثَ جُمَلِ تشابهٍ بَيْنَ المثلثاتِ، وأثبتُها جميعَها.



14 **أكتبُ** كيفَ أحدّدُ ما إذا كانَ مثلثانِ متشابهَينِ أَمْ لا؟

الدرسُ 6 التمدّدُ

فكرةُ الدرسِ

أرسمُ صورةً لمضلعٍ ناتجةً عَنْ تمدّدٍ في المستوى الإحداثيِّ.

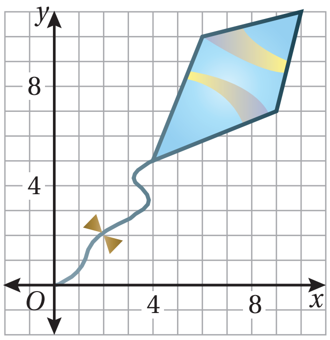
المصطلحاتُ

التمدّدُ، مركزُ التمدّدِ، معاملُ التمدّدِ، التكبيرُ ، التصغيرُ.

أستكشفُ

صمّمَتْ رزانُ الطائرةَ الورقيةَ المجاورةَ على المستوى الإحداثيِّ، وتريدُ إعادةَ رسمِ هذِهِ الطائرةِ تحتَ تأثيرِ تكبيرٍ مركزُهُ نقطةُ الأصلِ ومعاملُهُ 2.5

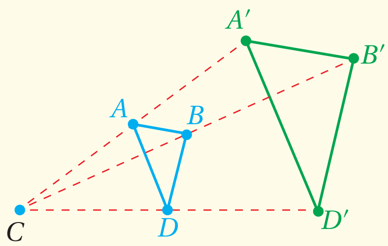
ما إحداثياتُ الطائرةِ بعدَ التكبيرِ؟



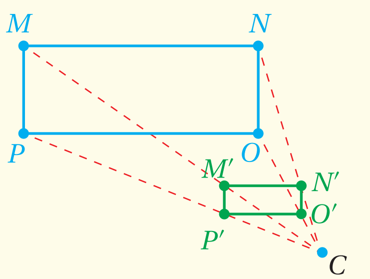
التمدّدُ (dilation) هوَ تحويلٌ هندسيٌّ يكبّرُ الشكلَ أَوْ يصغّرُهُ مِنْ نقطةٍ ثابتةٍ C تُسمّى **مركزَ التمدّدِ** (center of dilation) وبنسبةٍ محدّدةٍ تُسمّى **معاملَ التمدّدِ** (scale factor of dilation) وقيمتُهُ k ، وهوَ نسبةُ أحدِ أطوالِ الصورةِ إلى الطولِ المناظرِ لَهُ في الشكلِ الأصليِّ.

مفهومٌ أساسيٌّ — التمدّدُ

- إذا كانَ التمدّدُ الّذي مركزُهُ C ومعاملُهُ هوَ العددُ الموجبُ k حيثُ $k \neq 1$ وَ $k > 1$ فإنَّ التمدّدَ **تكبيرٌ** (enlargement).

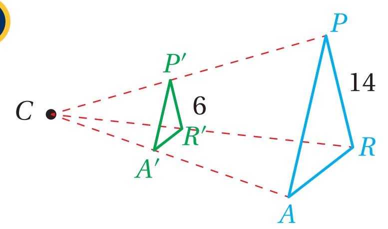


- إذا كانَ التمدّدُ الّذي مركزُهُ C ومعاملُهُ هوَ العددُ الموجبُ k حيثُ $k \neq 1$ وَ $0 < k < 1$ فإنَّ التمدّدَ **تصغيرٌ** (reduction).



مثال 1 أجدُ معاملَ التمدّدِ في كلٍّ ممّا يأتي، ثُمَّ أحدّدُ ما إذا كانَ التمدّدُ تكبيرًا أَمْ تصغيرًا:

1

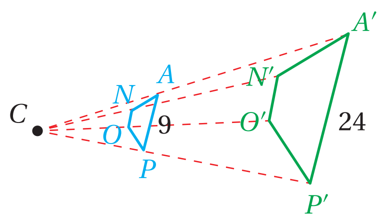


لإيجادِ معاملِ التمدّدِ أجدُ نسبةَ طولِ أحدِ أطوالِ الصورةِ إلى الطولِ المناظرِ لَهُ في الشكلِ الأصليِّ.

$$\frac{P'R'}{PR} = \frac{6}{14} = \frac{3}{7}$$

إذنْ، معاملُ التمدّدِ $k = \frac{3}{7}$ ، وبما أنَّ $0 < k < 1$ فإنَّ التمدّدَ يُعَدُّ تصغيرًا.

2



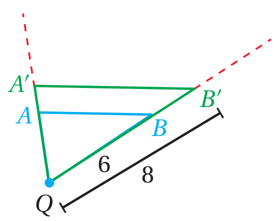
لإيجادِ معاملِ التمدّدِ أجدُ نسبةَ طولِ أحدِ أطوالِ الصورةِ إلى الطولِ المناظرِ لَهُ في الشكلِ الأصليِّ.

$$\frac{A'P'}{AP} = \frac{24}{9} = \frac{8}{3}$$

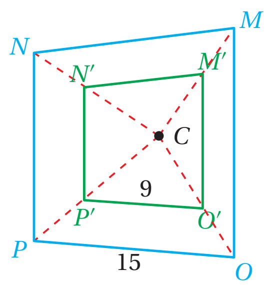
إذنْ، معاملُ التمدّدِ $k = \frac{8}{3}$ ، وبما أنَّ $k > 1$ فإنَّ التمدّدَ يُعَدُّ تكبيرًا.

أتحقّقُ من فهمي:

3



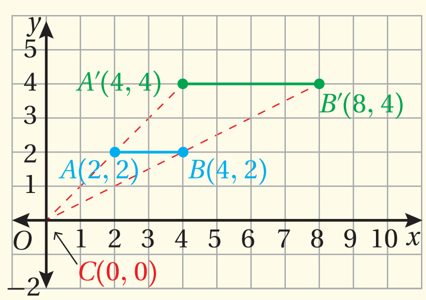
4



يمكنُ إيجادُ صورةِ النقطةِ $P(x, y)$ في المستوى الإحداثيِّ الناتجةِ عَنْ تمدّدٍ مركزُهُ نقطةُ الأصلِ ومعاملُهُ k بضربِ إحداثيَّي النقطةِ P بمعاملِ التمدّدِ k.

مفهومٌ أساسيٌّ **التمدّدُ في المستوى الإحداثيِّ ومركزُهُ نقطةُ الأصلِ**

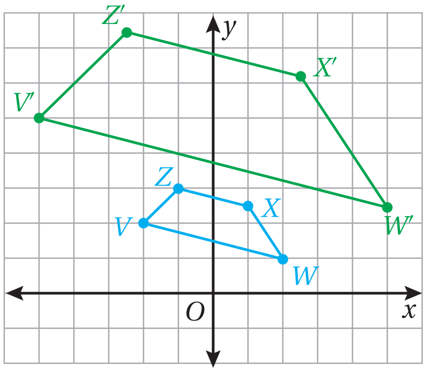
- **بالكلماتِ:** لإيجادِ إحداثياتِ الصورةِ الناتجةِ عَنْ تمدّدٍ مركزُهُ نقطةُ الأصلِ، أضربُ الإحداثيَّينِ x وَy لكلِّ نقطةٍ في الشكلِ الأصليِّ في معاملِ التمدّدِ k .
- **بالرموزِ:** $(x, y) \rightarrow (kx, ky)$



مثال 2

1 إحداثياتُ رؤوسِ الشكلِ الرباعيِّ $VZXW$ هِيَ: $V(-2, 2), Z(-1, 3), X(1, 2.5), W(2, 1)$. أمثّلُ بيانيًّا $VZXW$ وصورتَهُ الناتجةَ عَنْ تمدّدٍ مركزُهُ نقطةُ الأصلِ، ومعاملُهُ 2.5

الْخُطْوَةُ 1 أضربُ الإحداثيَّينِ x وَ y لكلِّ رأسٍ في معاملِ التمدّدِ 2.5

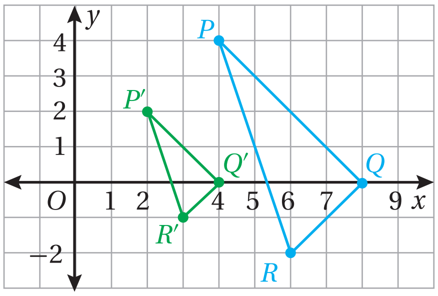


الصورةُ		الشكلُ الأصليُّ
$(2.5x, 2.5y)$	$\rightarrow$	(x, y)
$V'(-5, 5)$	$\rightarrow$	$V(-2, 2)$
$Z'(-2.5, 7.5)$	$\rightarrow$	$Z(-1, 3)$
$X'(2.5, 6.25)$	$\rightarrow$	$X(1, 2.5)$
$W'(5, 2.5)$	$\rightarrow$	$W(2, 1)$

الْخُطْوَةُ 2 أمثّلُ بيانيًّا $VZXW$ وصورتَهُ $V'Z'X'W'$

2 إحداثياتُ رؤوسِ ΔPQR هِيَ: $P(4, 4), Q(8, 0), R(6, -2)$. أمثّلُ بيانيًّا ΔPQR وصورتَهُ الناتجةَ عَنْ تمدّدٍ مركزُهُ نقطةُ الأصلِ، ومعاملُهُ $\frac{1}{2}$

الْخُطْوَةُ 1 أضربُ الإحداثيَّينِ x وَ y لكلِّ رأسٍ في معاملِ التمدّدِ $\frac{1}{2}$



الصورةُ		الشكلُ الأصليُّ
$(\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}y)$	$\rightarrow$	(x, y)
$P'(2, 2)$	$\rightarrow$	$P(4, 4)$
$Q'(4, 0)$	$\rightarrow$	$Q(8, 0)$
$R'(3, -1)$	$\rightarrow$	$Q(6, -2)$

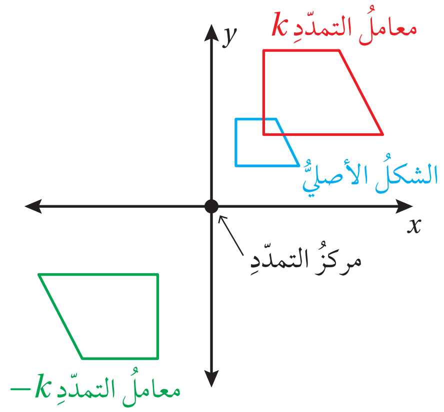
الْخُطْوَةُ 2 أمثّلُ بيانيًّا ΔPQR وصورتَهُ $\Delta P'Q'R'$

أتحققُ من فهمي:

3 إحداثيـاتُ رؤوسِ ΔABC هِيَ: $A(2,1), B(4, 1), C(4, -1)$. أمثّلُ بيانيًّا ΔABC وصورتَهُ الناتجةَ عَنْ تمدّدٍ مركزُهُ نقطةُ الأصلِ، ومعاملُهُ 1.5

4 إحداثياتُ رؤوسِ الشكلِ الرباعيِّ $KLMN$ هِيَ: $K(-3, 6), L(0, 6), M(3, 3), N(-3, -3)$. أمثّلُ بيانيًّا $KLMN$ وصورتَهُ الناتجةَ عَنْ تمدّدٍ مركزُهُ نقطةُ الأصلِ، ومعاملُهُ $\frac{1}{3}$

إرشادٌ: أستعملُ أوراقَ المربعاتِ الموجودةَ في نهايةِ كتابِ التمارينِ.



تعلّمْتُ في المثالِ السابقِ كيفَ أجدُ صورةَ شكلٍ في المستوى الإحداثيِّ تحتَ تأثيرِ تمدّدٍ مركزُهُ نقطةُ الأصلِ ومعاملُهُ موجِبٌ $(k > 0)$، ويمكنُ أيضًا إيجادُ صورةِ شكلٍ في المستوى الإحداثيِّ تحتَ تأثيرِ تمدّدٍ مركزُهُ نقطةُ الأصلِ ومعاملُهُ سالبٌ $(k < 0)$ باستعمالِ القاعدةِ نفسِها.

إنَّ تمدّدَ الشكلِ في المستوى الإحداثيِّ تحتَ تأثيرِ معاملِ تمدّدٍ قيمتُهُ $(-k)$ حيثُ k عددٌ موجِبٌ ومركزُهُ نقطةُ الأصلِ، هوَ نفسُهُ تمدّدُ الشكلِ تحتَ تأثيرِ تمدّدٍ معاملُهُ k متبوعًا بدورانٍ مقدارُهُ $180°$

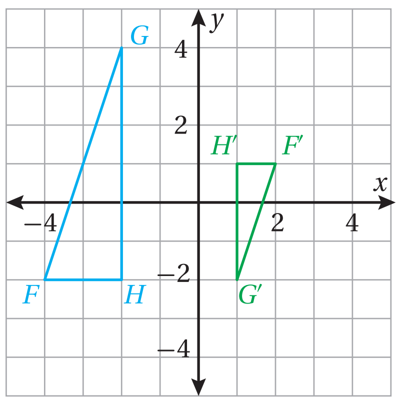
مثال 3

إحداثياتُ رؤوسِ ΔFGH هِيَ: $F(-4, -2), G(-2, 4), H(-2, -2)$. أمثّلُ بيانيًّا ΔFGH وصورتَهُ الناتجةَ عَنْ تمدّدٍ مركزُهُ نقطةُ الأصلِ، ومعاملُهُ $-\frac{1}{2}$

الْخُطْوَةُ 1 أضربُ الإحداثيّينِ x وَ y لكلِّ رأسٍ في معاملِ التمدّدِ $-\frac{1}{2}$

الشكلُ الأصليُّ		الصورةُ
(x, y)	$\rightarrow$	$(-\frac{1}{2}x, -\frac{1}{2}y)$
$F(-4, -2)$	$\rightarrow$	$F'(2, 1)$
$G(-2, 4)$	$\rightarrow$	$G'(1, -2)$
$H(-2, -2)$	$\rightarrow$	$H'(1, 1)$

الْخُطْوَةُ 2 أمثّلُ بيانيًّا ΔFGH وصورتَهُ $\Delta F'G'H'$



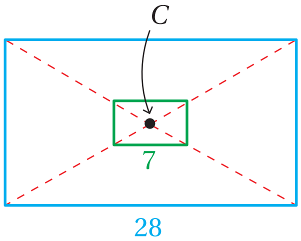
أتحققُ من فهمي:

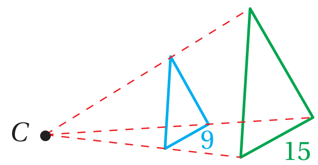
إحداثياتُ رؤوسِ ΔPQR هِيَ: $P(1, 2), Q(3, 1), R(1, -3)$. أمثّلُ بيانيًّا ΔPQR وصورتَهُ الناتجةَ عَنْ تمددٍ مركزُهُ نقطةُ الأصلِ، ومعاملُهُ -2

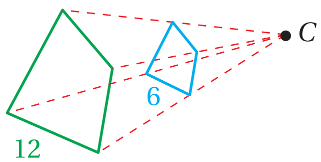
إرشادٌ: أستعملُ أوراقَ المربعاتِ الموجودةَ في نهايةِ كتابِ التمارينِ.

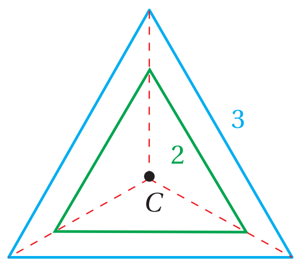
أتدرب وأحل المسائل

إذا كانَ الشكلُ باللّونِ الأخضرِ صورةً للشكلِ باللّونِ الأزرقِ تحتَ تأثيرِ تمدّدٍ مركزُهُ C، فأجدُ معاملَ التمدّدِ في كلٍّ ممّا يأتي، ثُمَّ أحدّدُ ما إذا كانَ التمدّدُ تكبيرًا أَمْ تصغيرًا، وأجدُ قيمةَ المتغيّرِ:

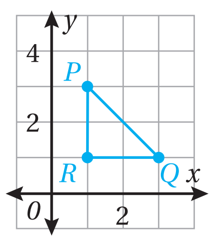
1 

2 

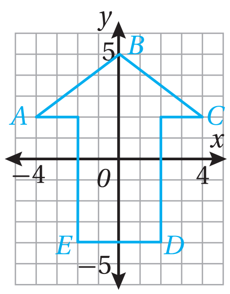
3 

4 

أنسخُ كلَّ مضلعٍ ممّا يأتي على ورقةِ مربعاتٍ، ثُمَّ أرسمُ صورةً لَهُ تحتَ تأثيرِ تمدّدٍ مركزُهُ نقطةُ الأصلِ، باستعمالِ معاملِ التمدّدِ المعطى أسفلَهُ:

5 

معاملُ التمدّدِ 1.5

6 

معاملُ التمدّدِ 0.5

أمثّلُ المضلعَ المعطاةَ إحداثياتُ رؤوسِهِ بيانيًّا، ثُمَّ أمثّلُ صورتَهُ الناتجةَ عَنْ تمدّدٍ مركزُهُ نقطةُ الأصلِ ومعاملُهُ العددُ k المحدّدُ في كلٍّ مِنَ المسائلِ الآتيةِ:

7 $B(-5, -10), C(-10, 15), D(0, 5);\ k = \frac{1}{5}$

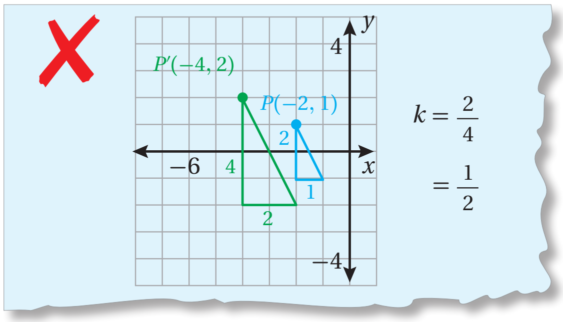
8 $L(0, 0), M(-4, 1), N(-3, -6);\ k = -4$

9 $W(8, -2), X(6, 0), Y(-6, 4), Z(-2, 2);\ k = -\frac{1}{2}$

10 $X(-1, 2), Y(2, 1), Z(-1, -3);\ k = \frac{7}{2}$

مهاراتُ التفكيرِ العُليا

11 **أكتشفُ الخطأَ:** في الحلِّ الآتي، أوجدَ سميرٌ معاملَ التمدّدِ الّذي يجعلُ المثلثَ الأخضرَ صورةً للمثلثِ الأزرقِ تحتَ تأثيرِ تمدّدٍ مركزُهُ نقطةُ الأصلِ. أكتشفُ الخطأَ في حلِّهِ، وأصحّحُهُ.



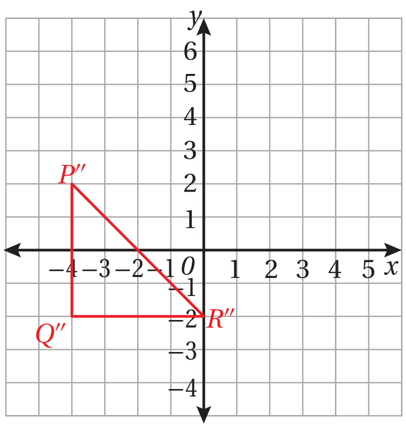
$k = \frac{2}{4}$

$= \frac{1}{2}$

12 **تحدٍّ:** المثلثُ المبيّنُ في الشكلِ الآتي هوَ صورةٌ لمثلثٍ تحتَ تأثيرِ تحويلَينِ هندسيَّينِ: تمدُّدٌ معاملُهُ 2 ومركزُهُ نقطةُ الأصلِ، ثُمَّ انعكاسٌ حولَ المحورِ y. أجدُ إحداثياتِ رؤوسِ المثلثِ الأصليِّ، وأبرّر خطواتِ الحلِّ.

إرشادٌ

لإيجادِ إحداثياتِ الشكلِ الأصليِّ، أجري الانعكاسَ أوّلًا حولَ المحورِ y، ثُمَّ التمدّدَ.



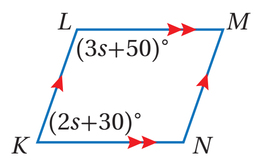
13 **مسألةٌ مفتوحةٌ:** أرسمُ مضلعًا في المستوى الإحداثيِّ، ثُمَّ أرسمُ تكبيرًا وتصغيرًا باختيارِ معاملٍ ومركزِ تمدّدٍ مناسبَينِ.

14 **أكتبُ** كيفَ أجدُ صورةً لمضلعٍ في المستوى الإحداثيِّ تحتَ تأثيرِ تمدّدٍ مركزُهُ نقطةُ الأصلِ ومعاملُهُ k؟

اختبارُ نهايةِ الوحدةِ

أختارُ رمزَ الإجابةِ الصحيحةِ لكلٍّ ممّا يأتي:

1 في $\square LMNK$ المجاورِ، ما قيمةُ s؟



a) 5 b) 20

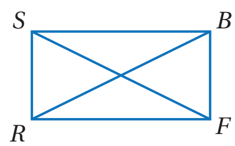
c) 40 d) 70

2 تمثّلُ النقاطُ $(8, 2), (1, -6), (-2, 2)$ رؤوسَ متوازي أضلاعٍ. أيُّ النقاطِ الآتيةِ تمثّلُ الرأسَ الرابعَ للمتوازي؟

a) $(5, 6)$ b) $(14, 3)$

c) $(11, -6)$ d) $(8, -8)$

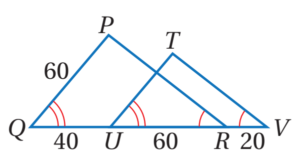
3 يبيّنُ الشكلُ المجاورُ المستطيلَ $RSBF$، إذا كانَ $SF = 2x+15$ وَ $RB = 5x-12$، فإنَّ طولَ قُطرِ المستطيلِ يُساوي:



a) 9 b) 1

c) 18 d) 33

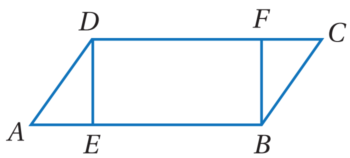
4 ما طولُ $\overline{TU}$ في الشكلِ المجاورِ؟



a) 36 b) 90

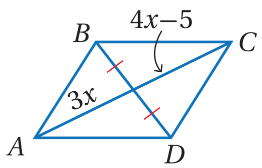
c) 40 d) 48

5 في الشكلِ الآتي، إذا كانَ $DFBE$ متوازيَ أضلاعٍ، وكانَ $AE = CF$، فأثبتُ أنَّ $ADCB$ متوازي أضلاعٍ باستعمالِ البرهانِ ذي العمودَينِ.

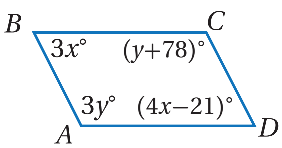


أجدُ قيمتَيْ x وَ y اللّتَينِ تجعلانِ كلَّ شكلٍ رباعيٍّ ممّا يأتي متوازيَ أضلاعٍ:

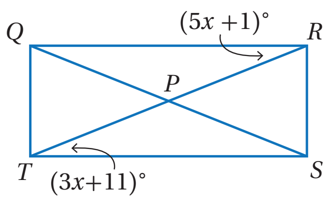
6



7

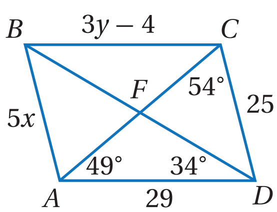


يبيّنُ الشكلُ المجاورُ المستطيلَ $QRST$. أجدُ كلًّا ممّا يأتي:



8 x **9** $m\angle RPS$

أستعملُ $\square ABCD$ المجاورَ لأجدَ كلًّا ممّا يأتي:

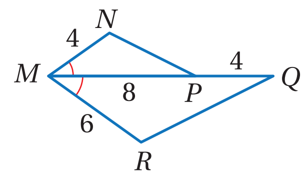


10 $m\angle AFD$ **11** $m\angle BCF$

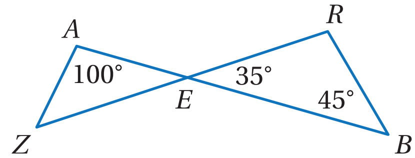
12 y **13** x

أحدّدُ ما إذا كانَ كلُّ مثلثَينِ ممّا يأتي متشابهَينِ أَمْ لا، وإذا كانا كذلكَ فأكتبُ عبارةَ التشابهِ، وأبرّر إجابتي:

14

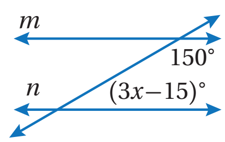


15

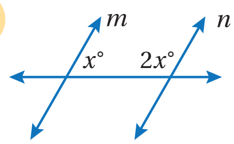


أجدُ قيمةَ x التي تجعلُ $m \parallel n$ في كلٍّ ممّا يأتي:

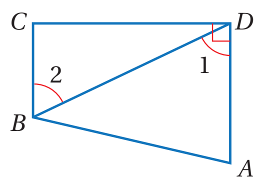
16



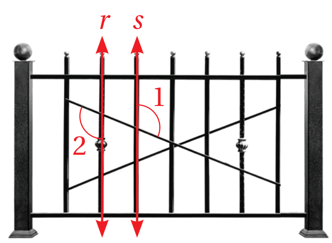
17



18 أستعملُ المعلوماتِ المعطاةَ في الشكلِ الآتي لأثبتَ أنَّ $\overline{CD} \perp \overline{BC}$ باستعمالِ البرهانِ السهميِّ.

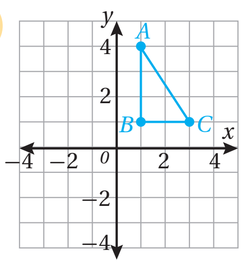


19 **سياجٌ:** يبيّنُ الشكلُ الآتي سياجًا مكوّنًا مِنْ قطعٍ حديديةٍ مرتّبةٍ باتجاهاتٍ مختلفةٍ. إذا افترضْتُ أنَّ $\angle 2 \cong \angle 1$، فهَلِ المستقيمانِ r وَ s متوازيانِ؟ أبرّر إجابتي.



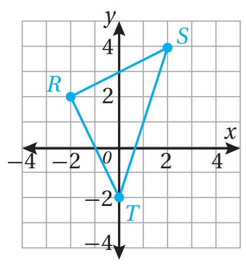
أنسخُ كلَّ مضلعٍ ممّا يأتي على ورقةِ مربعاتٍ، ثُمَّ أرسمُ صورةً لَهُ تحتَ تأثيرِ تمدّدٍ مركزُهُ نقطةُ الأصلِ، باستعمالِ معاملِ التمدّدِ المعطى أسفلَهُ:

20



معاملُ التمدّدِ -3

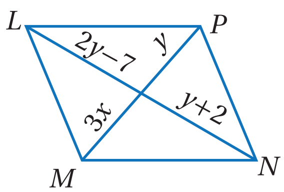
21



معاملُ التمدّدِ 1.5

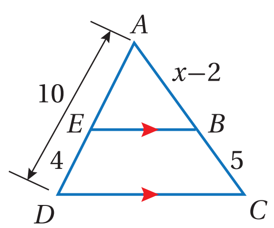
تدريبٌ على الاختباراتِ الدّوليّةِ

22 قيمةُ x التي تجعلُ الشكلَ الرباعيَّ $MLPN$ متوازيَ أضلاعٍ هِيَ:



a) 1 **b)** 3 **c)** 9 **d)** 27

23 قيمةُ x في الشكلِ المجاورِ هِيَ:



a) 9.5 **b)** 5

c) 4 **d)** 6.5

الوحدةُ 8

الأشكالُ ثلاثيةُ الأبعادِ

ما أهميَّةُ هذهِ الوحدةِ؟

تُعَدُّ الهندسةُ ثلاثيةُ الأبعادِ واحدةً مِنْ أكثرِ فروعِ الرّياضياتِ استعمالًا في التطبيقاتِ العلميةِ والحياتيةِ، وقَدِ استعملَها العلماءُ لحسابِ حجمِ الكرةِ الأرضيةِ ومساحةِ سطحِها، ويستعملُها المهندسونَ لتصميمِ المباني الجميلةِ.

تعلّمتُ سابِقًا:

✓ خواصَّ الأشكالِ ثنائيةِ الأبعادِ.

✓ إيجادَ المساحةِ الكلّيّةِ والحجومِ للأشكالِ ثلاثيةِ الأبعادِ.

✓ حسابَ مساحةِ الدائرةِ ومحيطِها.

سأتعلّمُ في هذهِ الوحدةِ:

- رسمَ أشكالٍ ثلاثيةِ الأبعادِ باستعمالِ الرسمِ المتساوي ورسمِ المَساقطِ.
- تحديدَ الشكلِ الناتجِ مِنْ تقاطعِ المجسّمِ مَعَ مستوًى، وعددِ مستوياتِ التماثلِ للمجسّماتِ.
- إيجادَ مساحةِ سطحِ الكرةِ وحجمِها.

مشروعُ الوحدةِ: الأشكالُ ثلاثيةُ الأبعادِ

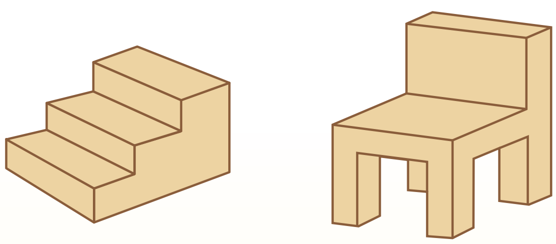
أستعدُّ ومجموعتي لتنفيذِ مشروعِيَ الخاصِّ الّذي سنستعملُ فيهِ ما سنتعلّمُهُ في هذِهِ الوَحدةِ حولَ رسمِ الأشكالِ ثلاثيةِ الأبعادِ باستعمالِ الرسمِ المتساوي لإنشاءِ مجسّمٍ ورسمِ مساقطِهِ.

الموادُّ والأدواتُ:

- قطعُ بوليسترين.
- لاصقٌ.
- أوراقٌ منقّطةٌ متساويةُ القياسِ.

خُطواتُ تنفيذِ المشروعِ:

1. أختارُ أحدَ المجسّمَينِ الآتيَينِ، وأحدّدُ قياساتِهِ ثُمَّ أرسمُهُ باستعمالِ الرّسمِ المتساوي.



2. أبني المجسّمَ الّذي صمّمْتُهُ باستعمالِ قطعِ البوليسترينِ واللّاصقِ.
3. أرسمُ المساقطَ: العُلويَّ، والأماميَّ، والجانبيَّ، للمجسّمِ الّذي صمّمْتُهُ على ورقةٍ منقّطةٍ متساويةِ القياسِ.
4. أبني 3 تصاميمَ إضافيةٍ للمجسّمِ الّذي اخترْتُهُ.
5. أقطعُ كلَّ مجسّمٍ صمّمْتُهُ قَطعًا مختلفًا، ثُمَّ أصِفُ الشكلَ الهندسيَّ الناتجَ مِنَ القطعِ، ويمكنُني تلوينُ جهةِ القطعِ لتسهيلِ وصفِهِ.
6. أرسمُ كلَّ قطعٍ على ورقةِ مربعاتٍ.
7. أجدُ حجمَ المجسّمِ الّذي اخترتُهُ، وأجدُ مساحةَ سطحِهِ الكلّيّةَ.
8. أُعِدُّ عرضًا تقديميًّا يتضمّنُ صورًا أَوْ مقطعًا مرئيًّا (فيديو) يوضّحُ خطواتِ عَملي في المشروعِ، والمساقطَ والمقاطعَ الّتي رسمْتُها.

عرضُ النتائجِ:

- أعرضُ المجسّماتِ الّتي صمّمْتُها أمامَ طلبةِ صفّي، وأوضّحُ أهمّيّتَها وعلاقتَها بما تعلّمْتُهُ في الوَحدةِ.
- أقدّمُ العرضَ التقديميَّ، وأتحدّثُ بالتفصيلِ عَنْ خطواتِ المشروعِ والنتائجِ الّتي توصّلْتُ إلَيْها.

الدرسُ 1 رسمُ الأشكالِ ثلاثيةِ الأبعادِ

فكرةُ الدرسِ

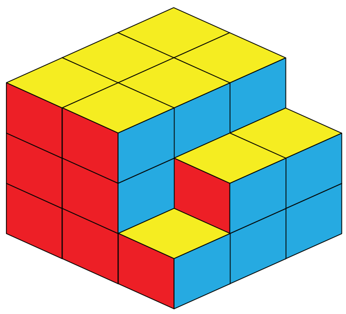
أرسمُ أشكالًا ثلاثيةَ الأبعادِ باستعمالِ الرّسمِ المتساوي ورسمِ المَساقطِ.

المصطلحاتُ

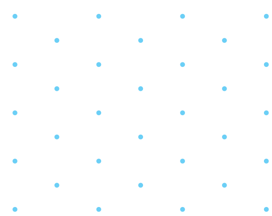
الرّسمُ المتساوي، المنظورُ، المَسقطُ العُلويُّ، المَسقطُ الأماميُّ، المَسقطُ الجانبيُّ.

أستكشفُ

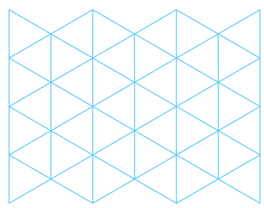
ما عددُ المكعباتِ الّتي يتكوّنُ مِنْها المجسّمُ المجاورُ؟



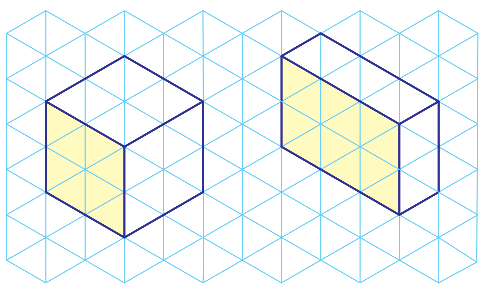
الرّسمُ المتساوي (isometric drawing) طريقةٌ لرسمِ الأشكالِ ثلاثيةِ الأبعادِ على ورقةٍ ثنائيةِ الأبعادِ، تُستعمَلُ فيها ورقةٌ متساويةُ القياسِ مثلثةٌ أَوْ منقّطةٌ.



ورقةٌ منقّطةٌ متساويةُ القياسِ



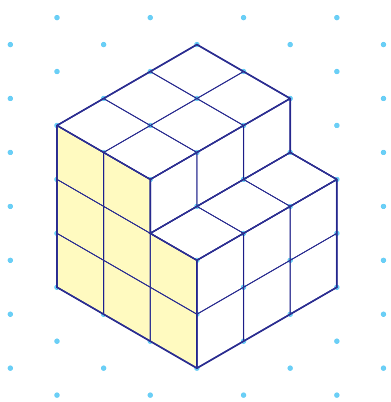
ورقةٌ مثلثةٌ متساويةُ القياسِ



أشكالٌ ثلاثيةُ الأبعادِ مرسومةٌ على ورقةٍ مثلثةٍ متساويةِ القياسِ

مثال 1

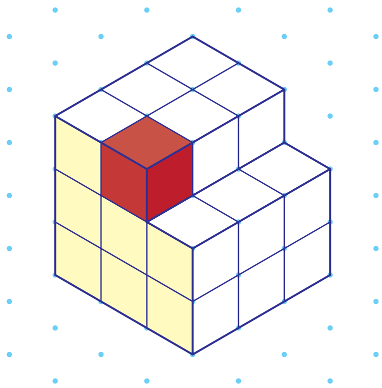
يبيّنُ الشكلُ المجاورُ مجسمًا ثلاثيَّ الأبعادِ مرسومًا على ورقةٍ منقّطةٍ متساويةِ القياسِ مكوَّنًا مِنْ مكعباتِ وَحدةٍ.



1 ما عددُ مكعباتِ الوَحدةِ الّتي يتكوّنُ مِنْها المجسّمُ؟

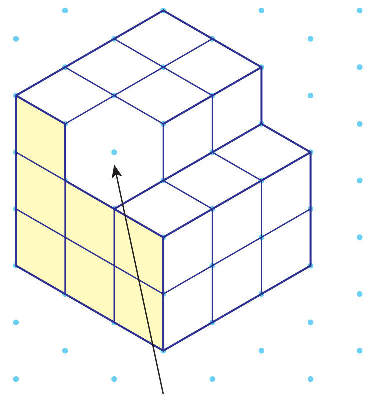
يتكوّنُ المجسّمُ مِنَ ثلاثِ طبقاتٍ، وفي كلِّ طبقةٍ 8 مكعباتِ وَحدةٍ.

إذنْ، يتكوّنُ المجسّمُ مِنْ 24 مكعبَ وَحدةٍ.

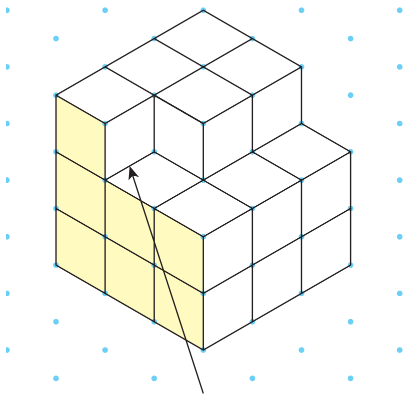


2 إذا أزيلَ المكعبُ الملوّنُ بالأحمرِ مِنَ المجسّمِ، فأرسمُ الشكلَ الجديدَ على ورقةٍ منقّطةٍ متساويةِ القياسِ.

الْخُطْوَةُ 1 أزيلُ الحوافَ الثلاثَ الظاهرةَ للمكعبِ الأحمرِ.

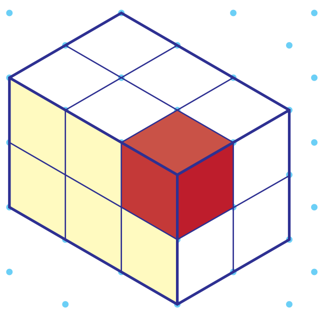


الْخُطْوَةُ 2 أرسمُ الحوافَ الّتي أصبحَتْ ظاهرةً مِنَ المكعباتِ المحيطةِ بالمكعبِ الأحمرِ.



أتحققُ من فهمي:

يبيّنُ الشكلُ المجاورُ مجسمًا ثلاثيَّ الأبعادِ مرسومًا على ورقةٍ منقّطةٍ متساويةِ القياسِ مكوّنًا مِنْ مكعباتٍ وَحدةٍ.

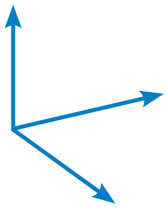


1 ما عددُ مكعباتِ الوَحدةِ الّتي يتكوّنُ مِنْها المجسّمُ؟

2 إذا أزيلَ المكعبُ الأحمرُ مِنَ المجسّمِ، فأرسمُ الشكلَ الجديدَ على ورقةٍ منقّطةٍ متساويةِ القياسِ.

ملحوظةٌ: أستعملُ الورقَ المنقّطَ متساويَ القياسِ الموجودَ في كتابِ التمارينِ.

ألاحظُ مِنَ الرّسمِ المتساوي في الأمثلةِ السابقةِ أنَّ:

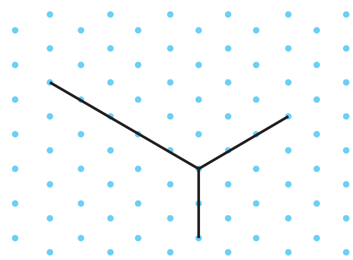


- الحوافَ مرسومةٌ في ثلاثةِ اتجاهاتٍ.
- الحوافَ المخفيةَ لا تظهرُ في الرّسمِ.
- أحدَ الأوجهِ يظلَّلُ للمساعدةِ على تصوّرِ الشكلِ ثلاثيِّ الأبعادِ.

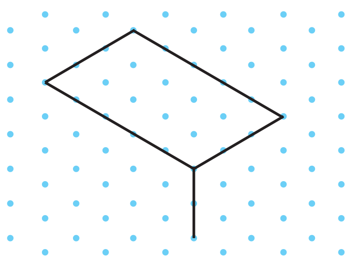
مثال 2

أرسمُ على ورقةٍ منقّطةٍ متساويةِ القياسِ متوازيَ مستطيلاتٍ طولُهُ 5 وَحداتٍ، وعرضُهُ 3 وَحداتٍ، وارتفاعُهُ وَحدتانِ.

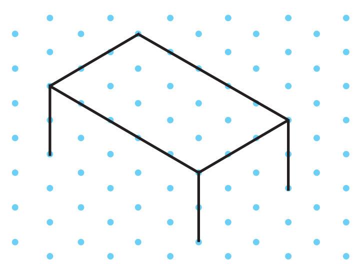
الْخُطْوَةُ 1 أبدأُ مِنْ نقطةٍ محدّدةٍ على الورقةِ، وأرسمُ مِنْها ثلاثَ حوافٍ للمجسّمِ في ثلاثةِ اتّجاهاتٍ؛ وَحدتانِ للأسفلِ، وَ5 وَحداتٍ لليسارِ، وَ3 وحداتٍ لليمينِ.



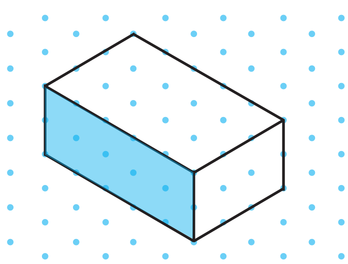
الْخُطْوَةُ 2 أُكملُ رسمَ المستطيلِ العُلويِّ للمجسّمِ.



الْخُطْوَةُ 3 أرسمُ القطعَ المستقيمةَ الرأسيةَ الظاهرةَ مِنَ المجسّمِ بطولِ وَحدتَينِ.



الْخُطْوَةُ 4 أصلُ بَيْنَ الرؤوسِ المتقابلةِ، ثُمَّ أظلّلُ الوجهَ الأماميَّ مِنَ المجسّمِ.

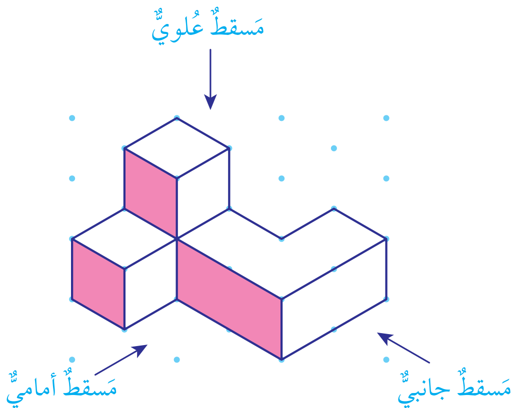


أتحقّقُ من فهمي:

أرسمُ على ورقةٍ منقّطةٍ متساويةِ القياسِ متوازيَ مستطيلاتٍ طولُهُ 4 وَحداتٍ، وعرضُهُ 3 وَحداتٍ، وارتفاعُهُ 3 وَحداتٍ.

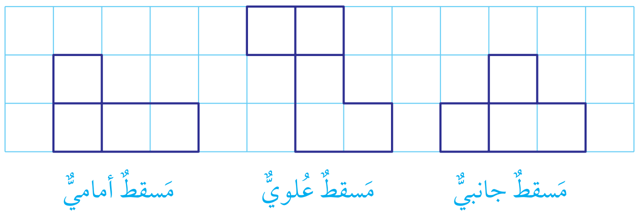
تُسمّى النقطةُ الّتي يُنظَرُ للمجسّـــمِ مِنْ خلالِها **المنظورَ** (perspective)، وتُستعمَلُ منظوراتٌ مختلفةٌ عندَ رسمِ المجسّمِ؛ لأنَّ منظورًا واحدًا لا يُعطي تصوّرًا مكتملًا عَنِ المجسّمِ.

يُعَدُّ **المَســـقطُ العُلويُّ** (plan view) المنظورَ العلويَّ للمجسّـــمِ، و**المســـقطُ الأمامـــيُّ** (front view) المنظورَ الأماميَّ للمجسّمِ، و**المسقطُ الجانبيُّ** (side view) المنظورَ الجانبيَّ للمجسّمِ.



أتعلم

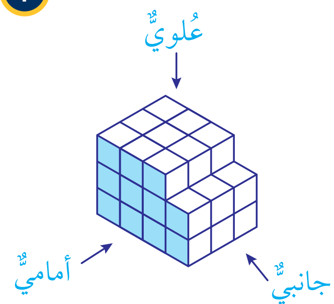
الحدودُ الّتي تظهرُ داخلَ المساقطِ تدلُّ على وجودِ ارتفاعاتٍ مختلفةٍ للمجسّمِ.

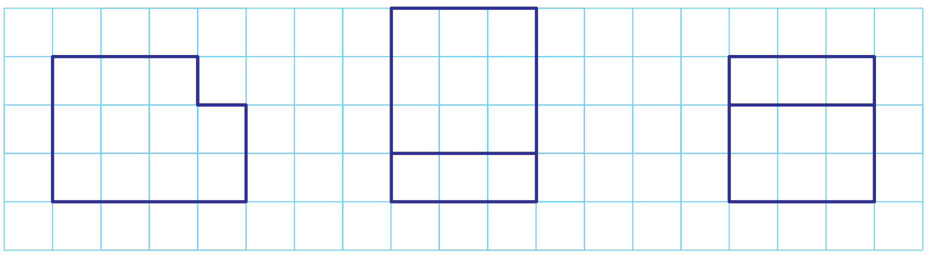


مثال 3

أرسمُ المَساقطَ: العُلويَّ، والأماميَّ، والجانبيَّ، لكلٍّ مِنَ المجسّماتِ الآتيةِ:

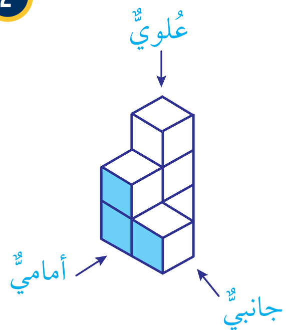
1

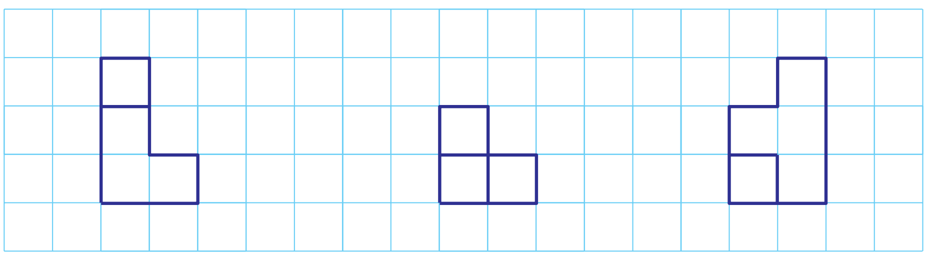




المَسقطُ الأماميُّ — المَسقطُ العُلويُّ — المَسقطُ الجانبيُّ

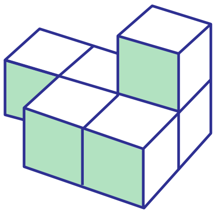
2

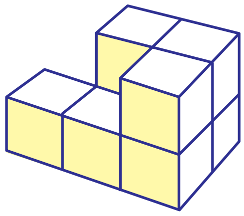




المَسقطُ الأماميُّ — المَسقطُ العُلويُّ — المَسقطُ الجانبيُّ

أتحققُ من فهمي:

3


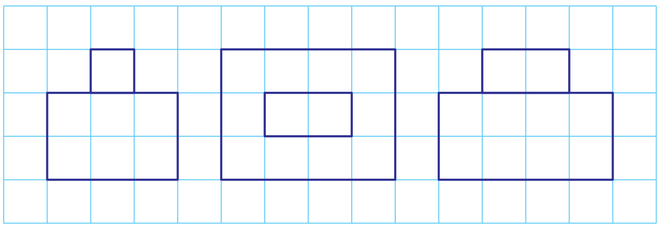
4


إرشادٌ: أستعملُ أوراقَ المربعاتِ الموجودةَ في نهايةِ كتابِ التمارينِ.

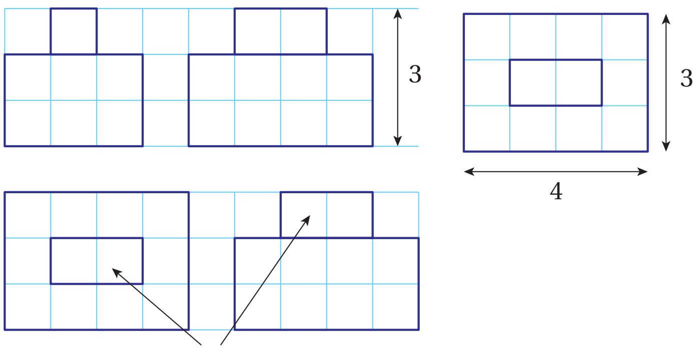
يمكنُ استعمالُ المَساقطِ وورقةٍ منقّطةٍ متساويةِ القياسِ لرسمِ أشكالٍ ثلاثيةِ الأبعادِ.

مثال 4

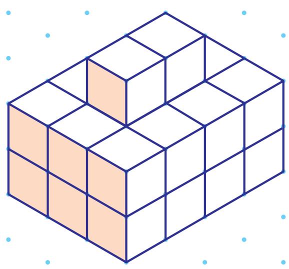
أستعملُ ورقةً منقّطةً متساويةَ القياسِ والمَساقطَ المجاورةَ، لرسمِ المجسّمِ مِنْ مكعباتِ وَحدةٍ.



مَسقطٌ أماميٌّ   مَسقطٌ عُلويٌّ   مَسقطٌ جانبيٌّ



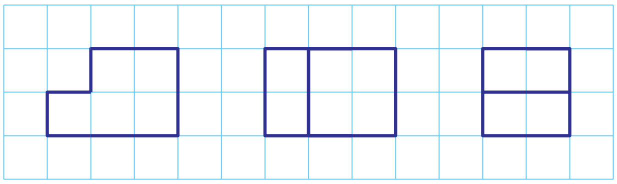
- يُظهِرُ المَسقطُ العُلويُّ أنَّ قاعدةَ المجسّمِ على شكلِ مستطيلٍ طولُهُ 4 وَحداتٍ وعرضُهُ 3 وَحداتٍ.
- يُظهِرُ المسقطُ الأماميُّ أنَّ الارتفاعَ الكلّيَّ للمجسّمِ 3 وَحداتٍ.
- يُظهِرُ المسقطُ الجانبيُّ أنَّ المجسّمَ متوازي مستطيلاتٍ يعلوهُ مكعبانِ متجاورانِ في المنتصفِ.
- أرسمُ المجسّمَ الّذي توصّلْتُ إلى وصفِهِ مِنْ خلالِ المساقطِ على الورقةِ المنقّطةِ متساويةِ القياسِ، ثُمَّ أظلّلُ الجهةَ الأماميةَ.



أتحققُ من فهمي:

أستعملُ ورقةً منقّطةً متساويةَ القياسِ والمَساقطَ المجاورةَ، لرسمِ المجسّمِ مِنْ مكعباتِ وَحدةٍ.

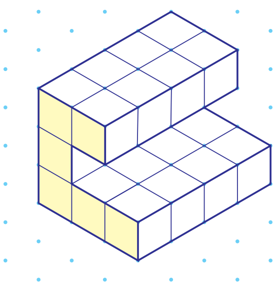
ملحوظةٌ: أستعملُ الورقَ المنقّطَ متساويَ القياسِ الموجودَ في كتابِ التمارينِ.

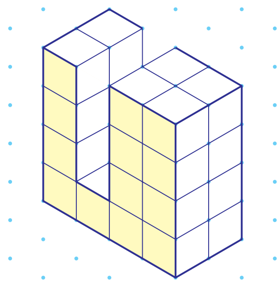


مَسقطٌ أماميٌّ مَسقطٌ عُلويٌّ مَسقطٌ جانبيٌّ

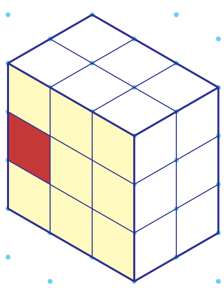
أتدرب وأحل المسائل

أجدُ عددَ مكعباتِ الوَحدةِ الّتي يتكوّنُ مِنْها كلُّ مجسّمٍ ممّا يأتي:

1 

2 

3 ما عددُ مكعباتِ الوَحدةِ الّتي يتكوّنُ مِنْها المجسّمُ المجاورُ؟

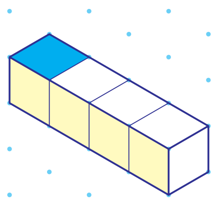


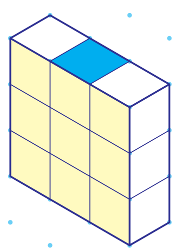
4 إذا أُزيلَ المكعبُ الأحمرُ مِنَ المجسّمِ، فأرسمُ الشكلَ الجديدَ على ورقةٍ منقّطةٍ متساويةِ القياسِ.

أفكّرُ

كَمْ حافةً أزيلُ مِنَ المجسّمِ لأزيلَ المكعبَ الأحمرَ؟

إذا وُضِعَ مكعبُ وَحدةٍ فوقَ كلِّ متوازي مستطيلاتٍ ممّا يأتي ليغطّيَ المربعَ المرسومَ باللّونِ الأزرقِ، فأرسمُ الشكلَ الجديدَ على ورقةٍ منقّطةٍ متساويةِ القياسِ:

5 

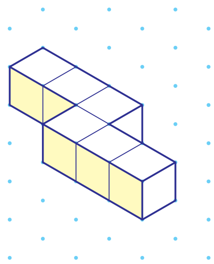
6 

7 أرسمُ متوازيَ مستطيلاتٍ على ورقةٍ منقّطةٍ متساويةِ القياسِ طولُهُ 3 وَحداتٍ، وعرضُهُ 3 وَحداتٍ، وارتفاعُهُ 6 وَحداتٍ.

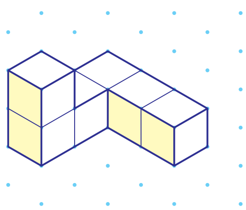
8 أرسمُ متوازيَ مستطيلاتٍ على ورقةٍ منقّطةٍ متساويةِ القياسِ طولُهُ 4 وَحداتٍ، وعرضُهُ وحدتانِ، وارتفاعُهُ 3 وَحداتٍ.

يتكوّنُ كلُّ مجسّمٍ ممّا يأتي مِنْ 6 مكعباتِ وَحدةٍ. أجدُ أقلَّ عددٍ مِنْ مكعباتِ الوَحدةِ الّتي يمكنُ إضافتُها إلى كلِّ مجسّمٍ ليصبحَ متوازيَ مستطيلاتٍ:

9



10

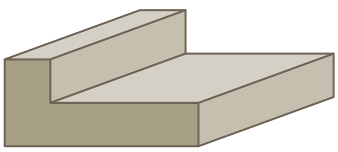


إرشادٌ

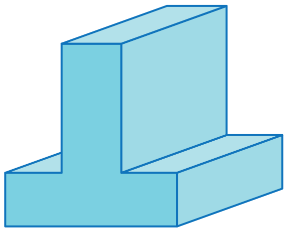
أحــدّدُ مواقعَ المكعباتِ السّتّةِ الّتي تكملُ الشكلَ إلى متوازي مستطيلاتٍ أوّلًا قبلَ البدءِ بالرّسمِ.

أرسمُ كلَّ مجسّمٍ ممّا يأتي على ورقةٍ منقّطةٍ متساويةِ القياسِ:

11

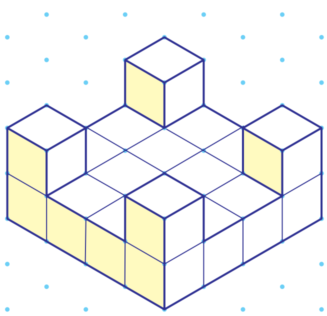


12

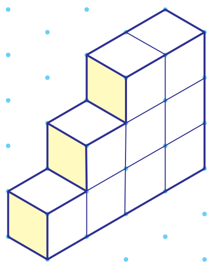


أرسمُ المَساقطَ: العُلويَّ، والأماميَّ، والجانبيَّ، لكلٍّ مِنَ المجسّماتِ الآتيةِ:

13



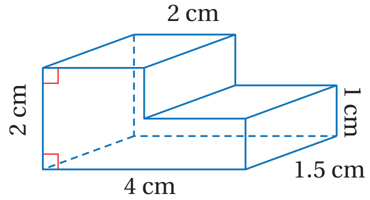
14

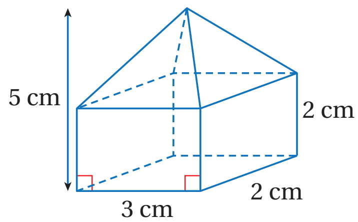


إرشادٌ

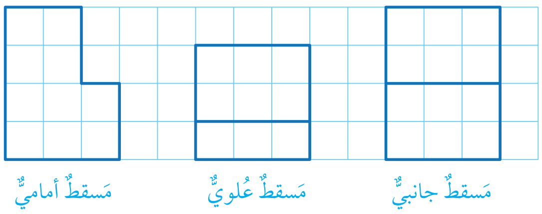
أستعملُ أوراقَ المربعاتِ الموجودةَ في نهايةِ كتابِ التمارينِ.

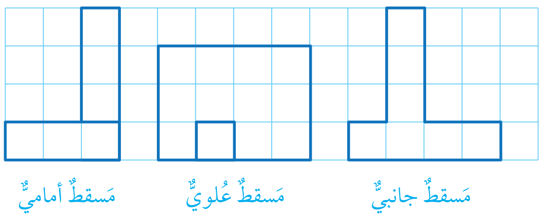
أرسمُ المَساقطَ: العُلويَّ، والأماميَّ، والجانبيَّ، لكلٍّ مِنَ المجسّماتِ الآتيةِ: (أرسمُ كلَّ مَسقطٍ بأبعادِهِ الحقيقيةِ)

15


16


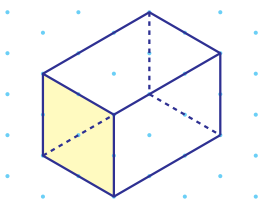
أستعملُ ورقةً منقّطةً متســاويةَ القياسِ والمَساقطَ المعطاةَ، لرسمِ كلِّ مجسّمٍ ممّا يأتي مِنْ مكعباتِ وَحدةٍ:

17


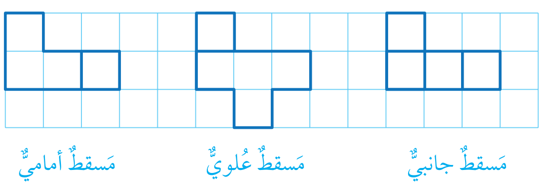
18


مهاراتُ التفكيرِ العُليا

19 **أكتشفُ الخطأَ:** رسمَ عامرٌ متوازيَ المستطيلاتِ المجاورَ على ورقةٍ منقّطةٍ متســاويةِ القياسِ. أكتشفُ الخطأَ الّذي وقعَ فيهِ عامرٌ، وأصحّحُهُ بإعادةِ رسمِ المتوازي على ورقةٍ منقّطةٍ متساويةِ القياسِ.



20 **تحدٍّ:** أستعملُ ورقةً منقّطةً متســاويةَ القياسِ، لرسمِ المجسّمِ المعطى مساقطُهُ في ما يأتي مِنْ مكعباتِ وَحدةٍ.



21 **أكتبُ** كيفَ أرسمُ المساقطَ الثلاثةَ لمجسّمٍ؟

الدرسُ 2 المقاطعُ والمجسّماتُ الدّوَرانيةُ

فكرةُ الدرسِ

- أحدّدُ الشكلَ الناتجَ مِنْ تقاطعِ المجسّمِ مَعَ مستوًى.
- أحدّدُ عددَ مستوياتِ التماثلِ للمجسّمِ.
- أتعرّفُ المجسّماتِ الدّوَرانيةَ.

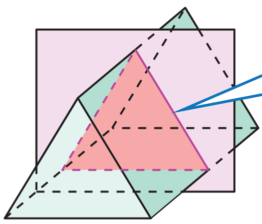
المصطلحاتُ

المقطعُ، المقطعُ العرضيُّ، المنشورُ، مستوى التماثلِ، المجسّمُ الدّوَرانيُّ، محورُ الدّوَرانِ.

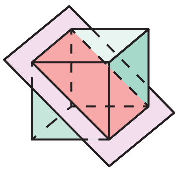
أستكشفُ

كيفَ يمكنُ تقطيعُ قطعةِ الجُبنِ المجاورةِ للحصولِ على شرائحَ مستطيلةِ الشكلِ؟

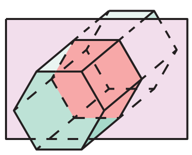
أفترضُ أنَّ مستوًى قطعَ مجسّمًا، عندها يُسمّى الشكلُ ثنائيُّ الأبعادِ الناتجُ مِنْ تقاطعِ مستوًى مَعَ مجسّمٍ **مقطعًا** (section). فمثلًا، يبيّنُ الشكلُ المجاورُ أنَّ تقاطعَ مستوًى ومنشورٍ ثلاثيٍّ هوَ مثلثٌ. ويُسمّى المقطعُ الموازي لقاعدةِ المجسّمِ **المقطعَ العرضيَّ** (cross section).



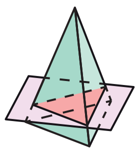
مثال 1 أحدّدُ المقطعَ الناتجَ مِنْ تقاطعِ المستوى والمجسّمِ في كلٍّ ممّا يأتي، وأحدّدُ أيُّ المقاطعِ هوَ مقطعٌ عرضيٌّ:

1 

المقطعُ مستطيلٌ.

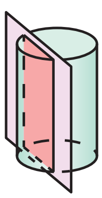
2 

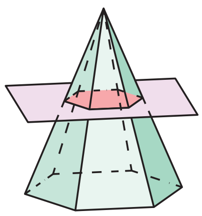
المقطعُ سداسيٌّ، وهوَ مقطعٌ عرضيٌّ؛ لأنَّهُ موازٍ للقاعدةِ.

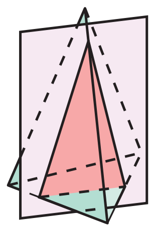
3 

المقطعُ مثلثٌ، وهوَ مقطعٌ عرضيٌّ؛ لأنَّهُ موازٍ للقاعدةِ.

أتحققُ من فهمي:

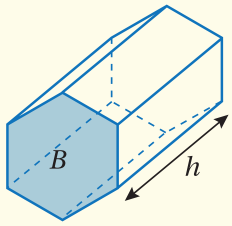
4 

5 

6 

المنشورُ (prism) هوَ شكلٌ ثلاثيُّ الأبعادِ، لَهُ قاعدتانِ مضلعتانِ متطابقتانِ ومتوازيتانِ، ومقاطعُهُ العرضيةُ جميعُها متطابقةٌ، ويمكنُ إيجادُ حجمِ المنشورِ بضربِ مساحةِ المقطعِ العرضيِّ لَهُ (القاعدةِ) في ارتفاعِهِ.

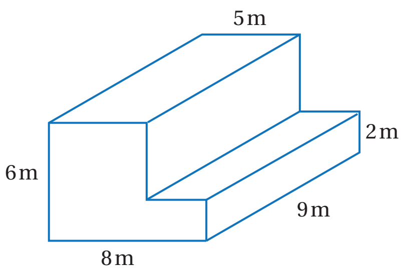
مفهومٌ أساسيٌّ — حجمُ المنشورِ



- **بالكلماتِ:** حجمُ المنشــورِ يُساوي ناتجَ ضربِ مســاحةِ مقطعِهِ العرضيِّ في ارتفاعِهِ.
- **بالرموزِ:** $V = Bh$

حيثُ h ارتفاعُ المنشورِ، وَ B مساحةُ المقطعِ العرضيِّ للمنشورِ.

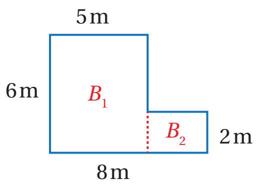
مثال 2



أجدُ حجمَ المنشورِ المجاورِ.

الْخُطْوَةُ 1 أجدُ مساحةَ المقطعِ العرضيِّ.

أجدُ مساحةَ المقطعِ العرضيِّ (B) بجمعِ مساحتَيِ المستطيلَينِ B_1 وَ B_2



صيغةُ مساحةِ المقطعِ العرضيِّ	$B = B_1 + B_2$
صيغةُ مساحةِ المستطيلِ	$= (l_1 \times w_1) + (l_2 \times w_2)$
أعوّضُ	$= (6 \times 5) + (3 \times 2)$
أجدُ الناتجَ	$= 30 + 6 = 36$

إذنْ، مساحةُ المقطعِ العرضيِّ للمنشورِ $36\ m^2$

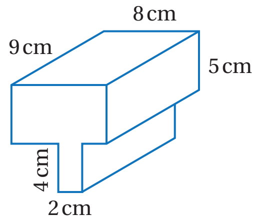
الْخُطْوَةُ 2 أجدُ حجمَ المنشورِ.

صيغةُ حجمِ المنشورِ	$V = Bh$
أعوّضُ	$= 36 \times 9$
أجدُ الناتجَ	$= 324$

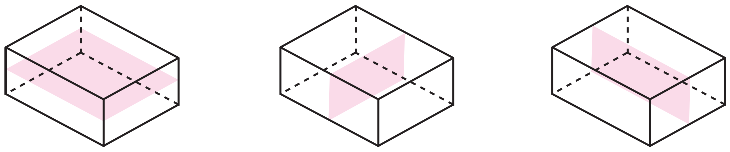
إذنْ، حجمُ المنشورِ $324\ m^3$

أتحققُ من فهمي:

أجدُ حجمَ المنشورِ المجاورِ.

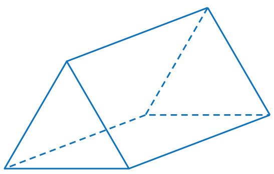


مســتوى التماثلِ (plane of symmetry) هوَ مستوًى يقسمُ الشــكلَ ثلاثيَّ الأبعادِ إلى نصفَينِ متطابقَينِ كلٌّ مِنْهُما صورةُ مرآةٍ للآخَرِ، فمثلًا تبيّنُ الأشكالُ الآتيةُ مستوياتِ التماثلِ جميعَها لمتوازي المستطيلاتِ.



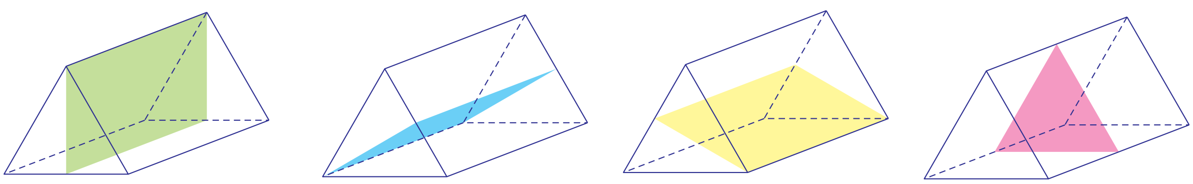
مثال 3

يبيّنُ الشــكلُ المجاورُ منشــورًا ثلاثيًّا قاعدتُهُ مثلثٌ متطابقُ الأضــلاعِ. أحدّدُ عددَ مستوياتِ التماثلِ للمنشورِ.



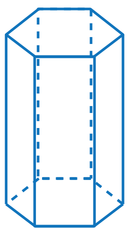
بِما أنَّ قاعدةَ المنشورِ مثلثٌ متطابقُ الأضلاعِ، فإنَّ لَها ثلاثةَ خطوطِ تماثلٍ، وهذا يعني أنَّ للمنشورِ مستوى تماثلٍ مرتبطًا بكلٍّ مِنْ هذِهِ الخطوطِ الثلاثةِ، ويوجدُ أيضًا مستوى تماثلٍ مُوازٍ للقاعدةِ يقطعُ المنشورَ إلى نصفَينِ متطابقَينِ.

ومنهُ فإنَّ المجموعَ الكلّيَّ لمستوياتِ تماثلِ هذا المنشورِ هوَ 4 مستوياتٍ.



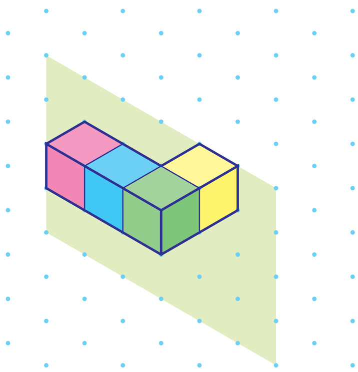
أتحققُ من فهمي:

أحدّدُ عددَ مستوياتِ التماثلِ للمنشورِ السداسيِّ المنتظمِ المجاورِ.



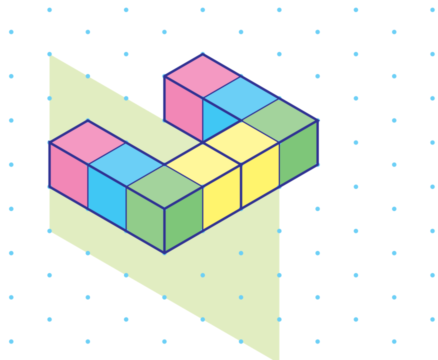
يمكنُ إكمالُ الرّسمِ المتساوي لشكلٍ ثلاثيِّ الأبعادِ إذا علمْتُ مستوى تماثلِ الشكلِ وأحدَ النصفَينِ المتطابقَينِ حولَهُ.

مثال 4

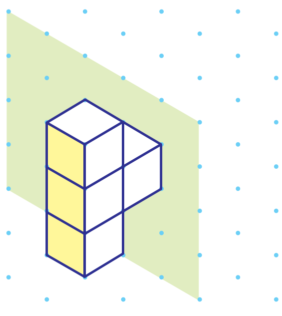


أكملُ رسمَ المجسّمِ في الشكلِ المجاورِ، علمًا بأنَّ المستوى المظلَّلَ مستوى تماثلٍ.

بما أنَّهُ توجدُ 4 مكعباتٍ في الشكلِ، فهذا يَعني أنَّهُ يجبُ إضافةُ 4 مكعباتٍ أُخرى على الجهةِ الأُخرى مِنْ مستوى التناظرِ.



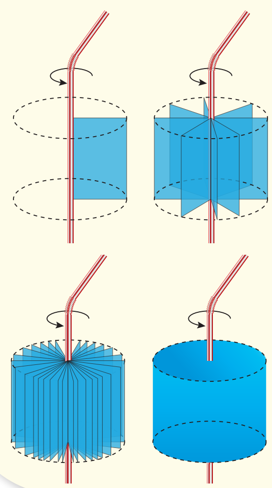
أتحققُ من فهمي:



أكملُ رسمَ المجسّمِ في الشكلِ المجاورِ، علمًا بأنَّ المستوى المظلَّلَ مستوى تماثلٍ.

ملحوظةٌ: أستعملُ الورقَ المنقَّطَ متساويَ القياسِ الموجودَ في كتابِ التمارينِ.

نشاطٌ هندسيٌّ — المجسّماتُ الدّوَرانيةُ



الإجراءاتُ:

الْخُطْوَةُ 1 أرسمُ مستطيلًا على ورقةٍ مقوّاةٍ، ثُمَّ أقصُّهُ.

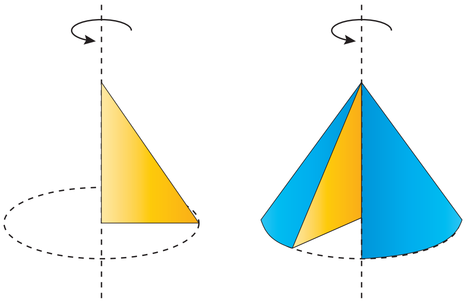
الْخُطْوَةُ 2 أستعملُ شريطًا لاصقًا لتثبيتِ المستطيلِ على ماصَّةٍ.

الْخُطْوَةُ 3 أدوّرُ نهايةَ الماصّةِ بَيْنَ يَدَيَّ، وأراقبُ النتيجةَ.

أحلّلُ النتائجَ:

ما المجسّمُ الناتجُ مِنْ دَوَرانِ المستطيلِ حولَ الماصّةِ؟

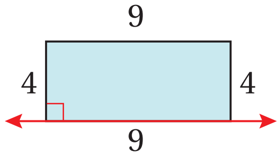
المجسّـــمُ الدّوَرانيُّ (solid of revolution) هوَ شكلٌ ثلاثيُّ الأبعادِ ناتجٌ مِنْ دَوَرانِ شكلٍ مستوٍ حولَ محورٍ، ويُسمّى المستقيمُ الّذي يدورُ حولَهُ الشــكلُ المســتوي **محورَ الـدّوَرانِ** (axis of revolution). فمثلًا، عندَ تدويرِ مثلثٍ حولَ محورٍ يحوي أحدَ أضلاعِهِ، فإنَّ المجسّمَ الدّوَرانيَّ الناتجَ مخروطٌ.



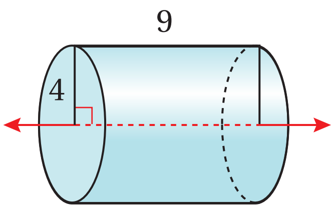
مثال 5

أصفُ المجسّـــمَ الدّوَرانيَّ الناتجَ مِنْ دَوَرانِ كلٍّ مِنَ الأشـــكالِ المســـتويةِ الآتيةِ حولَ المحورِ المُعطى، ثُمَّ أحدّدُ قياساتِهِ وأرسمُهُ:

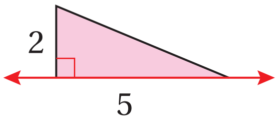
1



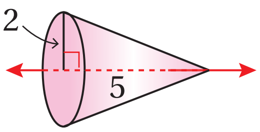
المجسّمُ الدّوَرانيُّ الناتجُ أُسطوانةٌ ارتفاعُها 9 وطولُ نصفِ قُطرِ قاعدتِها 4



2

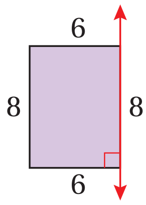


المجسّمُ الدّوَرانيُّ الناتجُ مخروطٌ ارتفاعُهُ 5 وطولُ نصفِ قُطرِ قاعدتِهِ 2

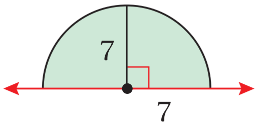


أتحققُ من فهمي:

3

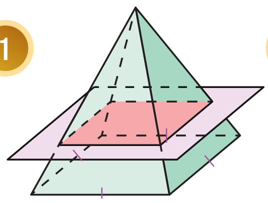


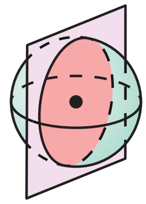
4

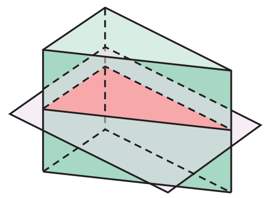


أتدرب وأحل المسائل

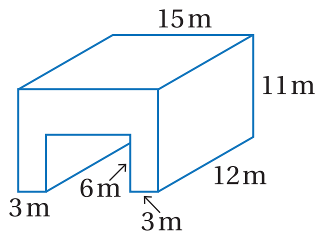
أحدّدُ المقطعَ الناتجَ مِنْ تقاطعِ المستوى والمجسّمِ في كلٍّ ممّا يأتي، وأحدّدُ أيُّ المقاطعِ هُوَ مقطعٌ عرضيٌّ:

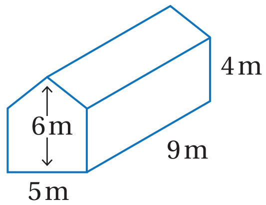
1 

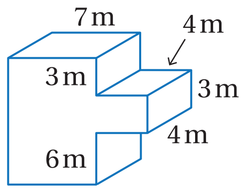
2 

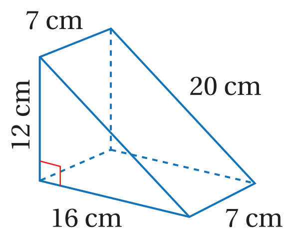
3 

أجدُ حجمَ كلِّ منشورٍ ممّا يأتي:

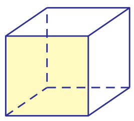
4 

5 

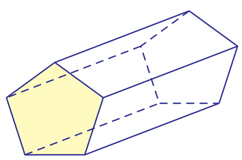
6 

7 

8 يبيّنُ الشكلُ الآتي مكعبًا، أحدّدُ عددَ مستوياتِ التماثلِ لِهذا المكعبِ.



9 يبيّنُ الشكلُ الآتي منشورًا خماسيًّا منتظمًا، أحدّدُ عددَ مستوياتِ التماثلِ لِهذا المنشورِ.



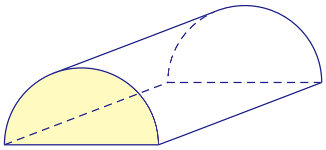
معلومةٌ

للمقاطعِ أهمّيةٌ كبيرةٌ في دراسةِ الهياكلِ التشريحيةِ للحيواناتِ والنباتاتِ، ومِنْ خلالِها كشفَ العلماءُ النّقابَ عَنِ الأنسجةِ والأعضاءِ المخفيّةِ.

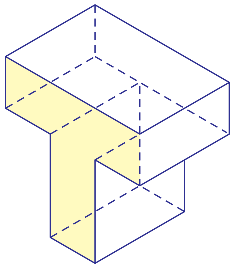
أفكّرُ

إذا كانَتْ قاعدةُ المنشورِ مضلّعًا منتظمًا، فما علاقةُ ذلكَ بمستوياتِ التماثلِ؟

10 يبيّنُ الشــكلُ المجاورُ مجسمًا مقطعُهُ العرضيُّ نصفُ دائرةٍ، أحدّدُ عددَ مستوياتِ التماثلِ لِهذا المجسمِ.



11 يبيّنُ الشكلُ المجاورُ منشورًا مقطعُهُ العرضيُّ على شــكلِ حرفِ T، أحدّدُ عددَ مستوياتِ التماثلِ لِهذا المنشورِ.



إرشاد

أســتعملُ الــورقَ المنقَّطَ متساويَ القياسِ الموجودَ في كتابِ التمارينِ.

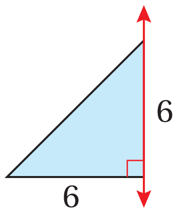
أُكملُ رسمَ المجسّمِ في كلٍّ ممّا يأتي، علمًا بأنَّ المستوى المظلَّلَ مستوى تماثلٍ:

13

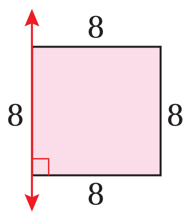
12

أصفُ المجسّــمَ الدّوَرانيَّ الناتجَ مِنْ دَوَرانِ كلٍّ مِنَ الأشــكالِ المســتويةِ الآتيةِ حولَ المحورِ المُعطى، ثُمَّ أحدّدُ قياساتِهِ وأرسمُهُ:

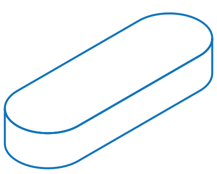
15



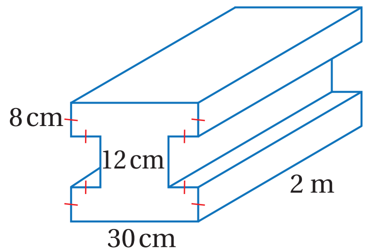
14



16 **عُلبةٌ:** يبيّنُ الشــكلُ المجاورُ عُلبةً سَــطحاها العُلويُّ والسّــفليُّ متطابقانِ، وكلاهُما مكوَّنٌ مِنْ مســتطيلٍ طولُــهُ 9 cm وعرضُهُ 4 cm مَعَ نصفِ دائرةٍ عندَ كلِّ نهايةٍ. إذا كانَ ارتفاعُ العلبةِ 3 cm، فأجدُ حجمَها.



17 **دعامةٌ فولاذيةٌ:** يبيّنُ الشكلُ الآتي المقطعَ العرضيَّ لدعامةٍ فولاذيةٍ على شكلِ منشورٍ، طولُها 2 m، إذا كانَتْ كتلةُ $1\ cm^3$ مِنَ الفولاذِ 79 g، فأجدُ كتلةَ الدعامةِ.



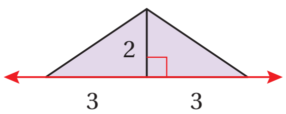
معلومةٌ

يُعدُّ الفولاذُ المادةَ الأكثرَ شيوعًا لبناءِ البنيةِ التحتيةِ، وفي الصناعاتِ حولَ العالَمِ؛ فهوَ يستخدَمُ لتصنيعِ جميعِ الموادِّ بدءًا مِنَ الإبرةِ إلى ناقلاتِ البترولِ.

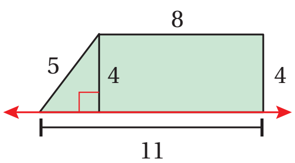
مهاراتُ التفكيرِ العُليا

تبريرٌ: **أرسمُ المجسّمَ المركّبَ الناتجَ مِنْ تدويرِ كلٍّ مِنَ الأشكالِ المستويةِ الآتيةِ حولَ المحورِ المُعطى، ثُمَّ أصفُ المجسّمَ المركّبَ الناتجَ وأحدّدُ قياساتِهِ:**

18

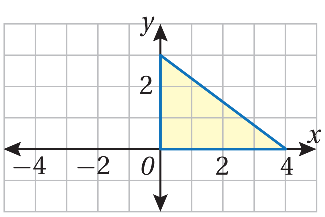


19



20 **تحدٍّ:** أرسمُ على ورقةٍ منقّطةٍ متساويةِ القياسِ مجسّمًا مكوَّنًا مِنْ 6 مكعباتٍ وحدةٍ لَهُ 5 مستوياتِ تماثلٍ.

21 **تبريرٌ:** أجدُ المساحةَ الكلّيّةَ لسطحِ المجسّمِ الناتجِ مِنْ دَورانِ المثلثِ الآتي حولَ المحورِ y، وأبرّرُ إجابتي. (أكتبُ الإجابةَ بدلالةِ π)



إرشادٌ

أحدّدُ أبعادَ المجسّمِ الناتجِ عَنِ الدّورانِ أوّلًا؛ لأتمكّنَ مِنْ إيجادِ مساحةِ سطحِهِ الكلّيّةِ.

22 **أكتبُ** كيفَ يمكنُ تحديدُ عددِ مستوياتِ التماثلِ للمجسّمِ؟

الدرسُ 3 حجمُ الكرةِ ومساحةُ سطحِها

فكرةُ الدرسِ

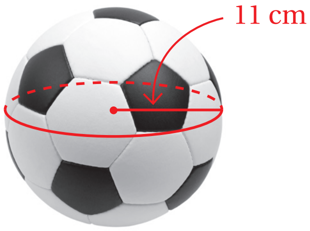
أجدُ مساحةَ سطحِ الكرةِ وحجمَها.

المصطلحاتُ

الكرةُ، الدائرةُ الكُبرى، نصفُ الكرةِ.

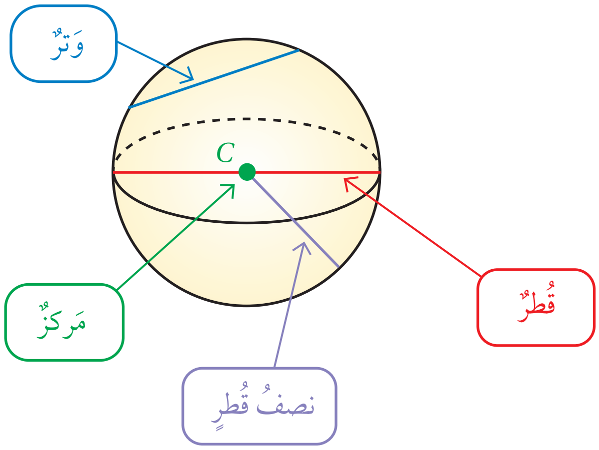
أستكشفُ

كَمْ سنتيمترًا مربعًا مِنَ الجلدِ يلزمُ لصنعِ الكرةِ المجاورةِ؟



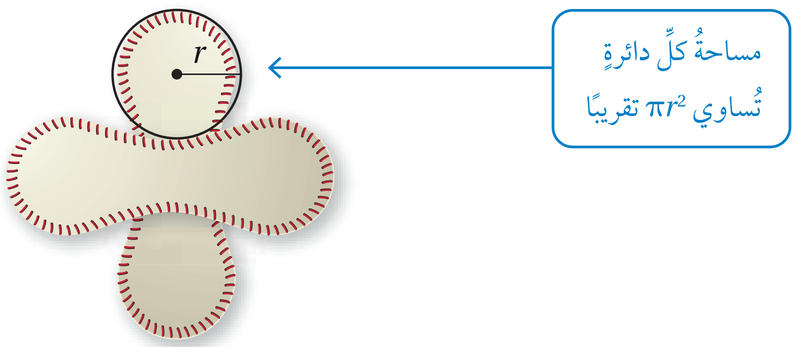
الكرةُ (sphere) هِيَ مجموعةُ النِّقاطِ جميعِها في الفضاءِ الّتي تبعدُ بُعدًا ثابتًا عَنْ نقطةٍ معلومةٍ تُسمّى مركزَ الكرةِ.

- نصفُ قُطرِ الكرةِ هوَ قطعةٌ مستقيمةٌ تصلُ بَيْنَ مركزِ الكرةِ وأيِّ نقطةٍ على الكرةِ.
- وَتَرُ الكرةِ هوَ قطعةٌ مستقيمةٌ طرَفاها أيُّ نقطتَينِ على الكرةِ.
- قُطرُ الكرةِ وَتَرٌ يمرُّ في المركزِ.



يمكنُ إيجادُ صيغةٍ لمساحةِ سطحِ الكرةِ بِقَصِّ كرةٍ كَما في الشكلِ أدناهُ وملاحظةِ القطعتَينِ اللّتَينِ تتكوّنُ منهُما.

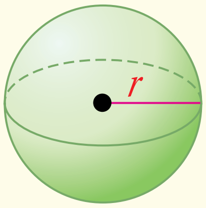
ألاحظُ أنَّ كلَّ قطعةٍ مكوَّنةٌ تقريبًا مِنْ دائرتَينِ متطابقتَينِ متّصلتَينِ، ممّا يعني أنَّ الكرةَ بأكملِها مكوّنةٌ مِنْ 4 دوائرَ متطابقةٍ تقريبًا طولُ نصفِ قُطرِ كلٍّ مِنْها r، وبما أنَّ مساحةَ الدائرةِ $A = \pi r^2$ ، فإنَّ مساحةَ القطعِ الّتي تتكوّنُ مِنْها الكرةُ تُساوي $4\pi r^2$، وهذِهِ هِيَ الصيغةُ العامّةُ لمساحةِ سطحِ الكرةِ.



مفهومٌ أساسيٌّ — مساحةُ سطحِ الكرةِ

- **بالكلماتِ:** مســاحةُ ســطحِ الكرةِ $(S.A)$ هِيَ حاصلُ ضربِ 4π في مربعِ طولِ نصفِ قُطرِها.
- **بالرموزِ:** $S.A = 4\pi r^2$

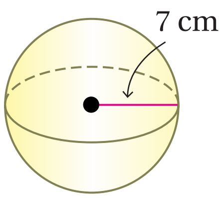
حيثُ r طولُ نصفِ قُطرِ الكرةِ.



مثال 1

أجدُ مساحةَ سطحِ كلِّ كرةٍ ممّا يأتي، وأقربُ إجابتي لأقربِ جزءٍ مِنْ عشرةٍ:

1



$S.A = 4\pi r^2$ صيغةُ مساحةِ سطحِ الكرةِ

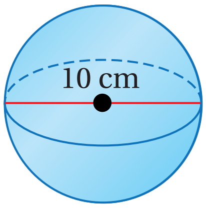
$= 4\pi(7)^2$ أعوّضُ $r = 7$

$= 196\pi$ أبسّطُ

≈ 615.8 أستعملُ الآلةَ الحاسبةَ

إذنْ، مساحةُ سطحِ الكرةِ 196π cm^2، أوْ 615.8 cm^2 تقريبًا.

2



بِما أنَّ طولَ قُطرِ الكرةِ 10 cm فإنَّ هذا يعني أنَّ طولَ نصفِ قُطرِها 5 cm

$S.A = 4\pi r^2$ صيغةُ مساحةِ سطحِ الكرةِ

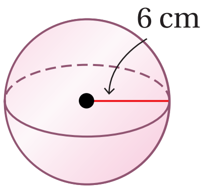
$= 4\pi(5)^2$ أعوّضُ $r = 5$

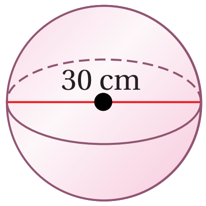
$= 100\pi$ أبسّطُ

≈ 314.2 أستعملُ الآلةَ الحاسبةَ

إذنْ، مساحةُ سطحِ الكرةِ 100π cm^2، أوْ 314.2 cm^2 تقريبًا.

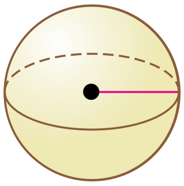
أتحقّقُ من فهمي:

3


4


يمكنُ إيجادُ طولِ قُطرِ الكرةِ إذا علمْتُ مساحةَ سطحِها.

مثال 2


$S.A = 30\pi\ m^2$

أجدُ طولَ قُطرِ الكرةِ المجاورةِ إذا علمْتُ أنَّ مساحةَ سطحِها $30\pi\ m^2$، وأقرّبُ إجابتي لأقربِ جزءٍ مِنْ عشرةٍ.

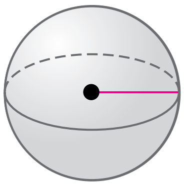
صيغةُ مساحةِ سطحِ الكرةِ	$S.A = 4\pi r^2$
أعوّضُ $S.A = 30\pi$	$30\pi = 4\pi r^2$
أقسمُ طرفَيِ المعادلةِ على 4π	$r^2 = 7.5$
تعريفُ الجذرِ التربيعيِّ	$r = \pm\sqrt{7.5}$
أستعملُ الآلةَ الحاسبةَ	$= \pm 2.7$

وبِما أنَّ الطولَ لا يمكنُ أنْ يكونَ سالبًا، إذنْ، طولُ نصفِ قُطرِ الكرةِ يُساوي 2.7 m تقريبًا. أجدُ طولَ قُطرِها $(2r)$ كالآتي:

$$2r = 2 \times 2.7 = 5.4$$

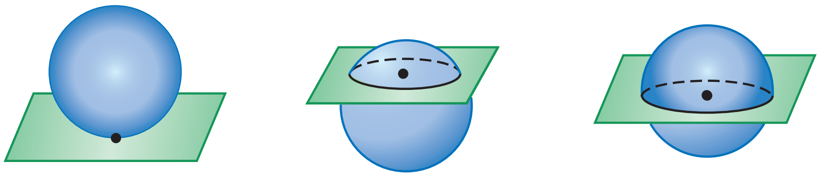
إذنْ، طولُ قُطرِ الكرةِ يُساوي 5.4 m تقريبًا.

أتحقّقُ من فهمي:

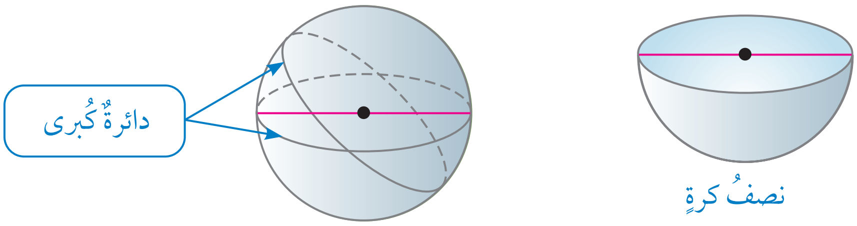

$S.A = 20.25\pi\ m^2$

أجدُ طولَ قُطرِ الكرةِ المجاورةِ إذا علمْتُ أنَّ مساحةَ سطحِها $20.25\pi\ m^2$ ، وأقرّبُ إجابتي لأقربِ جزءٍ مِنْ عشرةٍ.

إذا قطعَ مستوًى كرةً فإنَّهُ يقطعُها في نقطةٍ أَوْ في دائرةٍ، وإذا كانَ المستوى يحتوي مركزَ الكرةِ فعندَها يُسمّى هذا التقاطعُ **الدائرةَ الكُبرى** (great circle)، فالدائرةُ الكُبرى لَها مركزُ الكرةِ نفسُهُ، وطولُ نصفِ قُطرِها مساوٍ لطولِ نصفِ قُطرِ الكرةِ، ومحيطُها هُوَ محيطُ الكرةِ نفسُهُ.



تقسمُ كلُّ دائرةٍ كُبرى الكرةَ إلى نصفَينِ متطابقَينِ يُسمّى كلٌّ منهُما **نصفَ كرةٍ** (hemisphere).



أتعلّمُ

تحتوي الكرةُ عددًا لا نهائيًّا مِنَ الدوائرِ الكُبرى.

مثال 3: منَ الحياةِ

الكرةُ الأرضيةُ: يبلغُ طولُ خطِّ استواءِ الكرةِ الأرضيةِ حوالَيْ 40070 km تقريبًا. أجدُ مساحةَ سطحِ الكرةِ الأرضيةِ التقريبيةَ، مقرّبًا إجابتي لأقربِ جزءٍ مِنْ عشرةٍ.

بما أنَّ خطَّ الاستواءِ يمثّلُ محيطَ دائرةٍ كُبرى للكرةِ الأرضيةِ، فطولُهُ يمثّلُ محيطَ الكرةِ الأرضيةِ.

الخُطْوَةُ 1 أجدُ طولَ نصفِ قُطرِ الكرةِ الأرضيةِ.

صيغةُ محيطِ الدائرةِ $C = 2\pi r$

أعوّضُ $C = 40070$ $40070 = 2\pi r$

أستعملُ الآلةَ الحاسبةَ $r \approx 6377.3$

إذنْ، طولُ نصفِ قُطرِ الكرةِ الأرضيةِ 6377.3 km تقريبًا.

الخُطْوَةُ 2 أستعملُ نصفَ القُطرِ لإيجادِ مساحةِ سطحِ الكرةِ الأرضيةِ.

$S.A = 4\pi r^2$ صيغةُ مساحةِ سطحِ الكرةِ

$= 4\pi(6377.3)^2$ أعوّضُ $r = 6377.3$

≈ 511073731 أستعملُ الآلةَ الحاسبةَ

إذنْ، مساحةُ سطحِ الكرةِ الأرضيةِ $511073731\ km^2$ تقريبًا.

أتحققُ من فهمي:

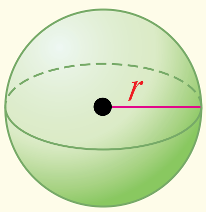
كرةٌ: يبلغُ محيطُ كرةٍ بلاسـتيكيةٍ 60 cm ، أجدُ مساحةَ سـطحِها التقريبيةَ مقربًا إجابتي لأقربِ عددٍ صحيحٍ.

يمكنُ إيجادُ حجمِ الكرةِ باستعمالِ القاعدةِ الآتيةِ:

مفهومٌ أساسيٌّ — حجمُ الكرةِ

- **بالكلماتِ:** حجمُ الكرةِ (V) يُساوي حاصلَ ضربِ $\frac{4}{3}\pi$ في مكعبِ طولِ نصفِ قُطرِها.
- **بالرموزِ:** $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

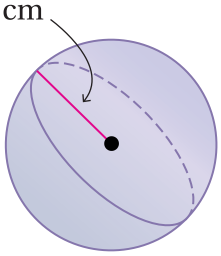
حيثُ r طولُ نصفِ قُطرِ الكرةِ.



مثال 4

أجدُ حجمَ كلِّ كرةٍ أَوْ نصفِ كرةٍ ممّا يأتي، مقرّبًا إجابتي لأقربِ عددٍ صحيحٍ:

1



$V = \frac{4}{3}\pi r^3$ صيغةُ حجمِ الكرةِ

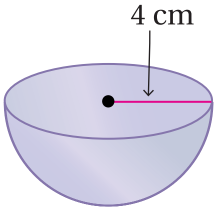
$= \frac{4}{3}\pi(8)^3$ أعوّضُ $r = 8$

$= \frac{2048}{3}\pi$ أبسّطُ

≈ 2145 أستعملُ الآلةَ الحاسبةَ

إذنْ، حجمُ الكرةِ $2145\ cm^3$ تقريبًا.

2

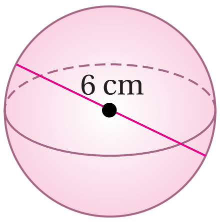


صيغةُ حجمِ نصفِ الكرةِ	$V = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)$
أعوّضُ $r = 4$	$= \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\pi (4)^3\right)$
أبسّطُ	$= \frac{128}{3}\pi$
أستعملُ الآلةَ الحاسبةَ	≈ 134

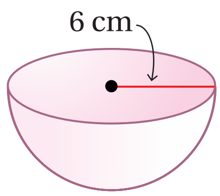
إذنْ، حجمُ نصفِ الكرةِ $134\ \text{cm}^3$ تقريبًا.

أتحققُ من فهمي:

3

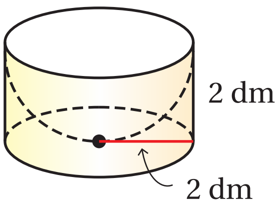


4



يمكنُ إيجادُ حجمِ المجسّمِ المركّبِ بتحديدِ الأشكالِ الهندسيةِ الّتي يتكوّنُ مِنْها والعمليةِ الحسابيةِ اللازمةِ لإيجادِ حجمِهِ.

مثال 5



المجسّمُ المجاورُ أُسطوانةٌ تحتوي نصفَ كرةٍ مفرغةٍ، أجدُ حجمَ الجزءِ المتبقي مِنَ الأُسطوانةِ دونَ نصفِ الكرةِ مقرّبًا إجابتي لأقربِ جزءٍ مِنْ مئةٍ.

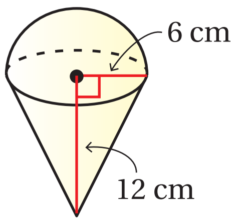
لإيجادِ حجمِ الجزءِ المتبقّي مِنَ الأُسطوانةِ دونَ نصفِ الكرةِ (V)، أطرحُ حجمَ نصفِ الكرةِ (V_2) مِنْ حجمِ الأُسطوانةِ (V_1)

صيغةُ حجمِ المجسّمِ	$V = V_1 - V_2$
بتعويضِ صيغتَيْ حجمِ الأسطوانةِ وحجمِ نصفِ الكرةِ	$= \pi r^2 h - \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)$
أعوّضُ $r = 2, h = 2$	$= \pi(2)^2(2) - \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\pi (2)^3\right)$
أبسّطُ	$= 8\pi - \frac{16}{3}\pi$
أطرحُ	$= \frac{8}{3}\pi$
أستعملُ الآلةَ الحاسبةَ	≈ 8.38

إذنْ، حجمُ المجسّمِ $\frac{8}{3}\pi\ \text{dm}^3$ أوْ $8.38\ \text{dm}^3$ تقريبًا.

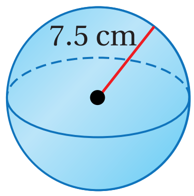
أتحققُ من فهمي:

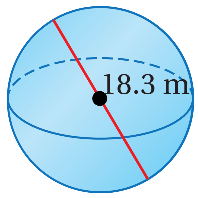
أجدُ حجمَ المجسّـــمِ المجاورِ، المكوّنِ مِنْ مخروطٍ ارتفاعُهُ 12 cm يعلوهُ نصفُ كرةٍ طولُ نصفِ قُطرِها 6 cm ، مقرّبًا إجابتي لأقربِ جزءٍ مِنْ مئةٍ.

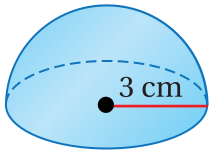


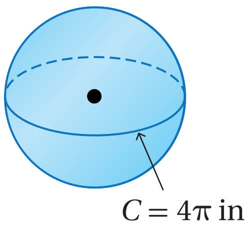
أتدرب وأحل المسائل

أجدُ مســاحةَ ســطحِ كلِّ كرةٍ أَوْ نصفِ كرةٍ ممّا يأتي، وأقرّبُ إجابتي لأقربِ جزءٍ مِنْ عشرةٍ:

1 

2 

3 

4 

إرشادٌ

لإيجادِ مساحةِ سطحِ نصفِ الكـــرةِ، لا أنســى إضافــةَ مساحةِ الدائرةِ الكُبرى.

أجدُ طولَ قُطرِ الكرةِ في كلٍّ مِنَ الحالاتِ الآتيةِ، مقرّبًا إجابتي لأقربِ جزءٍ مِنْ عشرةٍ:

5 كرةٌ مساحةُ سطحِها $200\ cm^2$

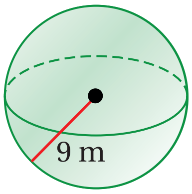
6 كرةٌ حجمُها $200\ cm^3$

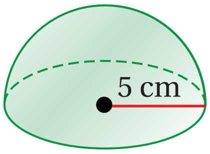
7 كرةٌ حجمُها $50\ m^3$

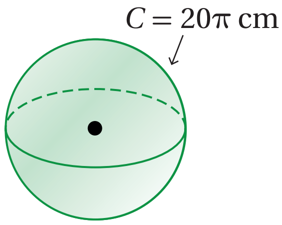
إرشادٌ

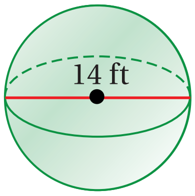
لإيجادِ طولِ نصـــفِ قُطرِ الكرةِ في الســـؤالَينِ 7 وَ 6 أحلُّ المعادلةَ بأخذِ الجذرِ التكعيبيِّ للطرفَينِ.

أجدُ حجمَ كلِّ كرةٍ أَوْ نصفِ كرةٍ ممّا يأتي، مقرّبًا إجابتي لأقربِ عددٍ صحيحٍ:

8 

9 

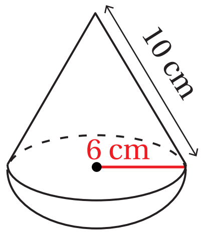
10 

11 

معلومةٌ

تُعدُّ لعبةُ الغزلِ مِنْ أقدمِ الألعابِ الّتي اكتشفَها علماءُ الآثارِ، حيثُ يعودُ تاريخُها إلى القرنِ الخامسِ والثلاثينَ قبلَ الميلادِ.

ألعابٌ: **يتكوّنُ الجزءُ العُلويُّ مِنْ لعبةِ الغزلِ المجاورةِ مِنْ مخروطٍ ونصفِ كرةٍ. أجدُ بدلالةِ π :**

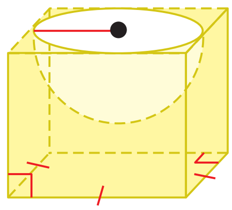


12 حجمَ لعبةِ الغزلِ.

13 المساحةَ الكلّيّةَ لسطحِ لعبةِ الغزلِ.

14 كرةٌ معدِنيةٌ طولُ نصفِ قُطرِها 15 cm، صُهِرَتْ وأُعيدَ تشكيلُها لأُسطوانةٍ طولُ نصفِ قُطرِها 6 cm، أجدُ ارتفاعَ الأُسطوانةِ.

15 مكعبٌ طولُ ضلعِهِ 5 cm يحتوي نصفَ كرةٍ مفرغةٍ طولُ نصفِ قُطرِها 2.5 cm، أجدُ حجمَ الجزءِ المتبقّي مِنَ المكعبِ مقرّبًا إجابتي لأقربِ عددٍ صحيحٍ.



مهاراتُ التفكيرِ العُليا

16 **تبريرٌ:** ما عددُ مستوياتِ التماثلِ للكرةِ؟ أبرّرُ إجابتي.

17 **تحدٍّ:** تصنعُ شركةٌ كراتٍ صغيرةً مِنَ الفولاذِ المقاومِ للصدأِ (سْتيل) لعجلاتِ الأحذيةِ طولُ قُطرِ كُلٍّ مِنْها 4 mm، أجدُ عددَ الكراتِ الصغيرةِ الّتي يمكنُ للشركةِ تصنيعُها مِنْ 1 مترًا مكعبًا مِنَ (سْتيل).

18 **تحدٍّ:** كرةٌ طولُ قُطرِها 10 cm نُحِتَتْ مِنْ مكعبٍ خشبيٍّ طولُ ضلعِهِ 10 cm، أحسبُ النسبةَ المئويةَ لكمّيّةِ الخشبِ المهدورِ.

19 **أكتبُ** كيفَ أجدُ مساحةَ سطحِ كُرةٍ وحجمَها إذا علمْتُ طولَ نصفِ قُطرِها؟

اختبارُ نهايةِ الوحدةِ

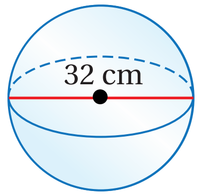
أختارُ رمزَ الإجابةِ الصحيحةِ لكلٍّ ممّا يأتي:

1 أحدُ الأشــكالِ الآتيةِ لا ينتجُ مِــنْ تقاطعِ مكعبٍ مَعَ مستوًى:

a) المثلثُ **b)** المستطيلُ

c) النقطةُ **d)** الدائرةُ

2 مساحةُ السطحِ التقريبيةُ للكرةِ المجاورةِ تُساوي:



a) $3217\ cm^2$ **b)** $4287\ cm^2$

c) $12861\ cm^2$ **d)** $17149\ cm^2$

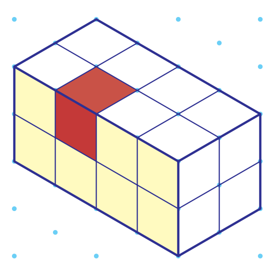
3 إذا كانَــتْ مســاحةُ الدائــرةِ الكُبرى لكرةٍ تُســاوي $33\ cm^2$، فإنَّ مساحةَ سطحِ الكرةِ تُساوي:

a) $42\ cm^2$ **b)** $132\ cm^2$

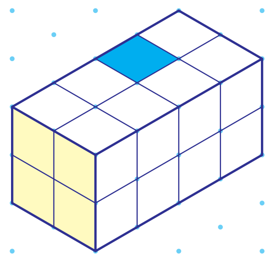
c) $117\ cm^2$ **d)** $264\ cm^2$

4 ما عددُ مكعباتِ الوَحدةِ الّتي يتكوّنُ مِنْها المجسّــمُ أدناهُ؟

5 إذا أُزيلَ المكعــبُ الملوّنُ بالأحمرِ مِنَ المجسّــمِ، فأرســمُ الشــكلَ الجديدَ على ورقةٍ منقّطةٍ متساويةِ القياسِ.



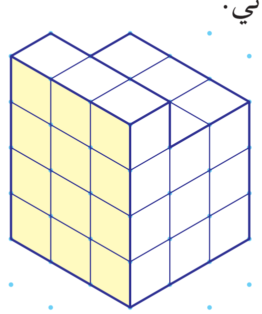
6 إذا وُضِعَ مكعبُ وَحدةٍ فوقَ متوازي المســتطيلاتِ الآتي ليغطّيَ المربعَ باللّونِ الأزرقِ، فأرســمُ الشكلَ الجديدَ على ورقةٍ منقّطةٍ متساويةِ القياسِ.



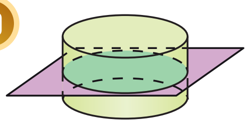
7 أرســمُ على ورقةٍ منقّطةٍ متســاويةِ القيــاسِ متوازيَ مســتطيلاتٍ طولُهُ 4 وَحداتٍ، وعرضُهُ 4 وَحداتٍ، وارتفاعُهُ 7 وَحداتٍ.

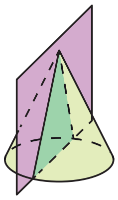
8 أرســمُ على ورقةٍ منقّطةٍ متســاويةِ القيــاسِ متوازيَ مســتطيلاتٍ طولُهُ 4 وَحــداتٍ وعرضُــهُ وحدتانِ، وارتفاعُهُ 6 وَحداتٍ.

9 أرســمُ المَســاقطَ: العُلويَّ، والأمامــيَّ، والجانبيَّ، للمجسّمِ الآتي:

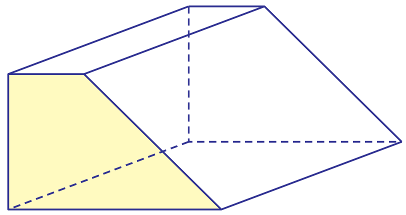


أحدّدُ المقطعَ الناتجَ مِنْ تقاطعِ المســتوى والمجسّمِ في كلٍّ ممّا يأتي، وأحدّدُ أيُّ المقاطعِ هوَ مقطعٌ عرضيٌّ:

10 

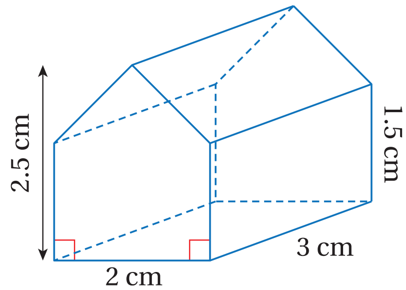
11 

12 يبيّنُ الشكلُ الآتي منشورًا مقطعُهُ العرضيُّ شبهُ منحرفٍ، أحدّدُ عددَ مستوياتِ تماثلِ المنشورِ.

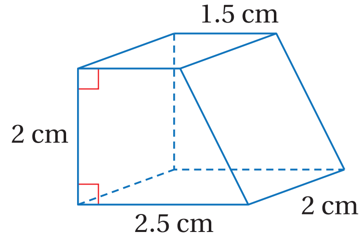


أرسمُ المَساقطَ: العُلويَّ، والأماميَّ، والجانبيَّ، لكلٍّ مِنَ المجسّماتِ الآتيةِ: (أرسمُ كلَّ مسقطٍ بأبعادِهِ الحقيقيةِ)

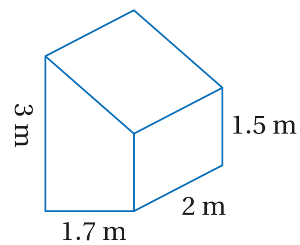
13



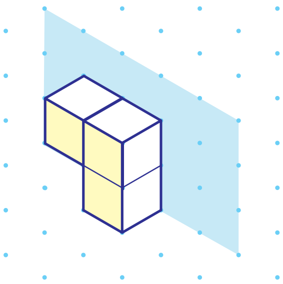
14



15 أجدُ حجمَ المنشورِ الآتي:

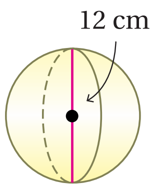


16 أُكملُ رسمَ المجسّمِ في الشكلِ المجاورِ، علمًا بأنَّ المستوى المظلّلَ مستوى تماثلٍ.

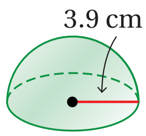


أجدُ مساحةَ سطحِ كُلِّ كرةٍ أَوْ نصفِ كرةٍ ممّا يأتي، ثُمَّ أجدُ حجمَها، وأقرّبُ إجاباتي لأقربِ جزءٍ مِنْ مئةٍ:

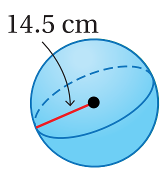
17



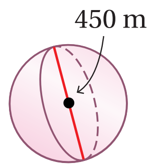
18



19



20



تدريبٌ على الاختباراتِ الدّوليّةِ

21 ما قُطرُ الكرةِ الّتي مساحةُ سطحِها $100\,\pi\ m^2$؟

a) 5 m **b)** 10 m

c) $5\,\pi$ m **d)** $25\,\pi$ m

22 أيُّ المجسّماتِ الآتيةِ لَهُ عددٌ لا نهائيٌّ مِنْ مستوياتِ التماثلِ؟

a) هرمٌ ثلاثيٌّ منتظمٌ

b) متوازي مستطيلاتٍ

c) أُسطوانةٌ

d) منشورٌ سداسيٌّ منتظمٌ

الوحدةُ 9

الإحصاءُ والاحتمالاتُ

ما أهميَّةُ هذهِ الوحدةِ؟

برزَتْ أهميةُ الإحصاءِ والاحتمالاتِ حديثًا بسببِ الاعتمادِ المتزايدِ على الحواسيبِ في شَتّى مجالاتِ الحياةِ، فنتجَ عَنْ ذلكَ بياناتٌ كبيرةٌ نحتاجُ إلى تحليلِها، وفهمِها؛ لنتّخذَ قراراتٍ صحيحةً بناءً عليها. وسأتعلمُ في هذِهِ الوَحدةِ مهاراتٍ إحصائيةً كثيرةً ستساعدُني على اتّخاذِ قراراتٍ صحيحةٍ في حَياتي.

تعلَّمتُ سابِقًا:

✓ إيجادَ الوسيطِ والمَدى لمجموعةٍ مِنَ البياناتِ.

✓ تمثيلَ مجموعةٍ مِنَ البياناتِ بالقطاعاتِ الدائريةِ، والجداولِ التّكراريةِ، والمخطّطاتِ التّكراريةِ، ومخطّطاتِ السّاقِ والورقةِ.

✓ إيجادَ احتمالِ وقوعِ الحوادثِ.

سأتعلَّمُ في هذهِ الوحدةِ:

- تمثيلَ بياناتٍ بالصُّندوقِ ذي العارضتَينِ، وتفسيرَها.
- اختيارَ التمثيلِ الأنسبِ لمجموعةٍ مِنَ البياناتِ.
- إيجادَ الفضاءِ العَينيِّ لتجربةٍ عشوائيةٍ.
- إيجادَ احتمالِ حادثٍ مركّبٍ.

مشروعُ الوحدةِ: جمعُ البياناتِ، وتحليلُها

أستعدُّ ومجموعتي لتنفيذِ مشروعِيَ الخاصِّ الّذي سنستعملُ فيهِ ما سنتعلّمُهُ في هذِهِ الوَحدةِ لجمعِ بياناتٍ، وتحليلِها، وكتابةِ استنتاجاتٍ حولَها.

خُطواتُ تنفيذِ المشروعِ:

1. أختارُ موضوعًا شائقًا، وأكتبُ ثلاثةَ أسئلةٍ إحصائيةٍ حولَهُ تكونُ إجاباتُها بياناتٍ عدديةً، وسؤالَينِ إحصائيَّينِ تكونُ إجاباتُهُما بياناتٍ نوعيةً. مثلًا، قَدْ يكونُ الموضوعُ (الحفاظُ على البيئةِ) أَوْ (خطرُ التدخينِ).
2. أصمّمُ استبانةً بطريقةٍ جاذبةٍ، وأكتبُ فيها الأسئلةَ الإحصائيةَ الّتي أعددْتُها، ثُمَّ أطبعُ 20 نسخةً مِنْها على الأقلِّ.
3. أطلبُ إلى 20 طالبًا / طالبةً في مدرستي الإجابةَ عَنْ فقراتِ الاستبانةِ.
4. أجدُ للبياناتِ العدديةِ الّتي حصلْتُ عليها:
   - مقاييسَ النّزعةِ المركزيةِ (الوسطَ الحسابيَّ، والوسيطَ، والمِنوالَ).
   - المَدى، والرُّبَيعِيّاتِ، والمَدى الرُّبَيعيَّ.
5. أمثّلُ البياناتِ بالصُّندوقِ ذي العارضتَينِ.
6. أحدّدُ القِيَمَ المتطرّفةَ لكلِّ مجموعةِ بياناتٍ (إنْ وُجِدَتْ).
7. أمثّلُ البياناتِ الّتي حصلْتُ عليها مِنْ إجاباتِ كلِّ سؤالٍ باستعمالِ إحدى طرائقِ تمثيلِ البياناتِ الّتي تعلمْتُها سابقًا، وأبرّر اختيارَ كلِّ تمثيلٍ.

8. أكتبُ استنتاجًا اعتمادًا على إجاباتِ الطلبةِ عَنْ كلِّ سؤالٍ.
9. أصفُ حادثًا بسيطًا وحادثًا مركّبًا حولَ البياناتِ النوعيةِ الّتي حصلْتُ عليها.

عرضُ النتائجِ:

- أكتبُ تقريرًا أضمّنُهُ الأسئلةَ الإحصائيةَ الّتي كتبْتُها، بحيثُ يَلي كلَّ سؤالٍ التمثيلُ الإحصائيُّ للبياناتِ الّتي حصلْتُ عليها مِنْ إجاباتِ السؤالِ، والاستنتاجَ الّذي وضعْتُهُ حولَ هذِهِ البياناتِ.
- أضمّنُ التقريرَ مقاييسَ النّزعةِ المركزيةِ، ومقاييسَ التشتّتِ، والقِيَمَ المتطرّفةَ لكلِّ مجموعةِ بياناتٍ.
- أناقشُ مَعَ زملائي / زميلاتي صحّةَ الاستنتاجاتِ الّتي توصلْتُ إليها.

الدرسُ 1 الرُّبَيعِيّاتُ

فكرةُ الدرسِ

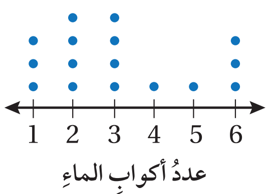
- أتعرفُ المَدى الرُّبَيعيَّ وعلاقتَهُ بتشتّتِ البياناتِ.
- أمثّلُ بياناتٍ بالصُّندوقِ ذي العارضتَينِ، وأفسّرُها.

المصطلحاتُ

مقاييسُ التشتّتِ، المَدى، الرُّبَيعِيّاتُ، المَدى الرُّبَيعِيُّ، الرُّبيعُ الأدنى، الرُّبيعُ الأعلى، القيمةُ المتطرّفةُ، الصُّندوقُ ذو العارضتَينِ.

أستكشفُ

سألَتْ هديلُ مجموعةً مِنْ طالباتِ صفِّها عَنْ عددِ أكوابِ الماءِ الّتي تشربُها كلُّ واحدةٍ منهُنَّ في اليومِ، ومثّلَتْ ما حصلَتْ عليهِ بِالنقاطِ كما في الشكلِ المجاورِ:



1) أجدُ وسيطَ هذِهِ البياناتِ.

2) أرتّبُ البياناتِ في مجموعتَينِ: مجموعةِ النصفِ الأعلى، ومجموعةِ النصفِ الأدنى. ما عددُ القِيَمِ في كلِّ مجموعةٍ؟

3) أجدُ الوسيطَ لكلِّ مجموعةٍ.

4) وضعَتْ هديلُ الفرضيةَ الآتيةَ، هَلِ الفرضيةُ الّتي وضعَتْها هديلُ صحيحةٌ؟

يشربُ رُبعُ مجموعةِ الطالباتِ كوبَيْ ماءٍ أَوْ أقلَّ في اليومِ.

تُستعمَلُ **مقاييسُ التشتّتِ** (measures of variation) لوصفِ مقدارِ تشتّتِ البياناتِ وتباعدِها. ويُعَدُّ **المَدى** (range) أحدَ مقاييسِ التشتّتِ، وهوَ يُساوي الفرقَ بَيْنَ أكبرِ قِيَمِ البياناتِ وأصغرِها، ويُرمَزُ إليهِ بالرمزِ R.

أتذكّرُ

الوسطُ الحسابيُّ والوسيطُ والمِنوالُ هِيَ مقاييسُ نزعةٍ مركزيةٍ وَتصفُ مركزَ البياناتِ بطرائقَ مختلفةٍ.

الرُّبَيعِيّاتُ (quartiles) قِيَمٌ تقسمُ البياناتِ إلى أربعِ مجموعاتٍ متساويةٍ تحوي كلٌّ منها رُبعَ البياناتِ، إذْ يقسمُ الوسيطُ البياناتِ إلى مجموعتَينِ متساويتَينِ.

النصفُ الأدنى | الوسيطُ $Q_2 = 29$ | النصفُ الأعلى

18 21 22 24 28 | 30 31 32 36 37

وسيطُ النصفِ الأعلى مِنَ البياناتِ، ويُسمّى **الرُّبَيعَ الأعلى** (upper quartile)، ويُرمزُ إليهِ بالرمزِ Q_3، وربُعُ البياناتِ يزيدُ عليهِ أَوْ يُساويهِ.

وسيطُ النصفِ الأدنى مِنَ البياناتِ، ويُسمّى **الرُّبَيعَ الأدنى** (lower quartile)، ويُرمزُ إليهِ بالرمزِ Q_1، وربُعُ البياناتِ يقلُّ عنهُ أَوْ يُساويهِ.

أســـتنتجُ ممّا ســـبقَ أنَّ النصفَ الأوســـطَ مِنَ البياناتِ يقعُ بَيْنَ الرُّبَيعَينِ: الأعلى، والأدنى، وهذا يقودُنا إلى مقياسٍ آخَرَ مِنْ مقاييسِ التشتّتِ هوَ **المَدى الرُّبَيعِيُّ** (interquartile range) الّذي يُرمَزُ إليهِ بالرمزِ (IQR).

مفهومٌ أساسيٌّ — المَدى الرُّبَيعِيُّ

- **بالكلماتِ:** المَـدى الرُّبَيعِيُّ هوَ مَدى النصفِ الأوسـطِ مِنَ البيانـاتِ، وهوَ الفرقُ بَيْـنَ الرُّبَيعَينِ: الأعلى، والأدنى.
- **بالرموزِ:** $IQR = Q_3 - Q_1$

مثال 1: منَ الحياةِ

محافظاتٌ: يبيّنُ الجدولُ المجاورُ مِسـاحاتِ المحافظاتِ الأردنيةِ مقرَّبةً إلى أقربِ جزءٍ مِنْ عشَرةٍ.

مِساحاتُ المحافظاتِ الأردنيةِ

المحافظةُ	المِساحةُ (بآلافِ الكيلومتراتِ المربعةِ)
عجلونُ	0.4
عمّانُ	7.5
العقبةُ	6.9
البلقاءُ	1.1
إربدُ	1.5
جرشُ	0.4
الكركُ	3.4
معانُ	32.8
مأدبا	0.9
المفرقُ	26.5
الطفيلةُ	2.2
الزرقاءُ	4.7

1 أجدُ المَدى.

الخُطْوَةُ 1 أرتّبُ البياناتِ تصاعديًّا.

0.4, 0.4, 0.9, 1.1, 1.5, 2.2, 3.4, 4.7, 6.9, 7.5, 26.5, 32.8

الخُطْوَةُ 2 أجدُ المَدى.

أكبرُ قِيَمِ البياناتِ 32.8 وأصغرُها هي 0.4، إذنِ المَدى هوَ:

$$R = 32.8 - 0.4 = 32.4$$

2 أجدُ المَدى الرُّبَيعِيَّ (IQR).

$$Q_2 = \frac{2.2 + 3.4}{2} = 2.8$$

النصفُ الأدنى: 0.4, 0.4, 0.9, 1.1, 1.5, 2.2

النصفُ الأعلى: 3.4, 4.7, 6.9, 7.5, 26.5, 32.8

$$Q_1 = \frac{0.9 + 1.1}{2} = 1 \qquad Q_3 = \frac{6.9 + 7.5}{2} = 7.2$$

$$IQR = Q_3 - Q_1 = 7.2 - 1 = 6.2$$

إذنْ، المَدى الرُّبَيعِيُّ (IQR) للبياناتِ هوَ 6.2

3 أستعملُ المَدى والمَدى الرُّبَيعِيَّ لوصفِ البياناتِ.

مَـدى هذِهِ البيانـاتِ 32.4 ألفَ كيلومترٍ مربعٍ، ورُبعُ محافظاتِ المملكةِ مِسـاحاتُها ألفُ كيلومترٍ مربـعٍ أَوْ أقلُّ، ورُبعُ المحافظاتِ أيضًا مسـاحاتُها 7.2 آلافِ كيلومترٍ مربعٍ أَوْ أكثرُ، وتتراوحُ مِسـاحاتُ النصفِ الأوسطِ مِنَ المحافظاتِ بَيْنَ ألفِ كيلومترٍ مربعٍ وَ 7.2 آلافِ كيلومترٍ مربعٍ، ولا تتجاوزُ الفروقُ بَيْنَ مِساحاتِها 6.2 آلافِ كيلومترٍ مربعٍ.

أتحققُ من فهمي:

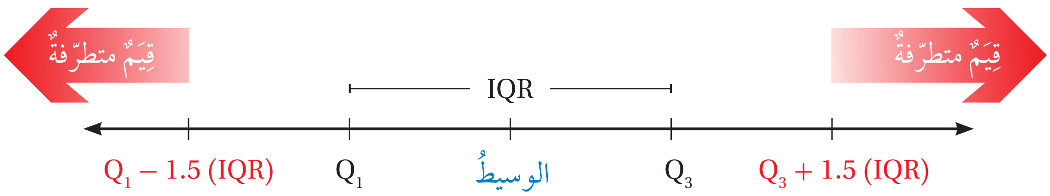
يبيّنُ الجدولُ المجاورُ عددَ النقاطِ الّتي سجّلَها فريقُ كرةِ سلةٍ في أحدِ المواسمِ:

عددُ النقاطِ				
64	61	67	59	60
58	57	71	56	62

4 أجدُ المَدى. **5** أجدُ المَدى الرُّبَيعِيَّ.

6 أستعملُ المَدى والمَدى الرُّبَيعِيَّ لوصفِ البياناتِ.

القيمةُ المتطرّفةُ (outlier) هِيَ قيمةٌ أكبرُ بكثيرٍ أَوْ أقلُّ بكثيرٍ مِنْ قيمةِ الوسيطِ، وتُعَدُّ أَيُّ قيمةٍ تقلُّ عَنِ المقدارِ $Q_1 - 1.5(IQR)$ أَوْ تزيدُ على المقدارِ $Q_3 + 1.5(IQR)$ قيمةً متطرّفةً.



مثال 2

أجـدُ القِيَمَ المتطرّفةَ (إنْ وُجِـدَتْ) في البياناتِ الممثَّلةِ بمخطّطِ السّـاقِ والورقةِ المجاورِ.

الساقُ	الورقةُ
1	2 2 7
2	3 3 3 4 4 5 6 6 8 8 9
3	0 1 4 6
4	0 6

المفتاحُ: **1|2 = 12**

الْخُطْوَةُ 1 أجدُ الرُّبَيعِيّاتِ.

أسـتعملُ الأقواسَ لتحديدِ النصفِ العلويِّ والسـفليِّ مِنَ القِيَمِ، ثُـمَّ أحدّدُ القِيَمَ اللازمةَ لإيجادِ الرُّبَيعِيّاتِ.

الساقُ	الورقةُ
1	2 2 7
2	3 3 3 4 4 5 6 6 8 8 9
3	0 1 4 6
4	0 6

المفتاحُ: **1|2 = 12**

$$Q_1 = \frac{23 + 23}{2} = 23 \qquad Q_3 = \frac{30 + 31}{2} = 30.5$$

الْخُطْوَةُ 2 أجدُ المَدى الرُّبَيعِيَّ.

$$IQR = Q_3 - Q_1 = 30.5 - 23 = 7.5$$

الْخُطْوَةُ 3 أحدّدُ القِيَمَ المتطرّفةَ (إنْ وُجدَتْ).

$$Q_1 - 1.5(IQR) = 23 - 1.5(7.5) = 11.75$$

$$Q_3 + 1.5(IQR) = 30.5 + 1.5(7.5) = 41.75$$

بما أنَّ البياناتِ لا تحتوي قيمةً أقلَّ مِنْ 11.75، لكنَّها تحتوي القيمةَ 46 وهيَ أكبرُ مِنْ 41.75، إذنِ القيمةُ المتطرّفةُ الوحيدةُ هِيَ 46

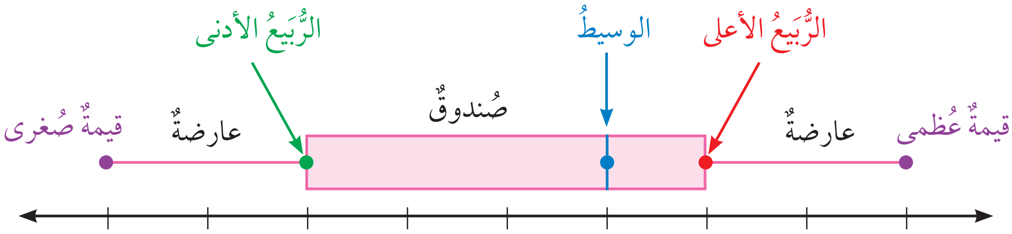
أتحقّقُ من فهمي:

أجدُ القِيَمَ المتطرّفةَ (إنْ وُجدَتْ) للبياناتِ الممثَّلةِ بمخطّطِ السّاقِ والورقةِ المجاورِ.

السّاقُ	الورقةُ
5	3 6 8
6	5 8
7	0 3 7 7 9
8	1 4 8 8 9
9	9

المفتاحُ: $5|3 = 53$

يُستعمَلُ **الصُّندوقُ ذو العارضتَيْنِ** (box–and–whisker plot) لتمثيلِ البياناتِ باستعمالِ القيمتَيْنِ العظمى والصُّغرى ورُبَيعِيّاتِ البياناتِ.



أتعلّمُ

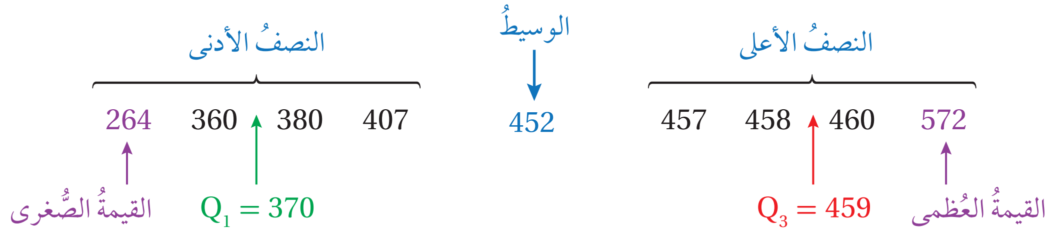
يُستعمَلُ الصُّندوقُ ذو العارضتَيْنِ لتحديدِ مَدى انتشارِ (تباعدِ) البياناتِ.

مثال 3: منَ الحياةِ

برتقالٌ: أستعملُ الصُّندوقَ ذا العارضتَيْنِ لتمثيلِ عددِ صناديقِ البرتقالِ الّتي أنتجَتْها مزرعةٌ خلالَ 9 سنواتٍ:

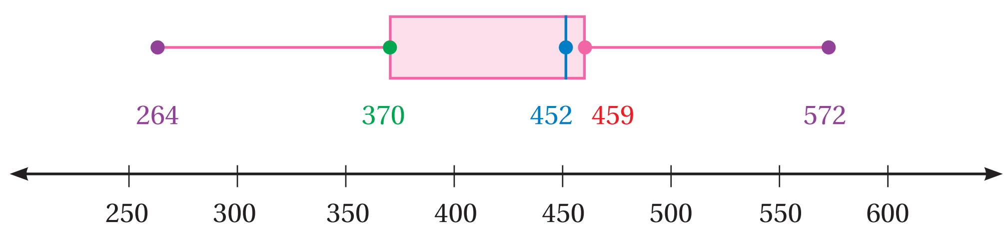
572, 452, 457, 460, 360, 407, 380, 458, 264

الْخُطْوَةُ 1 أرتّبُ البياناتِ تصاعديًّا، وأجدُ الوسيطَ، والرُّبَيعِيّاتِ، والقيمتَينِ: العُظمى، والصُّغرى:



الْخُطْوَةُ 2 أرســـمُ خطَّ أعدادٍ، وأعيّنُ عليهِ نقاطًا تمثّلُ كلًّا مِنَ: القيمتَينِ العُظمى والصُّغرى، والوسيطِ، والرُّبَيعِ الأدنى، والرُّبَيعِ الأعلى.

الْخُطْوَةُ 3 أرســـمُ صُندوقًا باستعمالِ الرُّبَيعِيّاتِ، ثُمَّ أرسمُ خطًّا رأســيًّا داخلَ الصُّندوقِ يمرُّ بالوسيطِ، ثُمَّ أرسمُ العارضتَينِ مِنَ الصُّندوقِ إلى القيمتَينِ: العُظمى، والصُّغرى.

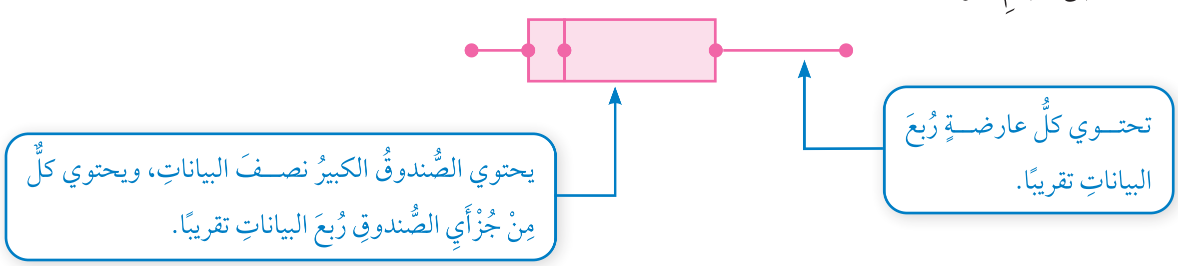


أتحققُ من فهمي:

أستعملُ الصُّندوقَ ذا العارضتَينِ لتمثيلِ البياناتِ الآتيةِ الّتي تمثّلُ أعمارَ المعلّمينَ في إحدى المدارسِ:

30, 52, 26, 35, 45, 22, 49, 32, 28, 50, 42, 35

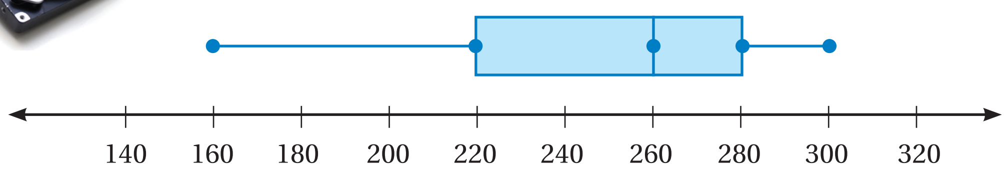
يقسّـــمُ الصُّندوقُ ذو العارضتَينِ البيانـــاتِ إلى أربعةِ أجزاءٍ: جُزْأَيِ الصُّندوقِ، والعارضتَيـــنِ. ويحتوي كلُّ جزءٍ مِنَ الأجزاءِ الأربعةِ العددَ نفسَهُ مِنَ القِيَمِ تقريبًا.



تدلُّ أطوالُ أجزاءِ مخطّطِ الصُّندوقِ ذي العارضتَينِ على مقدارِ تشـــتّتِ البياناتِ، فكلّما زادَ طولُ الصُّندوقِ أَوْ طولُ عارضتَيهِ ازدادَتِ البياناتُ انتشارًا وتباعدًا.

مثال 4: منَ الحياةِ

أقراصُ تخزينٍ: يبيّنُ الصُّندوقُ ذو العارضتَينِ أدناهُ سَعةَ تخزينِ مجموعةٍ مِنَ الأقراصِ الصُّلبةِ بوَحدةِ الجيجابايتِ:



1 أصفُ توزيعَ البياناتِ.

بِما أنَّ كلَّ عارضةٍ تمثّلُ رُبعَ البياناتِ، ويمثّلُ الصُّندوقُ نصفَ البياناتِ، إذنْ:

- تتراوحُ سَعةُ رُبعِ الأقراصِ الصُّلبةِ بَيْنَ 160 وَ 220 جيجابايتًا.
- تتراوحُ سَعةُ نصفِ الأقراصِ الصُّلبةِ بَيْنَ 220 وَ 280 جيجابايتًا.
- تتراوحُ سَعةُ رُبعِ الأقراصِ الصُّلبةِ بَيْنَ 280 وَ 300 جيجابايتٍ.

2 أجدُ المَدى الرُّبَيعِيَّ للبياناتِ.

$$IQR = Q_3 - Q_1 = 280 - 220 = 60$$

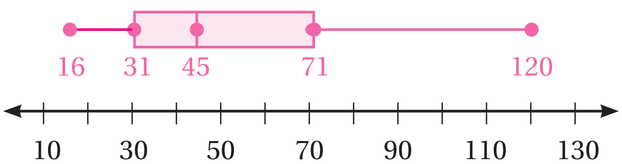
إذنْ، المَدى الرُّبَيعِيُّ 60 جيجابايتًا، وهذا يعني أنَّ النصفَ الأوسطَ مِنْ أقراصِ التخزينِ لا تتجاوزُ الفروقُ بَيْنَ سَعاتِها 60 جيجابايتًا.

3 هَلِ البياناتُ أكثرُ تشتّتًا أسفلَ الرُّبَيعِ الأدنى أَمْ فوقَ الرُّبَيعِ الأعلى؟ أبرّرُ إجابتي.

بِما أنَّ العارضةَ السُّفلى أطولُ مِنَ العارضةِ العُليا، فهذا يعني أنَّ البياناتِ أسفلَ الرُّبَيعِ الأدنى أكثرُ تشتّتًا مِنَ البياناتِ فوقَ الرُّبَيعِ الأعلى.

أتحققُ من فهمي:

ساعاتٌ: يبيُّن تمثيلُ الصُّندوقِ ذي العارضتَينِ المجاورُ أسعارَ الساعاتِ في أحدِ المحالِّ بالدينارِ.



4 أصفُ توزيعَ البياناتِ.

5 أجدُ المَدى الرُّبَيعِيَّ للبياناتِ.

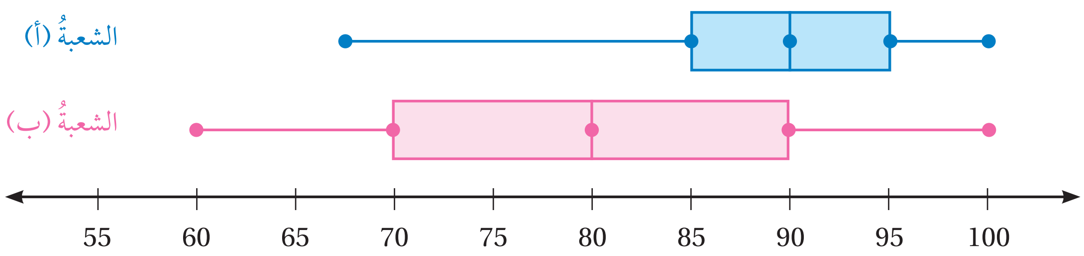
6 هَلِ البياناتُ أكثرُ تشتّتًا أسفلَ الرُّبَيعِ الأدنى أَمْ فوقَ الرُّبَيعِ الأعلى؟ أبرّرُ إجابتي.

يمكنُ استعمالُ الصُّندوقِ ذي العارضتَينِ المزدوجِ للمقارنةِ بَيْنَ مجموعتَيْ بياناتٍ.

مثال 5: منَ الحياةِ

علاماتٌ: يبيّنُ تمثيلُ الصُّندوقِ ذي العارضتَينِ المزدوجِ أدناهُ علاماتِ طلبةِ الصّفِّ الثامنِ في مادّةِ الرياضياتِ في الشعبتَينِ (أ) وَ (ب) في إحدى المدارسِ:

1 أيُّ الشعبتَينِ علاماتُ الطلبةِ فيها أكثرُ تشتّتًا؟ أبرّرُ إجابتي.



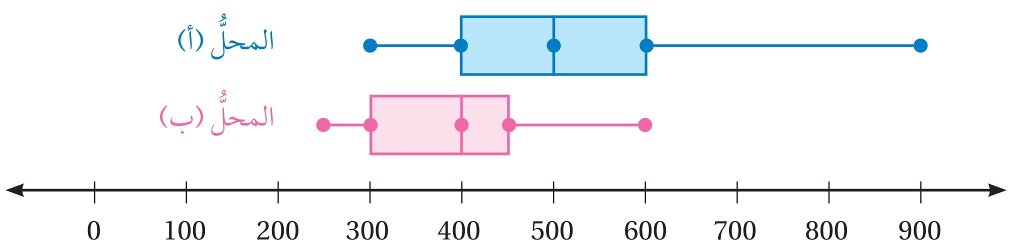
ألاحظُ أنَّ المَدى والمَدى الرُّبَيعِيَّ لعلاماتِ الطلبةِ في الشعبةِ (ب) أكبرُ مِنَ المَدى والمَدى الرُّبَيعِيِّ في الشعبةِ (أ)، ومنهُ فإنَّ علاماتِ الطلبةِ في الشعبةِ (ب) أكثرُ تشتّتًا.

2 أيُّ الشعبتَينِ علاماتُ الطلبةِ فيها أفضلُ؟ أبرّرُ إجابتي.

علاماتُ الطلبةِ أفضلُ في الشعبةِ (أ)؛ لأنَّ نصفَ الطلبةِ حصلوا على علامةِ 90 فأكثرَ، في حينِ أنَّ رُبعَ الطلبةِ فقطْ في الشعبةِ (ب) حصلوا على علامةِ 90 فأكثرَ.

أتحققُ من فهمي:

هواتفُ: يبيّنُ تمثيلُ الصُّندوقِ ذي العارضتَينِ المزدوجِ أدناهُ أسعارَ الهواتفِ النقّالةِ بالدينارِ في المحلَّينِ (أ) وَ (ب):



3 أيُّ المحلَّينِ أسعارُ الهواتفِ فيهِ أكثرُ تشتّتًا؟ أبرّرُ إجابتي.

4 أيُّ المحلَّينِ أسعارُ الهواتفِ فيهِ أعلى؟ أبرّرُ إجابتي.

أتدرب وأحل المسائل

أجدُ المَدى والرُّبَيعِيّاتِ والمَدى الرُّبَيعِيَّ لكلِّ مجموعةِ بياناتٍ ممّا يأتي:

1. 85, 77, 58, 69, 62, 73, 55, 82, 67, 77, 59, 92, 75

2. 28, 42, 37, 31, 34, 29, 44, 28, 38, 40, 39, 42, 30

3.

الساقُ	الورقةُ
19	3 5 5
20	2 2 5 8
21	5 8 8 9 9 9
22	0 1 7 8 9
23	2

المفتاحُ: $19|3 = 193$

4.

الساقُ	الورقةُ
5	0 3 7 9
6	1 3 4 5 5 6
7	1 5 6 6 9
8	1 2 3 5 8
9	2 5 6 9
10	
11	7

المفتاحُ: $5|0 = 5.0$

أجدُ القِيَمَ المتطرّفةَ (إنْ وُجدَتْ) لكلِّ مجموعةِ بياناتٍ ممّا يأتي:

5. 52, 40, 49, 48, 62, 54, 44, 58, 39

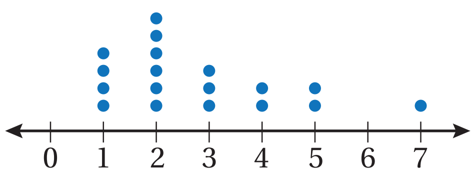
6. 133, 62, 152, 127, 168, 146, 174

7. 4.8, 5.5, 4.2, 11.5, 3.4, 7.5, 1.6, 3.8

8. **طائرةٌ ورقيةٌ:** يبيّنُ الجدولُ المجاورُ مدّةَ تحليقِ عددٍ منَ الطائراتِ الورقيةِ بالدقائقِ. أجدُ المَدى والمَدى الرُّبَيعِيَّ للبياناتِ، ثُمَّ أمثّلُها بالصُّندوقِ ذي العارضتَينِ.

مدّةُ التحليقِ (min)			
$13\frac{1}{2}$	$21\frac{1}{2}$	21	$16\frac{3}{4}$
$10\frac{1}{4}$	19	32	$26\frac{1}{2}$
29	$16\frac{1}{4}$	$28\frac{1}{2}$	$18\frac{1}{2}$

9. يبيّنُ التمثيلُ بالنقاطِ المجاورُ عددَ الساعاتِ الّتي يقضيها بعضُ الطلبةِ في الدراسةِ للامتحانِ. أمثّلُ البياناتِ بالصُّندوقِ ذي العارضتَينِ.



معلومةٌ

تؤثّرُ 4 قُوًى مختلفةٍ في تحليقِ الطائرةِ الورقيةِ، وَهِيَ قُوى: الدفعِ، والرفعِ، والجاذبيةِ، والسَّحبِ؛ لذا تُختارُ الموادُّ الخفيفةُ لتقاومَ الطائرةُ الجاذبيةَ وتحلّقَ بسهولةٍ.

معلومةٌ

يُعَدُّ الفهدُ الصيّادُ مِنْ أسرعِ الحيواناتِ، ويمكنُ أَنْ تبلغَ سرعتُهُ 110 km/h خلالَ 3 ثوانٍ مِن انطلاقِهِ.

سرعةٌ: يبيّنُ الجدولُ أدناهُ سرعةَ مجموعةٍ مِنَ الحيواناتِ بالكيلومترِ لكلِّ ساعةٍ.

الحيوانُ	السرعةُ (km/h)
الفهدُ الصيّادُ	100
النّمرُ	58
القطةُ	48
الفيلُ	40
الفأرُ	13
العنكبوتُ	2

10 أمثّلُ البياناتِ بالصُّندوقِ ذي العارضتَينِ.

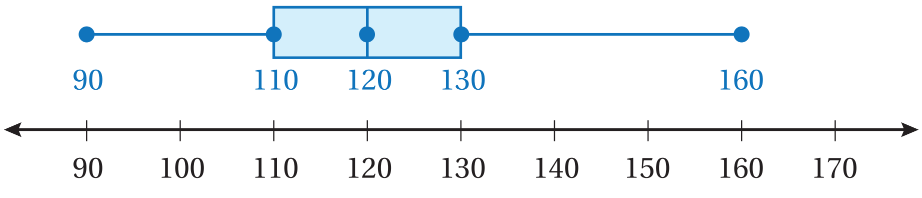
11 أجدُ المَدى الرُّبَيعِيَّ للبياناتِ.

12 أجدُ القِيَمَ المتطرّفةَ (إنْ وُجدَتْ).

13 أصفُ توزيعَ البياناتِ.

14 هَلِ البياناتُ أكثرُ تشتّتًا أسفلَ الرُّبَيعِ الأدنى أَمْ فوقَ الرُّبَيعِ الأعلى؟ أبرّرُ إجابتي.

أفلامٌ: يبيّنُ تمثيلُ الصُّندوقِ ذي العارضتَينِ أدناهُ مدةَ عرضِ مجموعةٍ مِنَ الأفلامِ بالدقائقِ:

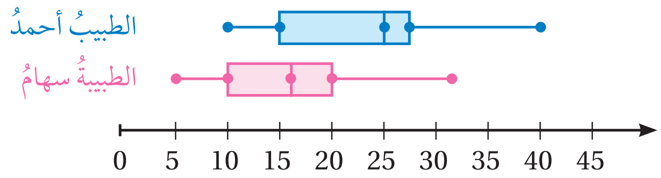


15 ما النسبةُ المئويةُ للأفلامِ الّتي تزيدُ مدّةُ عَرضِها على 120 دقيقةً؟

16 هَلِ البياناتُ أكثرُ تشتّتًا أسفلَ الرُّبَيعِ الأدنى أَمْ فوقَ الرُّبَيعِ الأعلى؟ أبرّرُ إجابتي.

17 أجدُ المَدى الرُّبَيعِيَّ للبياناتِ.

يبيّنُ تمثيلُ الصُّندوقِ ذي العارضتَينِ المزدوجِ أدناهُ مدةَ انتظارِ المرضى عندَ طبيبَيِ الأسنانِ: أحمدَ، وسهامَ:



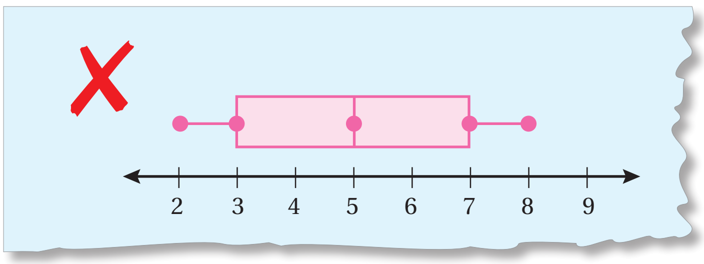
18 أجدُ المَدى الرُّبَيعِيَّ لمدّةِ انتظارِ المرضى عندَ الطبيبةِ سهامَ.

19 أجدُ المَدى الرُّبَيعِيَّ لمدّةِ انتظارِ المرضى عندَ الطبيبِ أحمدَ.

20 يرغبُ أنورُ بمراجعةِ أحدِ الطبيبَينِ، أيُّهُما أنصحُهُ بزيارتِهِ؟ أبرّرُ إجابتي.

مهاراتُ التفكيرِ العُليا

21 **أكتشفُ الخطأَ:** وردَ في التمثيلِ بالصُّندوقِ ذي العارضتَينِ الآتي خطأٌ، أكتشفُهُ، وأصحّحُهُ. علمًا أنَّ التمثيلَ للقيمِ: 8 ,5 ,8 ,6 ,9 ,6 ,4 ,7 ,3 ,3 ,6 ,2



22 **مسألةٌ مفتوحةٌ:** أكتبُ مجموعةً مِنَ البياناتِ قيمةُ المَدى الرُّبَيعِيِّ لَها 15 وتحتوي قيمتَينِ متطرّفتَينِ.

23 **مسألةٌ مفتوحةٌ:** أكتبُ مجموعةً مِنَ البياناتِ عندَما أمثّلُها بالصُّندوقِ ذي العارضتَينِ يكونُ طولُ كلٍّ مِنَ الصُّندوقِ والعارضتَينِ متساويًا، وأبرّر كيفيةَ اختيارِ القِيَمِ.

24 **أكتبُ** كيفَ أمثّلُ بياناتٍ باستعمالِ الصُّندوقِ ذي العارضتَينِ؟

الدرسُ 2 اختيارُ التمثيلِ الأنسبِ

فكرةُ الدرسِ

- أختارُ التمثيلَ الأنسبَ لبياناتٍ معطاةٍ.
- أكتبُ استدلالًا حولَ بياناتٍ ممثَّلةٍ.

المصطلحاتُ

البياناتُ العدديةُ، البياناتُ النوعيةُ، الاستدلالُ.

أستكشفُ

يبيّنُ الجدولُ المجاورُ نسبةَ الأصواتِ الّتي حصلَتْ عليها طالباتُ الصّفِّ الثامنِ المترشِّحاتُ للبرلمانِ الطّلابيِّ. أيُّهما أفضلُ لتمثيلِ هذِهِ البياناتِ: الأعمدةُ البيانيةُ، أَمِ القطاعاتُ الدائريةُ؟ أبرّرُ إجابتي.

الطالباتُ المترشِّحاتُ	نسبةُ الأصواتِ
سمرُ	43%
آلاءُ	28%
ريمُ	29%

البياناتُ العدديةُ (numerical data) هِيَ بياناتٌ يمكنُ رصدُها على صورةِ أرقامٍ، وأيضًا يمكنُ قياسُها وإجراءُ العملياتِ الحسابيةِ عليها، وترتيبُها تصاعديًّا أَوْ تنازليًّا، مثلَ: الكتلةِ، والطولِ، ودرجةِ الحرارةِ. أمّا **البياناتُ النوعيةُ** (categorical data) فَهِيَ بياناتٌ غيرُ رقْميةٍ يمكنُ ملاحظتُها ولا يمكنُ قياسُها، مثلَ: لونِ العيونِ، وأنواعِ الحيواناتِ، ومكانِ الولادةِ. وعندَ تمثيلِ البياناتِ يجبُ تحديدُ ما إذا كانَتْ عدديةً أَمْ نوعيةً؛ لتحديدِ التمثيلِ الأنسبِ.

مفهومٌ أساسيٌّ: اختيارُ التمثيلِ الأنسبِ

التمثيلُ بالصُّوَرِ: يُستعمَلُ لتمثيلِ البياناتِ النوعيةِ.

الأعمدةُ البيانيةُ: تُستعمَلُ لتمثيلِ البياناتِ النوعيةِ والمقارنةِ بَيْنَ فئاتِها.

القطاعاتُ الدائريةُ: تُستعمَلُ لتمثيلِ البياناتِ النوعيةِ حينَ يكونُ الهدفُ مِنَ التمثيلِ مقارنةَ الجزءِ بالكلِّ.

التمثيلُ بالنقاطِ: يُستعمَلُ لتمثيلِ البياناتِ النوعيةِ أو العدديةِ المنفصلةِ، وإظهارِ عددِ مرّاتِ تكرارِ كلِّ قيمةٍ في مجموعةِ البياناتِ.

الخطوطُ البيانيةُ: تُستعمَلُ لتمثيلِ البياناتِ العدديةِ الّتي تتغيرُ مَعَ الزمنِ.

الساقُ والورقةُ: يُستعمَلُ لتمثيلِ البياناتِ العدديةِ بحيثُ تظهرُ القِيَمُ جميعُها في التمثيلِ.

الصُّندوقُ ذو العارضتَينِ: يُستعمَلُ لتمثيلِ البياناتِ العدديةِ لدراسةِ مقدارِ تشتّتِ البياناتِ وتباعدِها.

المخطّطُ التَّكراريُّ: يُستعمَلُ لتمثيلِ البياناتِ العدديةِ المنظّمةِ في فتراتٍ ذاتِ تَكراراتٍ.

مثال 1 **أختارُ تمثيلًا مناسبًا لكلٍّ ممّا يأتي، وأبرّر إجابتي:**

1) **عددُ الطلبةِ في مسابقةِ حفظِ الأحاديثِ النبويةِ الشريفةِ كلَّ عامٍ.**

بِما أنَّ البياناتِ عدديةٌ تتغيرُ مَعَ الزمنِ، فإنَّ التمثيلَ بالخطوطِ البيانيةِ هوَ الاختيارُ الأنسبُ لتمثيلِها.

2) **الرياضةُ الأكثرُ تفضيلاً لطلبةِ الصفِّ الثامنِ.**

بِما أنَّ البياناتِ نوعيةٌ وتتعلقُ بجزءٍ مِنْ كلٍّ، فإنَّ التمثيلَ بالقطاعاتِ الدائريةِ هوَ الاختيارُ الأنسبُ لتمثيلِها.

3) **توزيعُ عددِ سكّانِ المملكةِ الأردنيةِ الهاشميةِ بحسبِ الفئاتِ العُمريةِ.**

بِما أنَّ البياناتِ عدديةٌ موزعةٌ على فئاتٍ، فإنَّ التمثيلَ بالمخطَّطِ التَّكراري هوَ الاختيارُ الأنسبُ لتمثيلِها.

أتحققُ من فهمي:

4) عددُ ساعاتِ الدراسةِ لطلبةِ الصفِّ الثامنِ في إحدى المدارسِ.

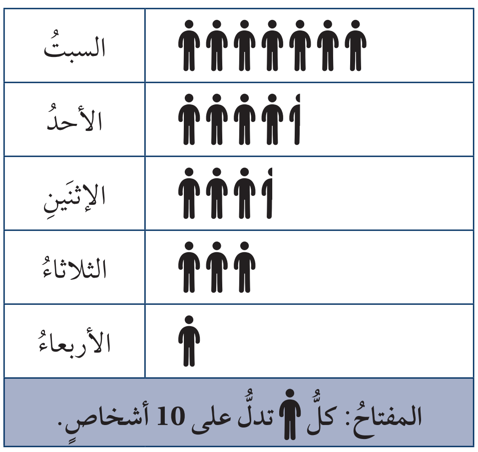
5) المسافةُ الّتي يقطعُها أحمدُ بسيارتِهِ كلَّ شهرٍ.

6) توزيعُ دخلِ الأُسرةِ على المتطلباتِ المنزليةِ.

الاستدلالُ (inference) هوَ عبارةٌ يمكنُ التوصّلُ إليها مِنْ تحليلِ بياناتٍ تَمَّ جمعُها حولَ الظاهرةِ أوِ الموضوعِ قيدَ الدراسةِ، ويفضَّلُ استعمالُ لغةٍ احتماليةٍ للتعبيرِ عَنِ الاستدلالِ؛ لأنَّ النتيجةَ توضَعُ بناءً على عيّنةٍ صغيرةٍ مِنَ المجتمعِ.

مثال 2: منَ الحياةِ

يبيّنُ التمثيلُ بالصورِ المجاورُ عددَ الأشخاصِ الّذينَ ارتادوا الناديَ الرياضيَّ في 5 أيامٍ متتاليةٍ.



1) **ما عددُ الأشخاصِ الّذينَ ارتادوا الناديَ الرياضيَّ يومَ السبتِ؟**

بما أنَّ كلَّ صورةٍ تعبّرُ عَنْ 10 أشخاصٍ، وبما أنَّهُ توجَدُ 7 صورٍ مقابلَ يومِ السبتِ، إذنْ فإنَّ عددَ الأشخاصِ الّذينَ ارتادوا الناديَ يومَ السبتِ 70 شخصًا.

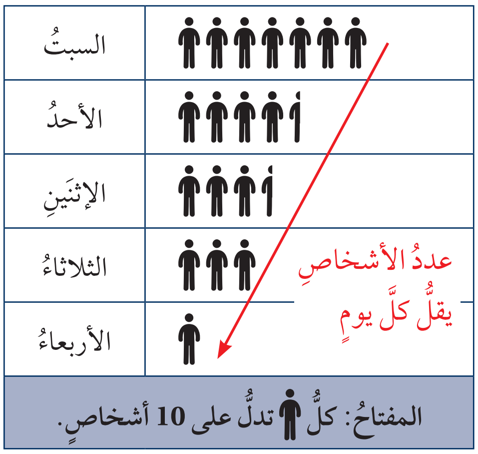
2 **أجدُ الوسطَ الحسابيَّ لعددِ الأشخاصِ الّذينَ ارتادوا الناديَ يومَي الأحدِ والإثنين.**

عددُ الأشخاصِ الّذينَ ارتادوا الناديَ يومَ الأحدِ 45 شخصًا، وعددُهُمْ يومَ الإثنينِ 35 شخصًا.

إذنْ، الوسطُ الحسابيُّ لعددِ الأشخاصِ يومَي الأحدِ والإثنينِ هوَ:

$$\bar{x} = \frac{45 + 35}{2} = \frac{80}{2} = 40$$ أجمعُ القِيَمَ، وأقسمُها على عددِها، وأبسّطُ

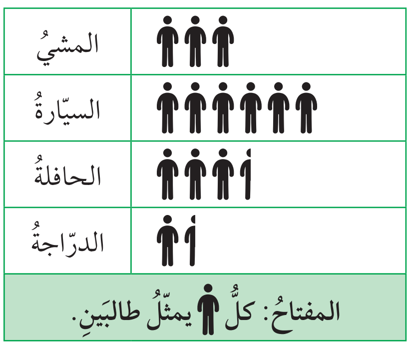
3 **أكتبُ استدلالًا حولَ موعدِ ذهابِ الأشخاصِ إلى النّادي، بالاعتمادِ على التمثيلِ.**



يظهرُ مِنَ التمثيلِ أنَّ أكبرَ عددٍ مِنَ الأشخاصِ يرتادونَ الناديَ الرياضيَّ يومَ السبتِ، ويستمرُّ عددُهُمْ بالانخفاضِ وصولًا إلى يومِ الأربعاءِ، ومنهُ يمكنُني كتابةُ استدلالٍ يحتوي كلماتٍ احتماليةً كما يلي:

مِنَ المتوقعِ أنَّ عددَ الأشخاصِ الّذينَ يرتادونَ الناديَ الرياضيَّ يقلُّ معَ مُضِيِّ أيامِ الأسبوعِ ابتداءً مِنْ يومِ السبتِ.

أتحققُ من فهمي:

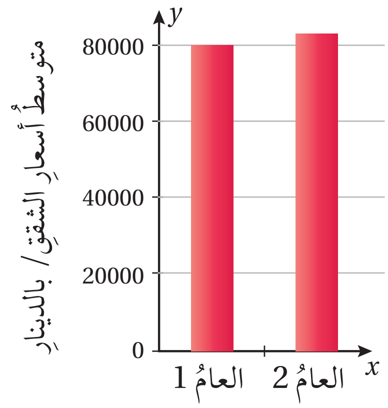


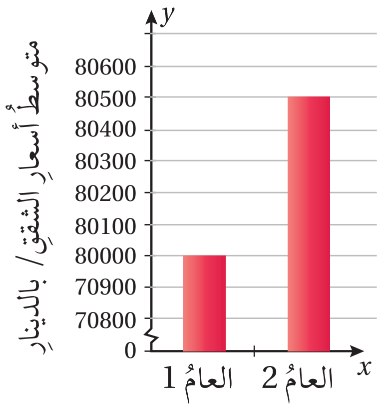
يبيّنُ التمثيلُ بالصورِ المجاورُ وسيلةَ النقلِ الّتي يستعملُها مجموعةٌ منَ الطلبةِ للوصولِ إلى المدرسةِ. أكتبُ استدلالًا حولَ كيفيةِ وصولِ الطلبةِ إلى المدرسةِ معتمدًا على التمثيلِ.

تعلمتُ في المثالِ السابقِ أنَّهُ يمكنُ التوصّلُ إلى استدلالاتٍ بتحليلِ بياناتٍ ممثَّلةٍ، ولكنْ في بعضِ الأحيانِ تكونُ التمثيلاتُ مضلِّلةً، ممّا يؤدّي إلى التوصّلِ إلى استدلالاتٍ غيرِ صحيحةٍ. ومِنْ هذِهِ التمثيلاتِ المضلِّلةِ استعمالُ تدريجٍ غيرِ مكتمِلٍ على المحورِ الرأسيِّ (محورِ y).

مثال 3

يبيّنُ التمثيلانِ الآتيانِ متوسطَ أسعارِ الشقق السكنيةِ في عامَينِ متتاليَينِ. أيُّ التمثيلَينِ مضلِّلٌ؟ أبرّرُ إجابتي.





يُظهرُ التمثيلُ بالأعمدةِ جهةَ اليسارِ أنَّ متوسطَ أسعارِ الشققِ في العامِ 2 زادَ بما يقاربُ ثلاثةَ أمثالِ متوسطِ أسعارِ الشققِ عنهُ في العامِ 1، لأنَّ التدريجَ على محورِهِ الرأسيِّ غيرُ مكتمِلٍ، في حينِ أنَّ متوسطَ أسعارِ الشققِ زادَ بمقدارِ 500 دينارٍ فقطْ. أمّا التمثيلُ بالأعمدةِ جهةَ اليمينِ فلا يُظهرُ فرقًا كبيرًا بَيْنَ العامَينِ في متوسطِ أسعارِ الشققِ؛ لأنَّ التدريجَ على محورِهِ الرأسيِّ مكتمِلٌ.

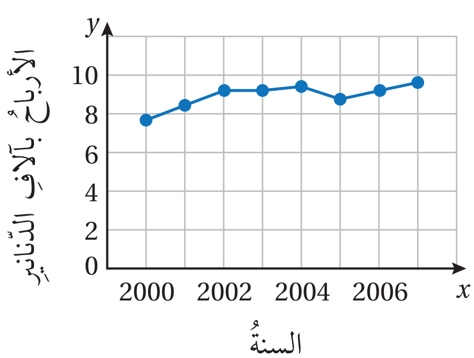
إذنْ، التمثيلُ بالأعمدةِ جهةَ اليسارِ مضلِّلٌ.

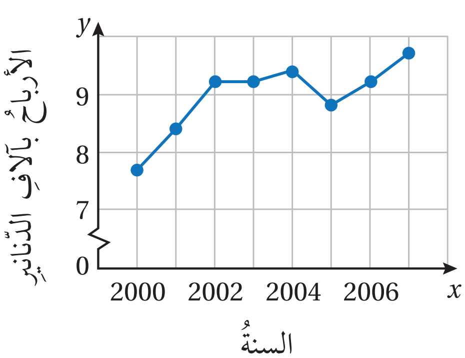
أتعلّمُ

تدلُّ العلامةُ ⌇ على أنَّ التدريجَ على المحورِ y غيرُ مكتمِلٍ.

أتحققُ من فهمي:

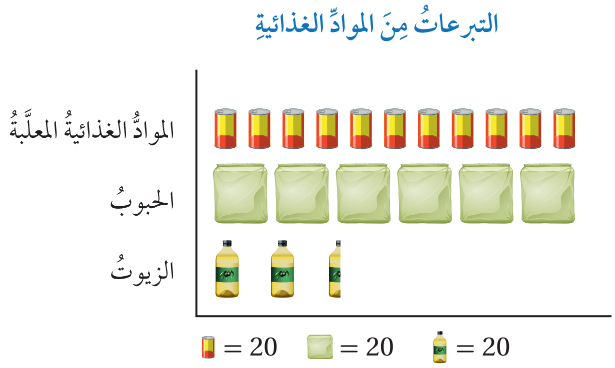
يبيّنُ التمثيلانِ الآتيانِ أرباحَ إحدى الشركاتِ بآلافِ الدّنانيرِ. أيُّ التمثيلَينِ مضلِّلٌ؟ أبرّرُ إجابتي.





مثال 4

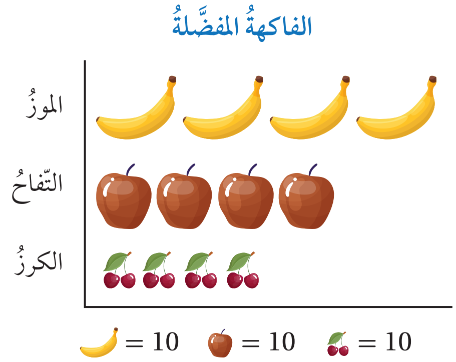
بالاعتمادِ على التمثيلِ بالصورِ المجاورِ، استدلَّ هُمامٌ أنَّ عددَ علبِ الموادِ الغذائيةِ المتبرَّعِ بها وعددَ علبِ الحبوبِ تقريبًا متساوٍ. هَلِ استدلالُ هُمامٍ دقيقٌ؟ أبرِّرُ إجابتي.



تمثّلُ كلُّ صورةٍ العددَ نفسَهُ مِنَ الأشياءِ، ولكنْ لأنَّ حجمَ الصورةِ المستعمَلةِ للتعبيرِ عَنِ الحبوبِ أكبرُ مِنْ حجمِ الصورةِ المستعمَلةِ للتعبيرِ عَنِ الموادِّ الغذائيةِ المعلَّبةِ، يظهرُ أنَّ العددَ مِنَ النوعَينِ تقريبًا متساوٍ، في حينِ أنَّ عددَ علبِ الحبوبِ نصفُ عددِ علبِ المعلَّباتِ.

أتحققُ من فهمي:

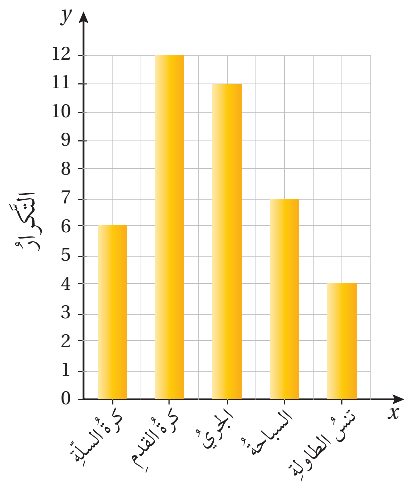
بالاعتمادِ على التمثيلِ بالصورِ المجاورِ، استدلَّتْ هناءُ أنَّ عددَ الأشخاصِ الّذينَ يفضّلونَ الموزَ تقريبًا ضعفُ عددِ الأشخاصِ الّذينَ يفضّلونَ الكرزَ. هَلِ استدلالُ هناءَ دقيقٌ؟ أبرّرُ إجابتي.



أتدرب وأحل المسائل

أختارُ تمثيلًا مناسبًا لكلٍّ ممّا يأتي، وأبرّر إجابتي:

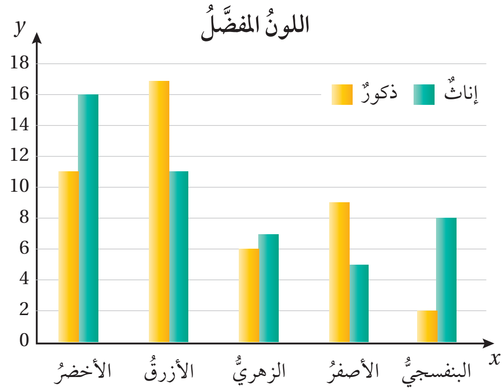
1. ارتفاعاتُ الأشجارِ في إحدى الغاباتِ.
2. إجاباتُ مجموعةٍ مِنَ الطلبةِ عَنْ سؤالٍ إجابتُهُ (نعمْ أَوْ لا).
3. عددُ الأهدافِ الّتي سجّلَها كلُّ عضوٍ في فريقِ كرةِ قدمٍ في إحدى البطولاتِ.
4. الأرباحُ الّتي يحقّقُها ريّانُ مِنْ مشروعِهِ الصغيرِ كلَّ سنةٍ.
5. نتائجُ اختبارِ اللغةِ العربيةِ لأحدِ الصّفوفِ.
6. أعدادُ المصابينَ بفيروسِ كورونا وَفقًا للفئاتِ العمريةِ المختلفةِ.



صمّمَ عليٌّ اســتبانةً سألَ فيها **40** طالبًا مِنْ طلبةِ مدرستِهِ عَنِ الرياضةِ المفضَّلةِ لديهِمْ، ومثّلَ النتائجَ الّتــي حصلَ عليها بالأعمدةِ كما في الشكلِ المجاورِ:

7 أيُّ الرياضــاتِ هِيَ الأكثــرُ تفضيلًا عندَ الطلبةِ؟

8 يقولُ علــيٌّ: (أتوقّعُ مِنَ التمثيلِ بالأعمدةِ أنَّ تنــسَ الطاولةِ هِــيَ الرياضــةُ الأقلُّ تفضيلًا لدى طلبةِ الأردنِّ). هَلِ استدلالُ عليٍّ صحيحٌ؟ أبرّرُ إجابتي.



قــرّرَتْ إدارةُ إحــدى المــدارسِ اســتطلاعَ آراءِ طلبةِ الصــفِّ الأولِ الموزَّعينَ على ثلاثِ شُعَبٍ عَنِ اللّونِ الّذي يفضّلونَهُ لطِلاءِ الغرفِ الصفيةِ. جمعَــتِ الإدارةُ نتائجَ الاســتطلاعِ، ومثّلَتْهُ بالأعمــدةِ المزدوجةِ كما في الشكلِ المجاورِ:

9 أكملُ الجملةَ الآتيةَ:

عددُ .... الّذينَ .... أكبرُ مِنْ ....

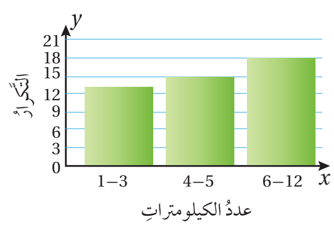
10 اعتمادًا على التمثيلِ، أيُّ الألوانِ ســتختارُها المدرســةُ لطِلاءِ الغرفِ الصفيةِ؟ أبرّرُ إجابتي.

أفكّرُ

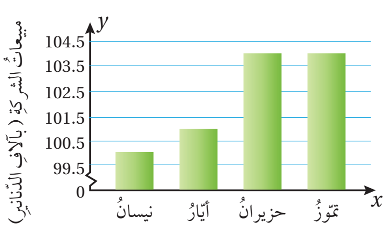
أكتــبُ اســتدلالًا حولَ اللّونِ الّذي يفضّلُهُ الطلبةُ لطِلاءِ الغرفِ الصّفّيّةِ.

أبيّنُ لِمَ تُعَدُّ كلٌّ مِنَ التمثيلاتِ الآتيةِ مضلِّلَةً:

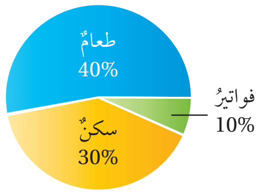
12



11



يبيّنُ التمثيلُ بالقطاعاتِ الدائريـــةِ المجاورُ توزيعَ دَخلِ الأسرةِ الشهريِّ على المتطلَّباتِ المنزليةِ:



13 لِمَ يُعَدُّ هذا التمثيلُ مضلِّلًا؟

14 أقترحُ تعديلًا للتمثيلِ المجاورِ، وأبرّر إجابتي.

مهاراتُ التفكيرِ العُليا

تبريرٌ: يبيّنُ التمثيـلُ بالقطاعاتِ الدائريـــةِ المجاورُ أنواعَ المَركباتِ الّتي مرَّتْ أمامَ منزلِ زيادٍ في إحدى ساعاتِ النّهارِ:

15 أجدُ النسبةَ المئويةَ للسيّاراتِ الّتي مرَّتْ خلالَ هذِهِ الساعةِ.

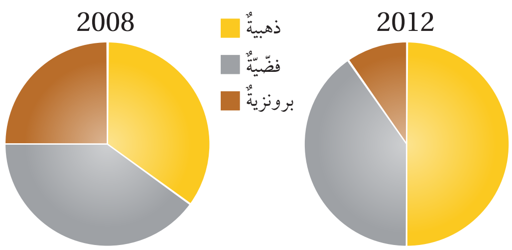
16 يقولُ زيادٌ: إنَّ رُبعَ المَركباتِ الّتي مرَّتْ مِنَ الشـــارعِ هِيَ حافلاتٌ أَوْ شـــاحناتٌ. هَلْ أتفقُ مَعَ قولِ زيادٍ؟ أبرّرُ إجابتي.

17 يقولُ زيادٌ: إنَّ نصفَ عددِ الأشخاصِ الّذينَ مرّوا مِنَ الشارعِ كانوا يركبونَ السيّاراتِ. هَلْ ما يقولُهُ زيادٌ صحيحٌ؟ أبرّرُ إجابتي.

أفكّرُ

هَلْ يركبُ العددُ نفسُهُ مِنَ الأشـــخاصِ كلَّ نوعٍ مِنَ المَركباتِ؟

18 **تبريرٌ:** يبيّنُ التمثيلُ بالقطاعاتِ الدائريةِ المجاورُ أنواعَ الميدالياتِ الّتي فازَتْ بِها إحدى الدولِ في دورتَينِ متتاليتَينِ مِنَ الألعابِ الأولومبيةِ. أكتبُ استدلالًا بالاعتمادِ على التمثيلِ.



19 **تحدٍّ:** ما المعلوماتُ الّتي يمكنُنـــي الحصولُ عليها مِنْ تمثيلِ البياناتِ بالصُّندوقِ ذي العارضتَينِ ولا يمكنُني الحصولُ عليها مِنْ تمثيلِها بالمخطّطِ التّكراريِّ؟ أبرّرُ إجابتي.

20 **أكتبُ** كيفَ أحدّدُ التمثيلَ الأنسبَ لتمثيلِ بياناتٍ معطاةٍ؟

الدرسُ 3 عَدُّ النواتجِ

فكرةُ الدرسِ

أحدّدُ نواتجَ الفضاءِ العَينيِّ وعددَها.

المصطلحاتُ

النواتجُ، الحادثُ، الفضاءُ العَينيُّ، مخطّطُ الشجرةِ، مخطّطُ الاحتمالِ.

أستكشفُ

ترغبُ شذى باختيارِ أحدِ التخصّصاتِ الجامعيةِ: دكتورُ صيدلةٍ، هندسةُ حاسوبٍ، هندسةٌ ميكانيكيةٌ، إمّا في الجامعةِ الأردنيةِ أَوْ في جامعةِ العلومِ والتكنولوجيا الأردنيةِ. كَمْ خيارًا أمامَ شذى لاختيارِ التخصّصِ والجامعةِ؟

تُسمّى الخياراتُ المحتمَلةُ لتجربةٍ عشوائيةٍ ما **النواتجَ** (outcomes)، فمثلًا توجدُ 6 نواتجَ محتمَلةٍ لتجربةِ رمي حجرِ نردٍ هِيَ: $1, 2, 3, 4, 5, 6$

أمّا **الحادثُ** (event) فهوَ ناتجٌ واحدٌ أَوْ أكثرُ مِنْ نواتجِ التجربةِ العشوائيةِ، مثلَ ظهورِ عددٍ زوجيٍّ في تجربةِ رمي حجرِ النردِ.

تُسمّى جميعُ النواتجِ الممكنةِ للتجربةِ العشوائيةِ **الفضاءَ العَينيَّ** (sample space)، ويمكنُ استعمالُ طرائقَ عدةٍ لإيجادِهِ، مِنْها **مخطّطُ الشجرةِ** (tree diagram).

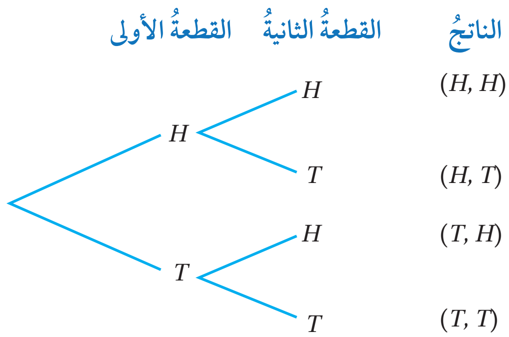
أتذكّرُ

التجربةُ العشوائيةُ تجربةٌ نستطيعُ أنْ نتنبأَ فيها بالنواتجِ جميعِها الّتي يمكنُ أنْ تظهرَ قبلَ إجرائِها، لكنَّنا لا نعلمُ تحديدًا أَيُّها سيظهرُ حتّى نُجريَ التجربةَ.

مثال 1

أستعملُ مخطّطَ الشجرةِ لتحديدِ الفضاءِ العَينيِّ لتجربةِ رمي قطعتَيْ نقدٍ منتظمتَينِ ومتمايزتَينِ مرةً واحدةً عشوائيًا.

لقطعةِ النقدِ وجهانِ، أحدُهُما يحتوي صورةً، والآخرُ كتابةً؛ لذا أرمزُ إلى الوجهِ الّذي يحتوي الصورةَ بالرمزِ (H) وإلى الوجهِ الّذي يحتوي الكتابةَ بالرمزِ (T).



أتذكّرُ

أرمزُ إلى الصورةِ بالحرفِ H، وإلى الكتابةِ بالحرفِ T، وهما الحرفانِ الأوّلانِ مِنَ الكلمتَينِ الإنجليزيّتَينِ Head، وَ Tail.

ألاحظُ مِنْ مخطّطِ الشجرةِ أنَّ لهذِهِ التجربةِ 4 نواتجَ ممكنةٍ؛ لذا فإنَّ الفضاءَ العَينيَّ هوَ:

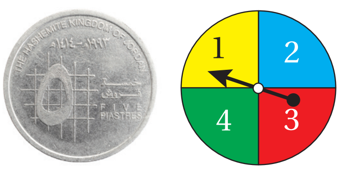
$$(H, H), (H, T), (T, H), (T, T)$$

أتحققُ من فهمي:

أستعملُ مخطّطَ الشجرةِ لتحديدِ الفضاءِ العَينيِّ لتجربةِ رمي قطعةِ نقدٍ وحجرِ نردٍ مرّةً واحدةً عشوائيًّا.

يمكنُ أيضًا استعمالُ الجدولِ لإيجادِ الفضاءِ العَينيِّ للتجاربِ العشوائيةِ.

مثال 2



أستعملُ الجدولَ لتحديدِ الفضاءِ العَينيِّ لتجربةِ رمي قطعةِ نقدٍ مرةً واحدةً عشوائيًّا، ثمَّ تدويرِ مؤشرِ قرصٍ عشوائيًّا مقسّمٍ إلى 4 قطاعاتٍ متطابقةٍ كُتِبَتْ عليها الأعدادُ 1, 2, 3, 4

أرسمُ جدولًا، وأسجّلُ في الصفِّ الأعلى مِنْهُ نواتجَ تدويرِ مؤشّرِ القرصِ المرقَّمِ، وفي العمودِ إلى اليسارِ نواتجَ إلقاءِ قطعةِ النقدِ، ثُمَّ أملأُ الجدولَ.

		القرصُ المرقَّمُ			
		1	2	3	4
قطعةُ النقدِ	H		$H, 2$		
	T			$T, 3$	

		القرصُ المرقَّمُ			
		1	2	3	4
قطعةُ النقدِ	H	$H, 1$	$H, 2$	$H, 3$	$H, 4$
	T	$T, 1$	$T, 2$	$T, 3$	$T, 4$

أجدُ مِنَ الجدولِ أنَّ لهذِهِ التجربةِ 8 نواتجَ ممكنةٍ؛ لذا فإنَّ الفضاءَ العَينيَّ هوَ:

$$(H, 1), (H, 2), (H, 3), (H, 4), (T, 1), (T, 2), (T, 3), (T, 4)$$

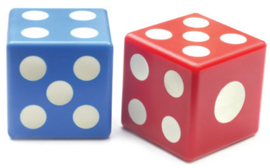
أتحققُ من فهمي:

أستعملُ الجدولَ لتحديدِ الفضاءِ العَينيِّ لتجربةِ رمي قطعةِ نقدٍ مرةً واحدةً عشوائيًّا وسحبِ بطاقةٍ عشوائيًّا مِنْ كيسٍ يحتوي 3 بطاقاتٍ متماثلةٍ كُتِبَتْ عليها الأعدادُ 1, 2, 3

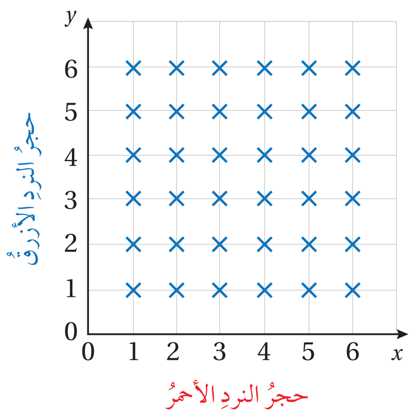
يمكنُني أيضًا استعمالُ **مخطّطِ الاحتمالِ** (possibility diagram) لإيجادِ الفضاءِ العَينيِّ للتجاربِ العشوائيةِ.

مثال 3

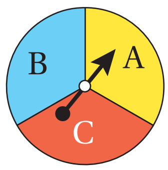
أســتعملُ مخطّطَ الاحتمالِ لتحديدِ الفضاءِ العَينيِّ لتجربــةِ رمي حجرِ نردٍ لونُهُ أحمرُ مرّةً واحدةً عشوائيًّا، ثمَّ رمي حجرِ نردٍ لونُهُ أزرقُ مرّةً واحدةً عشوائيًّا.



أرســمُ محورَينِ، ثمَّ أكتــبُ نواتجَ رمي حجرِ النــردِ الأحمرِ على المحــورِ x، ونواتجَ رمي حجرِ النــردِ الأزرقِ على المحورِ y، كما في الشــكلِ المجاورِ، حيثُ يمثّلُ تقاطعُ خطوطِ مخطّطِ الاحتمالِ الفضاءَ العَينيَّ للتجربةِ.



أتحققُ من فهمي:

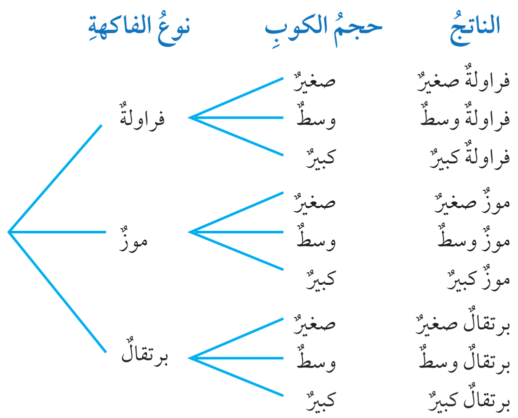


قرصٌ دائريٌّ مقسَّمٌ إلى 3 قطاعاتٍ متطابقةٍ كُتِبَتْ عليها الأحرفُ A, B, C كما في الشكلِ المجاورِ. أستعملُ مخطّطَ الاحتمالِ لتحديدِ الفضاءِ العَينيِّ لتجربةِ تدويرِ مؤشرِ القرصِ مرّتَينِ عشوائيًّا.

مثال 4: منَ الحياةِ

عصيرٌ طبيعيٌّ: تريدُ عبيرُ شــراءَ عصيرٍ طبيعيٍّ مِنْ محلٍّ يبيعُ العصيرَ في أكوابٍ بثلاثةِ أحجامٍ مختلفةٍ: صغيرٍ، ووســطٍ، وكبيرٍ، ولديهِ 3 أنواعٍ مختلفةٍ مِنَ الفاكهةِ: فراولةٌ، وموزٌ، وبرتقالٌ. كَمْ خيارًا مختلفًا أمامَ عبيرَ لشراءِ العصيرِ؟

يمكنُني استعمالُ الشجرةِ البيانيةِ لتحديدِ عددِ الخَياراتِ الممكنةِ أمامَ عبيرَ.

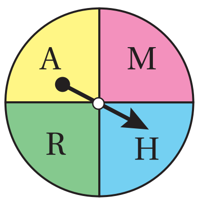


إذنْ، لدى عبيرَ 9 بدائلَ مختلفةٍ للعصيرِ.

أتحققُ من فهمي:

بوشارٌ: يرغبُ مهنّدٌ في شراءِ بوشارٍ يُباعُ في علبٍ بثلاثةِ أحجامٍ مختلفةٍ: صغيرٍ، ووسطٍ، وكبيرٍ، وأمامَهُ نكهتانِ مختلفتانِ: الملحُ، والزبدةُ، كَمْ خَيارًا مختلفًا أمامَ مهنّدٍ لشراءِ البوشارِ؟

أتدرب وأحل المسائل



1 أستعملُ مخطّطَ الشجرةِ لتحديدِ الفضاءِ العَينيِّ لتجربةِ تدويرِ مؤشّرِ القرصِ المجاورِ مرّتَينِ عشوائيًّا.

2 أستعملُ مخطّطَ الاحتمالِ لتحديدِ الفضاءِ العَينيِّ لتجربةِ رمي قطعةِ نقدٍ مرّةً واحدةً عشوائيًا، ثمَّ رمي حجرِ نردٍ مرةً واحدةً عشوائيًّا.

سُحِبَتْ كُرَتانِ عشوائيًّا على التوالي دونَ إرجاعٍ مِنْ صُندوقٍ يحتوي الكُراتِ الأربعَ المتماثلةَ المجاورةَ:

3 أستعملُ الجدولَ لتحديدِ الفضاءِ العَينيِّ للتجربةِ.

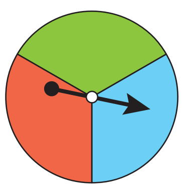
4 أجدُ عددَ عناصرِ الفضاءِ العَينيِّ.

إرشادٌ

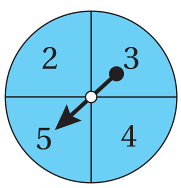
أرمزُ إلى اللونِ الأحمرِ بالحرفِ R، واللونِ الأخضرِ بالحرفِ G، واللونِ الأزرقِ بالحرفِ B، واللونِ الأصفرِ بالحرفِ Y، وهيَ الحروفُ الأولى مِنْ أسماءِ هذهِ الألوانِ باللغةِ الإنجليزيةِ:

Red ⟶ R
Green ⟶ G
Blue ⟶ B
Yellow ⟶ Y

أستعملُ مخطّطَ الشجرةِ لتحديدِ الفضاءِ العَينيِّ للتجاربِ العشوائيةِ الآتيةِ المعتمدةِ على القرصَينِ الدائريَّينِ المجاورَينِ، علمًا بأنَّهُما مقسّمانِ إلى أجزاءٍ متطابقةٍ:



القرصُ B



القرصُ A

5 تدويرِ مؤشّرِ القرصِ A مرّةً واحدةً عشوائيًّا، ثمَّ تدويرِ ومؤشرِ القرصِ B مرةً واحدةً عشوائيًّا.

6 تدويرِ مؤشّرِ القرصِ A مرّتَينِ عشوائيًّا.

7 تدويرِ مؤشّرِ القرصِ B مرّتَينِ عشوائيًّا.

8 تدويرِ مؤشّرِ القرصِ B ثلاثَ مرّاتٍ عشوائيًّا.

أفكّرُ

هَلْ يمكنُ تمثيلُ التجربةِ العشوائيةِ في السؤالِ 8 باستعمالِ مخطّطِ الاحتمالِ؟

دُوِّرَ مؤشّـرُ قرصٍ مقسّـمٍ إلى 3 قطاعاتٍ متطابقةٍ ألوانُها: أحمرُ (R)، وأزرقُ (B)، وأبيضُ (W) مرةً واحدةً عشـوائيًّا، ثُمَّ دُوِّرَ مؤشّـرُ قرصٍ آخرَ مقسّـمٍ إلى 4 قطاعاتٍ متطابقةٍ كُتِبَتْ عليها الأعدادُ 4 ,3 ,2 ,1 مرةً واحدةً عشوائيًّا.

9 أستعملُ مخطّطَ الاحتمالِ لتحديدِ الفضاءِ العَينيِّ للتجربةِ العشوائيةِ.

10 أجدُ عددَ عناصرِ الفضاءِ العَينيِّ.

وَحدةُ تخزينٍ: يرغبُ يوسُـفُ في شـراءِ مشـغّلٍ (مقاطعِ صوتيـةٍ)، ولديـهِ 4 سَـعاتٍ مختلفـةٍ بالجيجابايـتِ: 2GB, 4GB, 8GB, 16GB، ويمكنُهُ الاختيارُ مِنْ 5 ألوانٍ مختلفةٍ: الفضيِّ، والأخضرِ، والأزرقِ، والزهريِّ، والأسودِ:

11 أستعملُ الجدولَ لتحديدِ جميعِ البدائلِ الممكِنةِ ليوسُفَ عندَ اختيارِ المشغّلِ.

12 أجدُ عددَ الخَياراتِ الممكِنةِ أمامَ يوسُفَ.

يقدّمُ مطعمٌ قائمةَ الطعامِ المجاورةَ لزبائنِهِ:

13 أستعملُ مخطّطَ الشـجرةِ لتحديدِ جميعِ الخَياراتِ الممكنةِ لوجبةِ طعامٍ مكوّنةٍ مِنْ: طبقِ مقبّلاتٍ، وطبقٍ رئيسٍ، وطبقِ تحليةٍ.

14 أجدُ عـددَ الخَيـاراتِ الممكنـةِ لوجبةِ الطعامِ.

15 أعودُ إلى فقرةِ (أستكشفُ)، وأحلُّ المسألةَ الواردةَ فيها.

مهاراتُ التفكيرِ العُليا

16 **تحدٍّ:** قرصٌ مقسّـمٌ إلى n مِنَ القطاعاتِ المتطابقةِ، أجدُ عددَ عناصرِ الفضاءِ العَينيِّ لتجربةِ تدويرِ مؤشّرِهِ مرّتَينِ.

17 **مسألةٌ مفتوحةٌ:** أعطي مثالًا على تجربةٍ عشوائيةٍ عددُ عناصرِ الفضاءِ العَينيِّ لَها 30

18 **أكتبُ** كيفَ أحدّدُ الفضاءَ العَينيَّ لتجربةٍ عشوائيةٍ؟

الدرسُ 4 احتمالُ الحوادثِ المركَّبةِ

فكرةُ الدرسِ
- أجدُ احتمالاتِ حوادثَ مركَّبةٍ.

المصطلحاتُ
الحادثُ البسيطُ،
الحادثُ المركَّبُ.

أستكشفُ
نسيَ أحمدُ أوّلَ رقمَينِ مِنْ رمزِ الدخولِ إلى بريدِهِ الإلكترونيِّ، لكنَّهُ تذكّرَ أنَّ الرقمَ الأولَ فرديٌّ والرقمَ الثاني زوجيٌّ. ما احتمالُ أنْ يختارَ أحمدُ الرقمَينِ الصحيحَينِ لرمزِ الدخولِ؟

يُسمّى الحادثُ الّذي يحتوي ناتجًا واحدًا فقطْ **حادثًا بسيطًا** (simple event)، أمّا **الحادثُ المركَّبُ** (compound event) فهوَ حادثٌ يتكوّنُ مِنْ حادثَينِ بسيطَينِ أوْ أكثرَ.

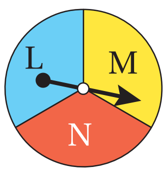
تعلَّمْتُ سابقًا أنَّهُ إذا كانَتْ نواتجُ التجربةِ العشوائيةِ متساويةَ الاحتمالِ، فإنَّ احتمالَ وقوعِ أيِّ حادثٍ يساوي نسبةَ عددِ عناصرِهِ إلى عددِ عناصرِ الفضاءِ العَينيِّ:

$$P(A) = \frac{\text{(عددُ عناصرِ الحادثِ)}}{\text{(عددُ عناصرِ الفضاءِ العَينيِّ)}}$$

يمكنُ استعمالُ مخطّطِ الشجرةِ لإيجادِ احتمالاتِ الحوادثِ المركَّبةِ.

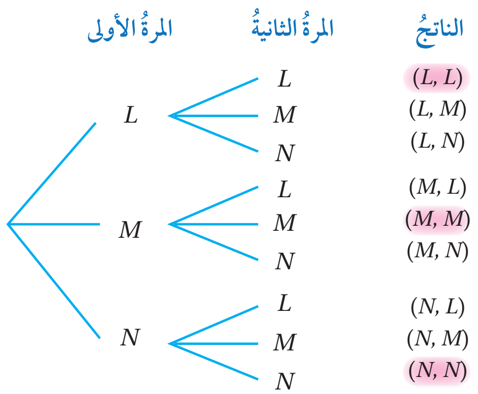
مثال 1

قرصٌ مقسَّمٌ إلى 3 قطاعاتٍ متطابقةٍ كُتِبَتْ عليها الأحرفُ L, M, N كما في الشكلِ المجاورِ. دُوِّرَ مؤشّرُ القرصِ مرّتَينِ عشوائيًّا، وسُجِّلَ الحرفانِ اللّذانِ وقفَ عندَهُما المؤشّرُ، أستعملُ مخطّطَ الشجرةِ لأجدَ:



1 احتمالَ وقوفِ المؤشّرِ عندَ الحرفِ نفسِهِ في المرّتَينِ.

أمثّلُ الفضاءَ العَينيَّ للتجربةِ باستعمالِ مخطّطِ الشجرةِ.

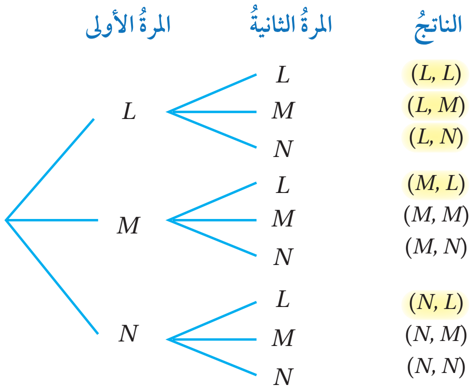


ألاحظُ أنَّ عددَ عناصرِ الفضاءِ العَينيِّ 9

أفترضُ أنَّ الحادثَ A هوَ وقوفُ المؤشّرِ عندَ الحرفِ نفسِهِ مرّتَينِ، إذنْ عددُ عناصرِ هذا الحادثِ يُساوي 3؛ لذا فإنَّ احتمالَ الحادثِ A هوَ:

$$P(A) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

2 احتمالَ وقوفِ المؤشّرِ عندَ الحرفِ L في أيٍّ مِنَ المرّتَينِ أَوْ كلَيهِما.



أفترِضُ أنَّ الحادثَ B هوَ وقوفُ المؤشّرِ عندَ الحرفِ L في أيٍّ مِنَ المرّتَينِ أَوْ كلَيهِما، إذنْ عددُ عناصرِ هذا الحادثِ 5؛ لذا فإنَّ احتمالَ الحادثِ B هوَ:

$$P(B) = \frac{5}{9}$$

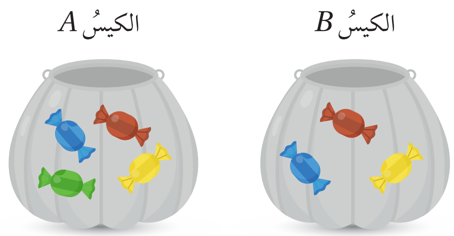
أتحققُ من فهمي:

3 احتمالَ وقوفِ المؤشّرِ عندَ الحرفِ M في المرّةِ الأولى فقط.

4 احتمالَ وقوفِ المؤشّرِ عندَ الحرفِ N في أيٍّ مِنَ المرّتَينِ أَوْ كلَيهِما.

يمكنُ استعمالُ الجدولِ في إيجادِ احتمالاتِ الحوادثِ المركَّبةِ.

مثال 2



يوضّحُ الشكلُ المجاورُ كيسَينِ يحتويانِ قطعَ حلوى. إذا سحبَتْ غديرُ قطعةَ حلوى عشوائيًّا منَ الكيسِ A، ثمَّ سحبَتْ قطعةَ حلوى عشوائيًّا منَ الكيسِ B، فأستعملُ الجدولَ لأجدَ:

1 احتمالَ سحبِ قطعتَيْ حلوى مِنَ اللّونِ نفسِهِ.

أمثّلُ الفضاءَ العَينيَّ للتجربةِ باستعمالِ جدولٍ. ألاحظُ أنَّ عددَ عناصرِ الفضاءِ العَينيِّ 12

		الكيسُ B		
		R	B	Y
الكيسُ A	R	R, R	R, B	R, Y
	Y	Y, R	Y, B	Y, Y
	B	B, R	B, B	B, Y
	G	G, R	G, B	G, Y

أفترِضُ أنَّ الحادثَ A هوَ سحبُ قطعتَيْ حلوى لَهُما اللّونُ نفسُهُ، إذنْ عددَ عناصرِ هذا الحادثِ 3؛ لذا فإنَّ احتمالَ الحادثِ A يُساوي:

$$P(A) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

2 احتمالَ سحبِ قطعتَيْ حلوى ليسَتْ أيٌّ مِنْهُما زرقاءَ أَوْ خضراءَ.

أفترِضُ أنَّ الحادثَ يمثّلُ سحبَ قطعتَيْ حلوى ليسَتْ أيٌّ مِنْهُما زرقاءَ أَوْ خضراءَ.

ألاحظُ مِنَ الجدولِ أنَّهُ توجدُ 4 نواتجَ لا تحتوي قطعةَ حلوى زرقاءَ أَوْ خضراءَ؛ لذا فإنَّ احتمالَ الحادثِ B يُساوي:

		الكيسُ B		
		R	B	Y
الكيسُ A	R	R, R	R, B	R, Y
	Y	Y, R	Y, B	Y, Y
	B	B, R	B, B	B, Y
	G	G, R	G, B	G, Y

$$P(B) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

أتحققُ من فهمي:

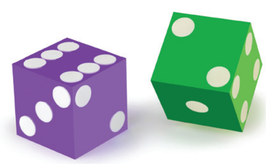
3 احتمالَ سحبِ قطعةِ حلوى خضراءَ.

4 احتمالَ سحبِ قطعتَيْ حلوى مختلفتَينِ في اللّونِ.

يمكنُ أيضًا استعمالُ مخطّطِ الاحتمالِ لإيجادِ احتمالاتِ الحوادثِ المركَّبةِ.

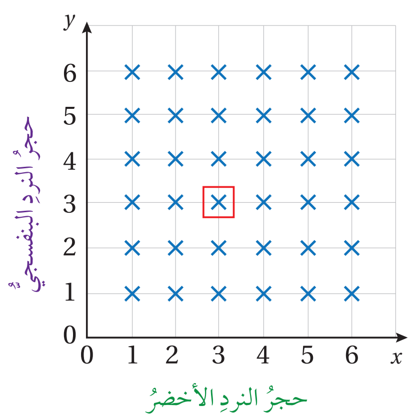
مثال 3

فـي تجربةِ رمي حجرِ نردٍ لونُهُ أخضرُ مرّةً واحدةً عشـوائيًّا، ثمَّ رمـي حجرِ نردٍ لونُهُ بنفسجيٌّ عشوائيًّا، أستعملُ مخطّطَ الاحتمالِ لأجدَ:



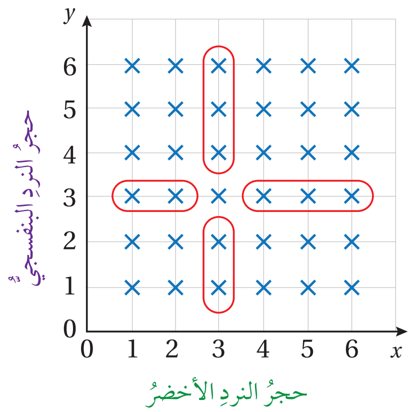
1 احتمالَ ظهورِ العددِ 3 على كِلا الحجرَينِ.

أمثّلُ الفضاءَ العَينيَّ للتجربةِ باستعمالِ مخطّطِ الاحتمالِ. ألاحظُ أنَّ عددَ عناصرِ الفضاءِ العَينيِّ 36



أفترِضُ أنَّ الحادثَ A هوَ ظهورُ العددِ 3 على كِلا الحجرَينِ، إذن عددَ عناصرِ هذا الحادثِ 1؛ لذا فإنَّ احتمالَ الحادثِ A هوَ:

$$P(A) = \frac{1}{36}$$



2 **احتمالَ ظهورِ العددِ 3 مرّةً واحدةً فقطْ.**

أفترضُ أنَّ الحادثَ B هوَ ظهورُ العددِ 3 مرَّةً واحدةً فقطْ.

ألاحظُ مِنْ مخطَّطِ الاحتمالِ وجودَ 10 نواتجَ ظهرَ فيها العددُ 3 مرّةً واحدةً فقطْ؛ لذا فإنَّ احتمالَ الحادثِ B يُساوي:

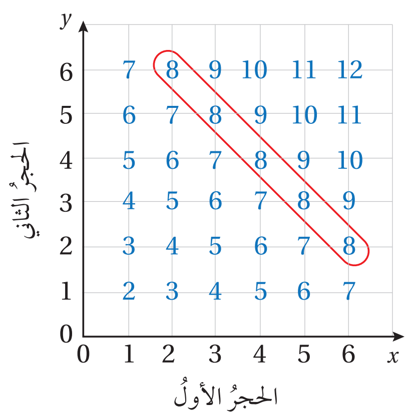
$$P(B) = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$$

أتحققُ من فهمي:

3 **احتمالَ ظهورِ العددِ 3 مرّةً واحدةً على الأقلِّ.**

4 **احتمالَ عدمِ ظهورِ العددِ 3**

مثال 4 **في تجربةِ رمي حجرَيْ نردٍ متمايزَينِ مرةً واحدةً عشوائيًّا وإيجادِ ناتجِ جمعِ العددينِ الظاهرَينِ، أجدُ:**



1 **احتمالَ أنْ يكونَ مجموعُ العددينِ الظاهرَينِ يُساوي 8**

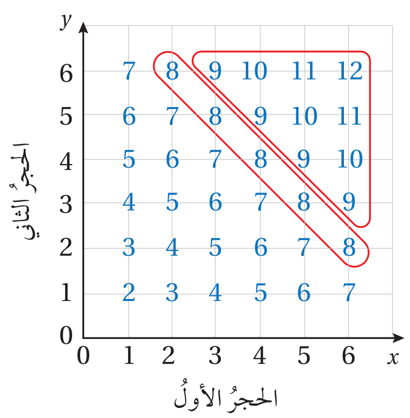
يمكنُني استعمالُ مخطّطِ الاحتمالِ لكتابةِ المجموعِ لكلِّ ناتجٍ.

ألاحظُ أنَّ عددَ عناصرِ الفضاءِ العَينيِّ 36

أفترضُ أنَّ الحادثَ A هوَ ظهورُ عددينِ مجموعُهُما 8،

إذنْ عددُ عناصرِ الحادثِ 5؛ لذا فإنَّ احتمالَ الحادثِ A يُساوي:

$$P(A) = \frac{5}{36}$$



2 **احتمالَ أنْ يكونَ مجموعُ العددينِ الظاهرَينِ أكبرَ منْ أَوْ يُساوي 8**

أفترضُ أنَّ الحادثَ B هوَ ظهورُ عددَينِ مجموعُهُما أكبرُ أَوْ يُساوي 8

ألاحظُ مِنْ مخطّطِ الاحتمالِ وجودَ 10 نواتجَ مجموعُها أكبرُ مِنْ 8، وَ5 نواتجَ مجموعُها 8، إذنْ عددُ عناصرِ الحادثِ 15؛ لذا فإنَّ احتمالَ الحادثِ B يُساوي:

$$P(B) = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$$

أتحققُ من فهمي:

3 احتمالَ أنْ يكونَ مجموعُ العددينِ الظاهرَينِ أقلَّ مِنْ 8

4 احتمالَ أنْ يكونَ مجموعُ العددينِ الظاهرَينِ أقلَّ مِنْ أوْ يُساوي 8

أتدرب وأحل المسائل

في تجربةِ رمي قطعتَيْ نقدٍ منتظمتَينِ ومتمايزتَينِ عشوائيًّا مرةً واحدةً، أستعملُ مخطّطَ الشجرةِ لإيجادِ احتمالِ:

1 ظهورِ صورتَينِ.

2 ظهورِ صورةٍ وكتابةٍ.

3 ظهورِ صورةٍ واحدةٍ على الأقلِّ.

4 عدمِ ظهورِ صورةٍ.

في تجربةِ رمي حجرَيْ نردٍ متمايزَينِ مرةً واحدةً عشوائيًّا، أستعملُ الجدولَ لإيجادِ احتمالِ أنْ يكونَ:

5 العددانِ الظاهرانِ أقلَّ مِنْ 5

6 العددانِ الظاهرانِ زوجيَّينِ.

7 أحدُ العددَينِ الظاهرَينِ فقط أوّليًّا.

سحبَتْ دينا عشوائيًّا بطاقةً مِنْ 4 بطاقاتٍ كُتِبَتْ عليها الأعدادُ 4 ,3 ,2 ,1، ثمَّ رمَتْ حجرَ نردٍ مرةً واحدةً عشوائيًّا، ثُمَّ أوجدَتْ مجموعَ العددَينِ الظاهرَينِ. أستعملُ مخطّطَ الاحتمالِ لأجدَ احتمالَ أنْ يكونَ مجموعُ العددَينِ:

8 يُساوي 5

9 أكبرَ من 6

في تجربةَ رمي حجرَيْ نردٍ مرةً واحدةً عشوائيًّا وإيجادِ ناتجِ جمعِ العددَينِ الظاهرَينِ، أجدُ احتمالَ أنْ يكونَ مجموعُ العددَينِ الظاهرَينِ:

10 يُساوي 4

11 يُساوي 7

12 أقلَّ مِنْ 4

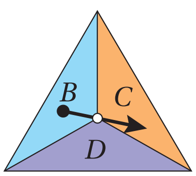
13 عددًا زوجيًّا.

14 مِنْ مضاعفاتِ العددِ 3

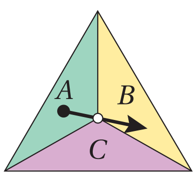
15 مربعًا كاملًا.

16 في إحدى الألعابِ، يُدَوَّرُ مؤشّرُ كلٍّ مِنَ الشكلَينِ المجاورَينِ مرةً واحدةً عشوائيًّا، ويحصلُ اللاعبُ على نقطةٍ إذا توقفَ مؤشّرُ كِلا الشكلَينِ على الحرفِ نفسِهِ. ما احتمالُ الحصولِ على نقطةٍ؟

(2)



(1)

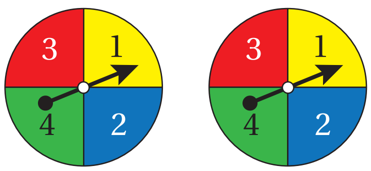


يحتوي كيسٌ 4 حبّاتِ كعكٍ، اثنتانِ منها بحشـــوةِ المُربّى، وواحدةٌ بحشوةِ الشـــوكولاتةِ، وواحدةٌ بحشوةِ الكريمةِ. اختارَ محمودٌ كعكةً عشـــوائيًّا مِنَ الكيسِ وأكلَها، ثُمَّ أخذَ كعكةً أُخرى. أستعملُ الجدولَ لأجدَ احتمالَ:

17 أنْ تكونَ حبّتا الكعكِ بحشوةِ المُربّى.

18 أنْ تكونَ إحدى حَبّتَيِ الكعكِ بحشوةِ الكريمةِ.

19 أنْ تكونَ حبّتا الكعكِ بحشوةِ الشوكولاتةِ.



قرصانِ دائريّانِ كلٌّ مِنْهُما مقسَّمٌ إلى 4 قطاعاتٍ متطابقةٍ كُتِبَتْ عليهـــا الأعدادُ 4 ,3 ,2 ,1 كما يظهرُ في الشكلِ المجاورِ. تَمَّ تدويرُ مؤشرَيْهِما معًا مرةً واحدةً عشـــوائيًّا وإيجادُ ناتجِ ضربِ العددَينِ اللَّذَينِ يقفُ عندَهُما المؤشرانِ، أجدُ احتمالَ أَنْ يكونَ ناتجُ ضربِ العددَينِ:

20 يُساوي 4

21 يُساوي 3

مهاراتُ التفكيرِ العُليا

22 **تبريرٌ:** قُرصانِ دائريّانِ كلٌّ منهُما مقسّـــمٌ إلى 8 قطاعاتٍ متطابقةٍ كُتِبَتْ عليها الأعدادُ مِنْ 1 إلى 8 . تَمَّ تدويرُ مؤشرَيِ القرصَينِ معًا مرةً واحدةً عشوائيًّا، وإيجادُ ناتجِ ضربِ العددَينِ اللّذَينِ يقفُ عندَهُما المؤشّرانِ. أجدُ احتمالَ أَنْ يكونَ ناتجُ ضربِ العددَينِ مربعًا كاملًا زوجيًّا، وأبرّر إجابتي.

23 **تبريرٌ:** رمَتْ لمياءُ حجرَيْ نردٍ متمايزَينِ مرةً واحدةً عشوائيًّا، ثُمَّ أوجدَتْ ناتجَ ضربِ العددَينِ الظاهرَينِ. أجدُ احتمالَ ألّا يكونَ ناتجُ الضربِ بَيْنَ 19 وَ35، وأبرّر إجابتي.

24 **مسألةٌ مفتوحةٌ:** أصفُ تجربةً عشوائيةً، ثُمَّ أحدّدُ حادثًا مركّبًا فيها وأجدُ احتمالَهُ.

25 **أكتبُ** كيفَ أجدُ احتمالَ حادثٍ مركّبٍ باستعمالِ مخطّطِ الشجرةِ؟

اختبارُ نهايةِ الوحدةِ

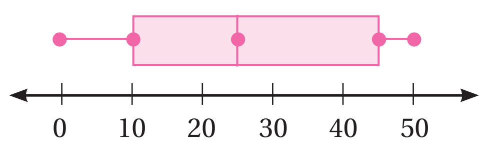
أختارُ رمزَ الإجابةِ الصحيحةِ لكلٍّ ممّا يأتي:

1 مَدى البياناتِ الآتيةِ يُساوي:

53, 57, 62, 48, 45, 65, 40, 42, 55

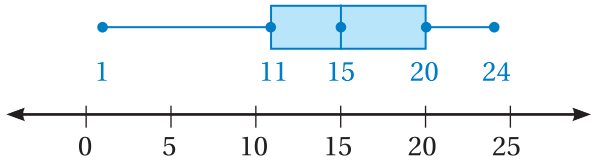
a) 11 **b)** 25 **c)** 53 **d)** 65

2 الرُّبَيعُ الأعلى للبياناتِ الممثَّلةِ بالصُّندوقِ ذي العارضتَينِ أدناهُ هوَ:



a) 0 **b)** 10 **c)** 25 **d)** 45

أستعملُ التمثيلَ بالصُّندوقِ ذي العارضتَينِ الآتي للإجابةِ عَنِ السؤالَينِ 3 وَ 4:



3 نسبةُ البياناتِ الّتي تزيدُ على 20:

a) 25% **b)** 50% **c)** 75% **d)** 100%

4 نسبةُ البياناتِ الّتي تقلُّ عَنْ 15:

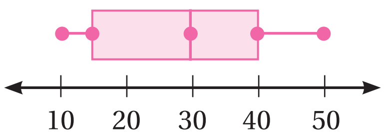
a) 25% **b)** 50% **c)** 75% **d)** 100%

أجدُ المَدى والرُّبَيعيّاتِ والمَدى الرُّبَيعِيَّ لكلِّ مجموعةِ بياناتٍ ممّا يأتي:

5 40, 33, 37, 54, 41, 3, 27, 39, 35

6 132, 127, 106, 140, 158, 135, 129, 138

أستعملُ التمثيلَ بالصُّندوقِ ذي العارضتَينِ أدناهُ للإجابةِ عَنِ الأسئلةِ 7، 8، 9:

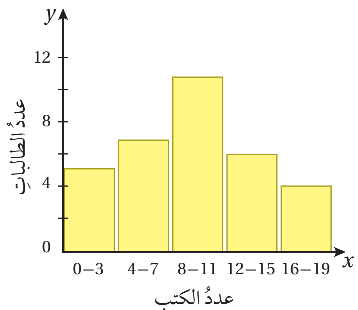


7 أجدُ القيمتَينِ: العُظمى، والصُّغرى، والرُّبَيعَ الأعلى، والرُّبَيعَ الأدنى، والوسيطَ، للبياناتِ الممثَّلةِ.

8 أصفُ توزيعَ البياناتِ.

9 أجدُ القِيَمَ المتطرّفةَ في البياناتِ (إنْ وُجِدَتْ).

10 صمّمَتْ رَنا استبانةً حولَ عددِ الكتبِ الّتي قرأَتْها طالباتُ صفِّها خلالَ شهرٍ، ومثّلَتِ النتائجَ بالمخطّطِ التّكراريِّ الآتي. أكتبُ استدلالًا بالاعتمادِ على التمثيلِ.

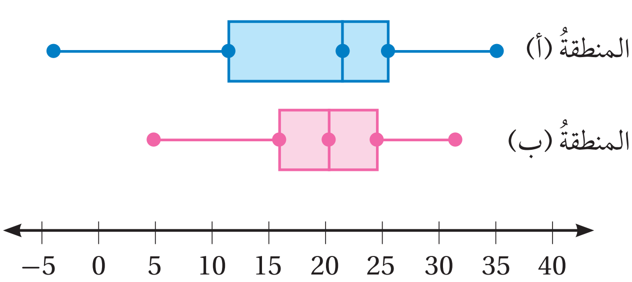


في تجربةِ رمي حجرَيْ نردٍ متمايزَينِ عشوائيًّا، أستعملُ الجدولَ لإيجادِ احتمالِ أنْ يكونَ:

11 العددانِ الظاهرانِ أكبرَ مِنْ 4

12 العددانِ الظاهرانِ زوجيَّينِ.

درجاتُ حرارةٍ: يبيّنُ تمثيلُ الصُّندوقِ ذي العارضتَينِ المزدوجِ أدناهُ درجةَ الحرارةِ وقتَ الظَّهيرةِ في المنطقتَينِ السياحيتَينِ (أ) وَ (ب) على مدارِ العامِ:

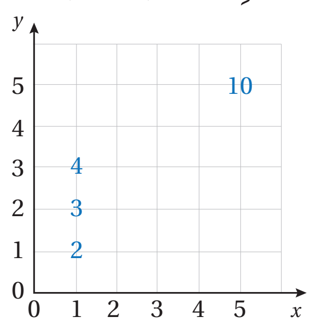


درجاتُ الحرارةِ (°C)

13 أصفُ الفروقَ بَيْنَ مجموعتَي البياناتِ.

14 ترغبُ ريمُ في قضاءِ شهرِ تمّوزَ في إحدى المنطقتَينِ، فأيُّ المنطقتَينِ أنصحُها بِها؟ أبرّرُ إجابتي.

قرصانِ كلٌّ مِنْهُما مقسَّمٌ إلى 5 قطاعاتٍ متطابقةٍ كُتِبَتْ عليها الأعدادُ 1, 2, 3, 4, 5. دُوِّرَ مؤشّراهُما معًا مرةً واحدةً عشوائيًّا وأُوجِدَ ناتجُ جمعِ العددَينِ اللّذَينِ يقفانِ عندَهُما. أكملُ مخطّطَ الاحتمالِ المجاوِرَ، ثُمَّ أجدُ احتمالَ أنْ يكونَ مجموعُ العددَينِ الظاهرَينِ:



15 يُساوي 5

16 عددًا زوجيًّا.

17 أقلَّ مِنْ 7

تدريبٌ على الاختباراتِ الدّوليّةِ

18 أيُّ القِيَمِ في مجموعةِ البياناتِ الآتيةِ متطرّفةٌ؟

3.7, 3.0, 3.4, 3.6, 5.2, 5.4,

3.2, 3.8, 4.3, 4.5, 4.2, 3.7

a) 3.0 b) 5.4

c) 3.0, 5.4 d) لا توجدُ قِيَمٌ متطرّفةٌ

19 وسيطُ البياناتِ الآتيةِ هوَ:

7, 8, 14, 3, 2, 1, 24, 18, 9, 15

a) 8.5 b) 10.1 c) 11.5 d) 23

20 أيُّ مجموعاتِ البياناتِ الآتيةِ المَدى الرُّبَيعِيُّ لَها يُساوي 10؟

a) 3,4, 9, 16, 17, 24, 31

b) 41, 43, 49, 49, 50, 53, 55

c) 12, 14, 17, 19, 19, 20, 21

d) 55, 56, 56, 57, 58, 59, 62

21 أربعُ بطاقاتٍ كُتِبَتْ عليها الأعدادُ 1, 2, 3, 4، إذا سُحِبَتْ منها بطاقةٌ عشوائيًّا وأُرجِعَتْ، ثُمَّ سُحِبَتْ بطاقةٌ أُخرى عشوائيًّا، فما احتمالُ أنْ تحملَ البطاقتانِ العددَ 2؟

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{1}{8}$ d) $\frac{1}{16}$