

(2) 78532

الحل:

1. $2 + 5 + 7 = 14$

2. $3 + 8 = 11$

3. $14 - 11 = 3$

العدد 78532 لا يقبل القسمة على 11؛ لأن العدد 3

(الفرق المطلق بين المجموعين) لا يقبل القسمة على 11

(3) 9768

الحل:

1. $8 + 7 = 15$

2. $6 + 9 = 15$

3. $15 - 15 = 0$

يقبل العدد 9768 القسمة على 11؛ لأن

(الفرق المطلق بين المجموعين) هو العدد 0

(4) 734852

الحل:

1. $2 + 8 + 3 = 13$

2. $5 + 4 + 7 = 16$

3. $16 - 13 = 3$

العدد 734852 لا يقبل القسمة على 11؛ لأن العدد 3

(الفرق المطلق بين المجموعين) لا يقبل القسمة على 11

مثال 2: تُستعمل الخوارزمية الآتية لتحديد إذا كان العدد

يقبل القسمة على 12 أم لا :

1. أجمع أرقام العدد.

2. إذا كان المجموع في الخطوة الأولى يقبل القسمة على 3 ،

فإنني أنتقل إلى الخطوة الثالثة، وإلا فإن العدد لا يقبل

القسمة على 12

3. إذا كان العدد المكوّن من أوّل رقمين في العدد (أحاد العدد

وعشراته) يقبل القسمة على 4 ، فإن العدد يقبل

القسمة على 12 ، وإلا فإنه لا يقبل القسمة على 12

أطبّق الخوارزمية السابقة لبيان إذا كان كل عدد ممّا يأتي يقبل

القسمة على 12 أم لا :

الدرس الأول : الخوارزميات

Algorithm

1. الخوارزميات المكتوبة بالكلماتالخوارزمية : هي مجموعة من التعليمات أو الخطوات المنظمة التي تُحدّد كيفية حلّ مشكلة مُعيّنة .أمثلة على الخوارزميات :

(1) ضرب عددين يتكوّن كلّ منهما من منزلتين

(2) جمع كسرين غير مُتشابهين

(3) إيجاد الوسيط لمجموعة من البيانات.

طرائق كتابة الخوارزمية :طريقة الكلمات (وهي وصف للخوارزمية بجمل (خطوات)

متسلسلة من دون استعمال أيّ رموز في هذه الجمل) .

مثال 1: تُستعمل الخوارزمية الآتية لتحديد إذا كان العدد

يقبل القسمة على 11 أم لا :

1. أجمع الأرقام التي في المواضع الفردية من العدد.

2. أجمع الأرقام التي في المواضع الزوجية من العدد.

3. أجد الفرق المطلق بين المجموعين في الخطوتين السابقتين.

4. إذا كان الفرق المطلق 0 أو يقبل القسمة على 11 ، فإن العدد

يقبل القسمة على 11 ، وإلا فإنه لا يقبل القسمة على 11

أطبّق الخوارزمية السابقة لبيان إذا كان كل عدد ممّا يأتي يقبل

القسمة على 11 أم لا :

(1) 86416

الحل:

1. $6 + 4 + 8 = 18$

2. $1 + 6 = 7$

3. $18 - 7 = 11$

يقبل العدد 86416 القسمة على 11؛ لأن العدد 11

(الفرق المطلق بين المجموعين) يقبل القسمة على 11

أطبّق الخوارزمية السابقة لبيان إذا كان كل عدد ممّا يأتي سعيدًا أم لا :

(1) 19

المرحلة الأولى : $1^2 + 9^2 = 1 + 81 = 82$

المرحلة الثانية : $8^2 + 2^2 = 64 + 4 = 68$

المرحلة الثالثة : $6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$

المرحلة الرابعة : $1^2 + 0^2 + 0^2 = 1 + 0 + 0 = 1$

النتيجة: العدد 19 سعيد ✓

(2) 42

المرحلة الأولى : $4^2 + 2^2 = 16 + 4 = 20$

المرحلة الثانية : $2^2 + 0^2 = 4 + 0 = 4$

النتيجة: العدد 42 غير سعيد ✗

(3) 49

المرحلة الأولى : $4^2 + 9^2 = 16 + 81 = 97$

المرحلة الثانية : $9^2 + 7^2 = 81 + 49 = 130$

المرحلة الثالثة : $1^2 + 3^2 + 0^2 = 1 + 9 + 0 = 10$

المرحلة الرابعة : $1^2 + 0^2 = 1 + 0 = 1$

النتيجة: العدد 49 سعيد ✓

(4) 25

المرحلة الأولى : $2^2 + 5^2 = 4 + 25 = 29$

المرحلة الثانية : $2^2 + 9^2 = 4 + 81 = 85$

المرحلة الثالثة : $8^2 + 5^2 = 64 + 25 = 89$

المرحلة الرابعة : $8^2 + 9^2 = 64 + 81 = 145$

المرحلة الخامسة : $1^2 + 4^2 + 5^2 = 1 + 16 + 25 = 42$

المرحلة السادسة : $4^2 + 2^2 = 16 + 4 = 20$

المرحلة السابعة : $2^2 + 0^2 = 4 + 0 = 4$

النتيجة: العدد 25 غير سعيد ✗

(1) 7104

الحل:

1. $7 + 1 + 0 + 4 = 12$

2. العدد 12 يقبل القسمة على 3. إذن نكمل الى الخطوة الثالثة

3. يقبل العدد 7104 القسمة على 12 ؛ لأنّ العدد 04

يقبل القسمة على 4

(2) 3248940

الحل:

$3 + 2 + 4 + 8 + 9 + 4 + 0 = 30$

العدد 30 يقبل القسمة على 3. إذن نكمل الى الخطوة الثالثة

العدد 3248940 يقبل القسمة على 12. لأنّ العدد 40

يقبل القسمة على 4.

(3) 5762

الحل:

$5 + 7 + 6 + 2 = 20$

العدد 20 لا يقبل القسمة على 3. إذن نتوقف والحكم هو أن

العدد 5762 لا يقبل القسمة على 12

(4) 81456

الحل:

$8 + 1 + 4 + 5 + 6 = 24$

العدد 24 يقبل القسمة على 3. إذن نكمل الى الخطوة الثالثة

يقبل العدد 81456 القسمة على 12 ؛ لأنّ العدد 56 يقبل

القسمة على 4

مثال 3 : تستعمل الخوارزمية الآتية لتحديد إذا كان العدد

الكلّي سعيدًا أم لا :

1. أجد مربّعات أرقام العدد.
2. أجد مجموع مربّعات أرقام العدد.
3. أضع مجموع مربّعات أرقام العدد بدلًا من العدد نفسه.
4. أستمرّ في تكرار الخطوة الأولى والخطوة الثانية لكل ناتج حتّى أحصل على مجموع من منزلة واحدة؛ فإذا كان هذا المجموع 1، كان العدد سعيدًا في هذه الحالة، وإذا كان هذا المجموع 4، فيكون العدد وقتنّ غير سعيد.

2. الخوارزميات المكتوبة بطريقة شبه رمزية

تُكتب الخوارزمية أيضًا باستعمال الطريقة شبه الرمزية ،
وفيها توصف الخوارزمية بخطوات متسلسلة مُرقمة تتضمن
العديد من الرموز. غير أن تتبع الخوارزمية المكتوبة بهذه
الطريقة يكون صعبًا في بعض الأحيان، ويحتاج إلى تنظيم؛ لذا
يُمكن استعمال جدول التتبع لتدوين القيمة الناتجة من كل
خطوة أثناء تطبيق الخوارزمية .

مثال 1 : تأمل الخوارزمية الآتية المكتوبة بالطريقة شبه
الرمزية ، ثم أجيب عن كل مما يأتي :

1. Let $n = 1, A = 1$
2. Print A
3. Let $B = A + 2$
4. Print B
5. Let $n = n + 1, A = B$
6. If $n < 4$, go to step 3
7. If $n = 4$, Stop

(1) أطبق الخوارزمية باستعمال جدول التتبع لإيجاد مخرجاتها .

step	n	A	B	Print
1	1	1		
2				1
3			3	
4				3
5	2	3		
6→3			5	
4				5
5	3	5		
6→3			7	
4				7
5	4	7		
6→7	Stop			

مخرجات الخوارزمية هي : 1 , 3 , 5 , 7

(2) أصف مخرجات الخوارزمية .

تمثل مخرجات الخوارزمية الأعداد الفردية الموجبة التي تقل
عن العدد 9 .

مثال 2 : تأمل الخوارزمية الآتية المكتوبة بالطريقة شبه
الرمزية ، ثم أجيب عن كل مما يأتي :

1. Let $n = 1, A = 1, B = n + A$
2. Print B
3. Let $C = B + 2$
4. Print C
5. Let $n = n + 1, B = C$
6. If $n < 5$, go to step 3
7. If $n = 5$, Stop

(1) أطبق الخوارزمية باستعمال جدول التتبع لإيجاد مخرجاتها .

Step	n	A	B	C	Print
1	1	1	2		
2					2
3				4	
4					4
5	2		4		
6→3				6	
4					6
5	3		6		
6→3				8	
4					8
5	4		8		
6→3				10	
4					10
5	5		10		
6→7	Stop				

مخرجات الخوارزمية هي : 2 , 4 , 6 , 8 , 10

(2) أصف مخرجات الخوارزمية .

تمثل مخرجات الخوارزمية الأعداد الزوجية الموجبة التي تقل
عن العدد 12

مثال 3: أنامل الخوارزمية الآتية المكتوبة بالطريقة شبه الرمزية ، ثم أجيب عن كل مما يأتي :

1. Let $n = 0, x = 0, y = 1$
2. Let $x = x + 1, y = yx$
3. Print y
4. Let $n = n + 1$
5. If $n < 4$, go to step 2
6. If $n = 4$, Stop

(1) أطبق الخوارزمية باستعمال جدول التتبع لإيجاد مخرجاتها .

Step	n	x	y	Print
1	0	0	1	
2		1	1	
3				1
4	1			
5 → 2		2	2	
3				2
4	2			
5 → 2		3	6	
3				6
4	3			
5 → 2		4	24	
3				24
4	4			
5 → 6	Stop			

مخرجات الخوارزمية هي : 1 , 2 , 6 , 24

(2) أصف مخرجات الخوارزمية .

مخرجات الخوارزمية هي حدود متتالية عددية حدها الأول 1 وقيمة كل حد منها بعد ذلك يساوي رتبته مضروبة بقيمة الحد السابق له . (أو : هي مضروبات الاعداد من 1 الى 4)

3. الخوارزميات الممثلة بمخططات سير العمليات .

يُمكن أيضًا تمثيل الخوارزمية باستعمال مخطط سير العمليات وهو مخطط يتكوّن من أشكال هندسية مرتبطة بأسهم وخطوط تصف خطوات الخوارزمية وسير العمليات فيها .
بوجه عام، تُستعمل الأشكال (الصناديق) الآتية للدلالة على خطوات مُحَدَّدة في الخوارزمية :

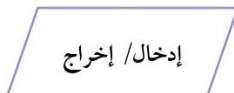
1. صندوق القرار



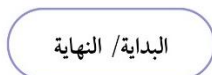
2. صندوق التعليمات



3. صندوق إدخال أو إخراج

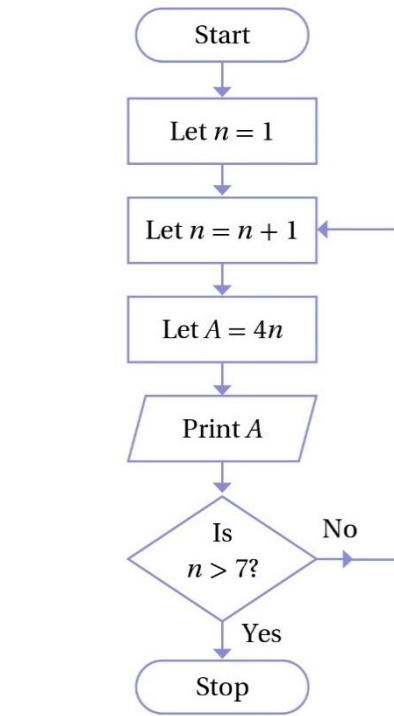
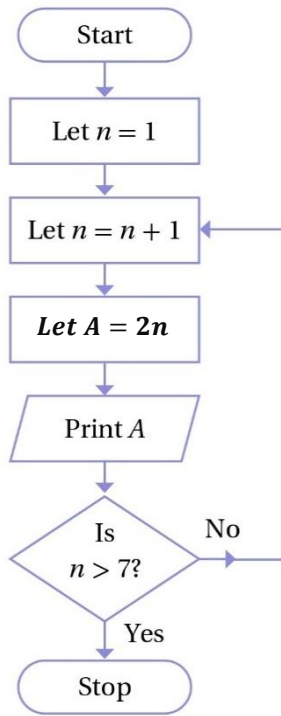


4. صندوق البداية أو النهاية



مثال 1: أتأمل الخوارزمية الآتية المُمثلة بمُخطّط سير

العمليات، ثم أجيب عن كلِّ ممَّا يأتي :

**(1)** أطبّق الخوارزمية باستعمال جدول التتبُّع لإيجاد مُخرجاتها .

n	A	Print A	Is $n > 7$?
1			
2	4	4	no
3	6	6	no
4	8	8	no
5	10	10	no
6	12	12	no
7	14	14	no
8	16	16	yes

مُخرجات الخوارزمية هي :

4 , 6 , 8 , 10 , 12 , 14 , 16

(2) أصف مخرجات الخوارزمية .

تُمثّل مُخرجات الخوارزمية مضاعفات العدد 2 ، التي تزيد على
أوتساوي 4 ، وتقل عن 18 .

(1) أطبّق الخوارزمية باستعمال جدول التتبُّع لإيجاد مُخرجاتها .

n	A	Print A	Is $n > 7$?
1			
2	8	8	No
3	12	12	no
4	16	16	no
5	20	20	no
6	24	24	no
7	28	28	no
8	32	32	yes

مُخرجات الخوارزمية هي :

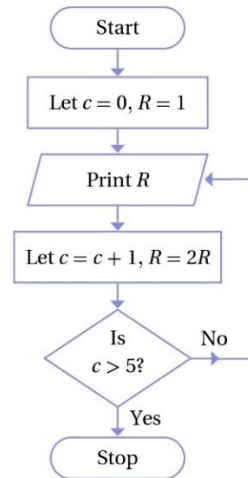
8 , 12 , 16 , 20 , 24 , 28 , 32

(2) أصف مخرجات الخوارزمية .

تُمثّل مُخرجات الخوارزمية مضاعفات العدد 4 ، التي تزيد على
أوتساوي 8 ، وتقل عن 36 .

مثال 3: أتأمل الخوارزمية الآتية المُمثلة بمُخطّط سير

العمليات، ثم أجيب عن كلِّ ممَّا يأتي :

**(1)** أطبّق الخوارزمية باستعمال جدول التتبُّع لإيجاد مُخرجاتها .

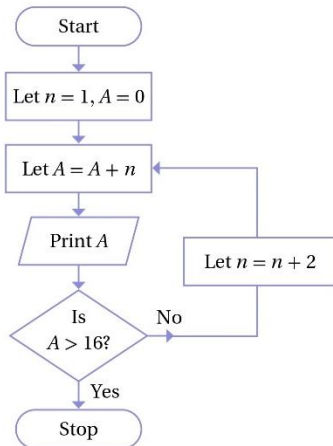
c	R	Print R	Is c > 5 ?
0	1	1	
1	2	2	No
2	4	4	No
3	8	8	No
4	16	16	No
5	32	32	No
6	64		Yes
Stop			

مُخرجات الخوارزمية هي :

1 , 2 , 4 , 8 , 16 , 32

(2) أصف مخرجات الخوارزمية .تُمثّل مُخرجات الخوارزمية تعويض قيمة x بـ 0 و 1 و 2 و .. إلخفي الاقتران الآتي: $f(x) = 2^x$ **مثال 4:** أتأمل الخوارزمية الآتية المُمثلة بمُخطّط سير

العمليات، ثم أجيب عن كلِّ ممَّا يأتي :

**(1)** أطبّق الخوارزمية باستعمال جدول التتبُّع لإيجاد مُخرجاتها .

n	A	Print	Is A > 16 ?
1	0		
	1	1	No
3	4	4	No
5	9	9	No
7	16	16	No
9	25	25	Yes
Stop			

مُخرجات الخوارزمية هي :

1 , 4 , 9 , 16 , 25

(2) أصف مخرجات الخوارزمية .

مخرجات الخوارزمية هي مربعات الاعداد من 1 الى 5 لأن كل

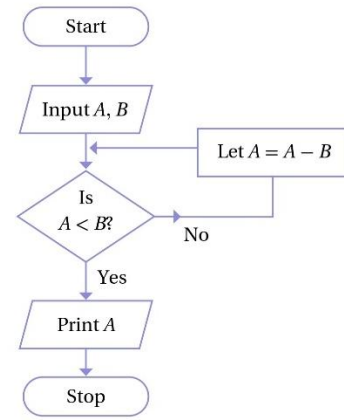
واحد منهما هو المجموع التراكمي لقيم n (أعداد فردية

متتالية) ، فالاول هو عدد فردي 1 والثاني هو مجموع 1 مع 3

والثالث هو مجموع 1 و 3 و 5 وهكذا

مثال 5 : أنامل الخوارزمية الآتية المُمثلة بمُخطَط سير

العمليات، ثم أجيب عن كلِّ ممَّا يأتي :



(3) أطبّق الخوارزمية باستعمال جدول التتبُّع عندما :

$$A = 27, B = 4$$

A	B	Is $A < B$?	Print
27		No	
23		No	
19		No	
15		No	
11		No	
7		No	
3		Yes	3
Stop			

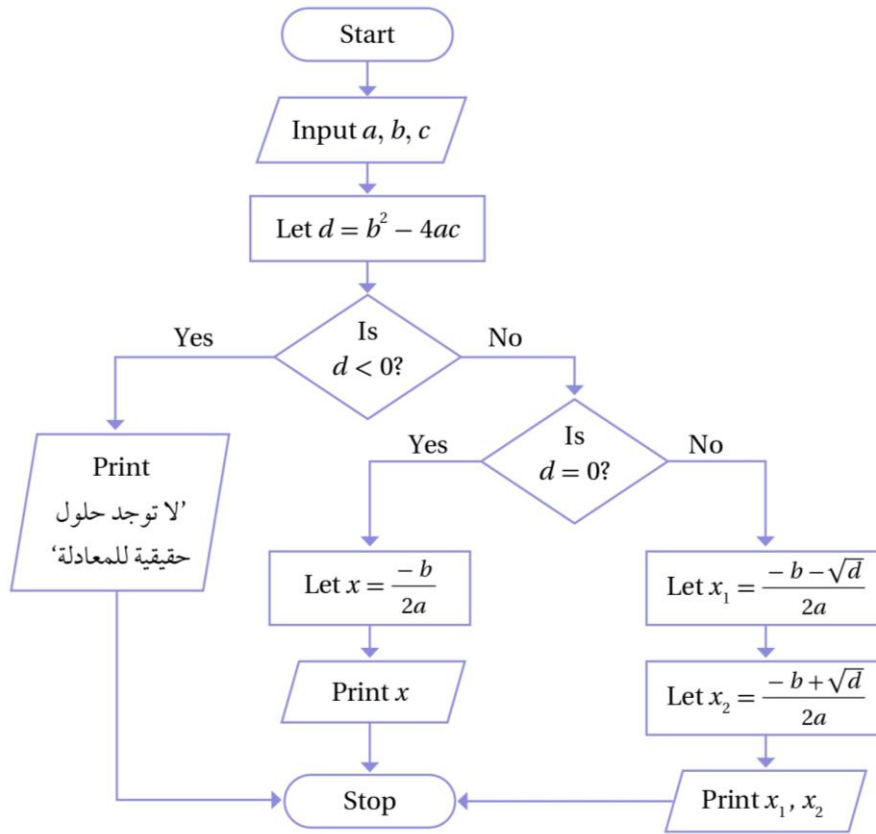
مخرجات الخوارزمية هي : 3

(4) أصف ما يتحقق من تطبيق هذه الخوارزمية .

بقي قسمة العدد A على العدد B

توجد استعمالات رياضية للخوارزميات أكثر تعقيدًا من تلك التي نوقشت في المثال السابق ، مثل : تحديد إذا كان لمعادلة تربيعية حلول حقيقية أم لا ، وإيجاد هذه الحلول .

مثال 1 : تُستعمل الخوارزمية الآتية لإيجاد الجذور الحقيقية للمعادلة التربيعية : $ax^2 + bx + c = 0$. أطبق الخوارزمية ، ثم أحدد المخرج لكل من المعادلات التربيعية التالية :



أتعلّم

تُستعمل كلمة (Input) للدلالة على أمر إدخال المعطيات.

أتذكّر

القانون العام لحلّ المعادلة التربيعية: $ax^2 + bx + c = 0$ ، حيث $a \neq 0$ هو:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
وتختلف طبيعة الناتج؛ لأنّ المُميز $\Delta = b^2 - 4ac$ قد يكون عددًا موجبًا، أو عددًا سالبًا، أو صفرًا.

(1) $x^2 + 7x + 15 = 0$

a	b	c	d	Is d < 0 ?
1	7	15	-11	Yes

المُخرج : لا توجد حلول حقيقية للمعادلة.

(2) $2x^2 + 20x + 32 = 0$

a	b	c	d	Is d < 0 ?	Is d = 0 ?	x ₁	x ₂
2	20	32	144	No	No	-8	-2

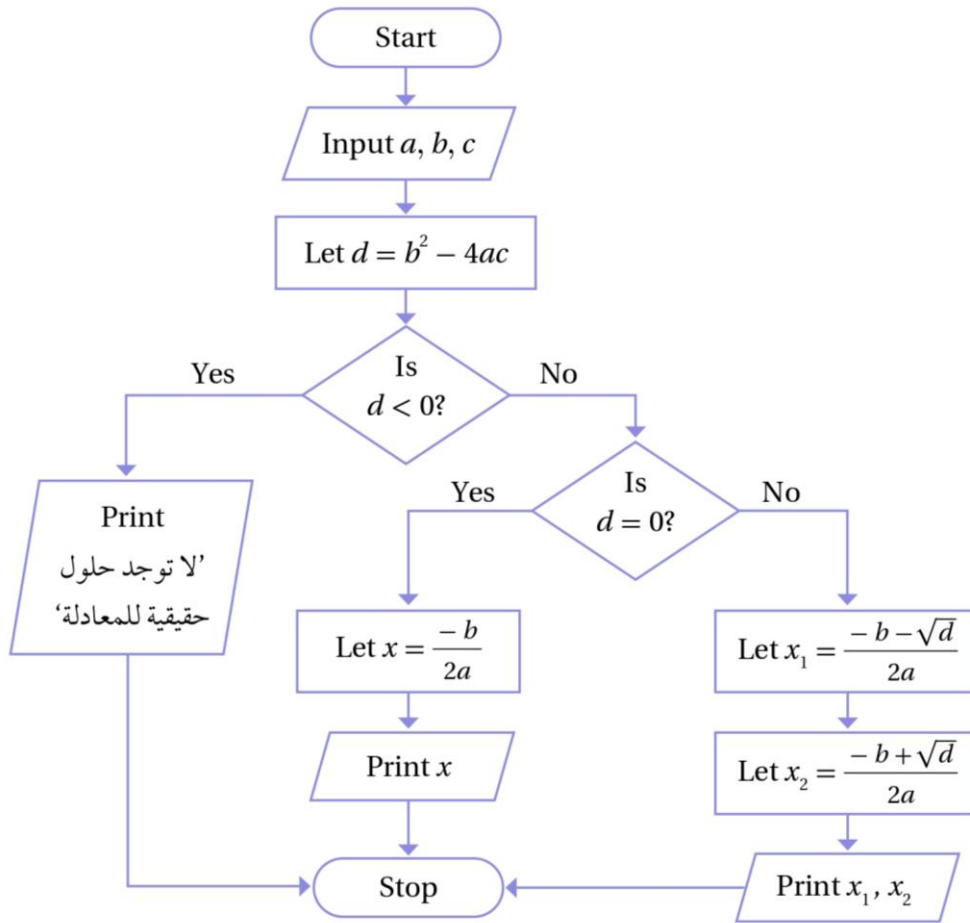
المُخرج : $x_1 = -8$, $x_2 = -2$

(3) $4x^2 - 16x + 16 = 0$

a	b	c	d	Is d < 0 ?	Is d = 0 ?	x
4	-16	16	0	No	Yes	2

المُخرج : $x = 2$

مثال 2: تُستعمل الخوارزمية الآتية لإيجاد الجذور الحقيقية للمعادلة التربيعية: $ax^2 + bx + c = 0$. أطبق الخوارزمية، ثم أحدد المخرج لكل من المعادلات التربيعية التالية :



(1) $x^2 + 4x - 12 = 0$

a	b	c	d	Is $d < 0$?	Is $d = 0$?	x_1	x_2
1	4	-12	64	No	No	-6	2

المُخَرَج: $x_1 = -6$, $x_2 = 2$

(2) $3x^2 + 8x + 15 = 0$

a	b	c	d	Is $d < 0$?
3	8	15	-116	Yes

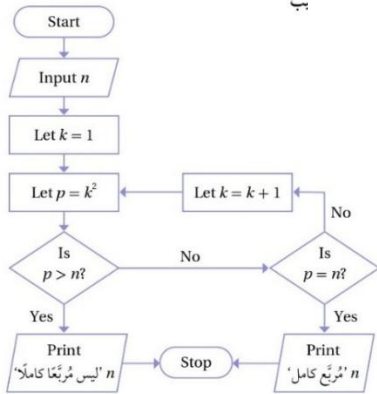
المُخَرَج: لا توجد حلول حقيقية للمعادلة.

(3) $2x^2 + 12x + 18 = 0$

a	b	c	d	Is $d < 0$?	Is $d = 0$?	x
2	12	18	0	No	Yes	-3

المُخَرَج: $x = -3$

مثال 4: أتأمل الخوارزمية المجاورة المُمثلة بمُخطّط سير العمليات، ثمّ أجيب عن السؤالين الآتيين :



(1) أصف الاستعمال الرياضي لهذه الخوارزمية.

تحديد ما اذا كان العدد n مربع كامل أو لا

(2) أطبّق الخوارزمية على العددين الآتيين باستعمال جدول التتبّع لإيجاد مُخرَج كلّ منها :

a) $n = 24$

n	k	p	$p > n ?$	$p = n ?$	Print
24					
	1	1	No	No	
	2	4	No	No	
	3	9	No	No	
	4	16	No	No	
	5	25	Yes		"ليس مربع كامل"
stop					

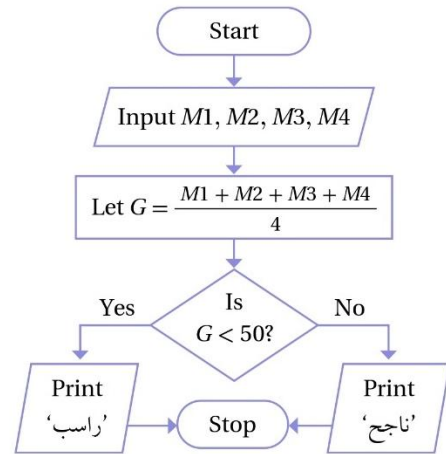
مُخرَج الخوارزمية هو : 24 ليس مربعاً كاملاً

b) $n = 16$

n	k	p	$p > n ?$	$p = n ?$	Print
16					
	1	1	No	No	
	2	4	No	No	
	3	9	No	No	
	4	16	No	Yes	"16 مربع كامل"
stop					

مُخرَج الخوارزمية هو : 24 ليس مربعاً كاملاً

مثال 3: أتأمل الخوارزمية المجاورة المُمثلة بمُخطّط سير العمليات، ثمّ أجيب عن السؤالين الآتيين :



(1) أصف الاستعمال الرياضي لهذه الخوارزمية.

الحل:

تُسْتَعْمَل الخوارزمية الآتية في حساب معدل طالب بجمع

علاماته في 4 مواد ، ثم تصنيفه الى ناجح اذا كان معدله

اكبر من او يساوي 50 أو راسب اذا كان معدله اقل من 50

(2) أطبّق الخوارزمية على الأعداد الآتية باستعمال

جدول التتبّع لإيجاد مُخرَج كلّ منها :

a) $M1 = 48$, $M2 = 52$, $M3 = 46$
 $M4 = 49$

الحل:

M1	M2	M3	M4	G	$G > 50 ?$	Print
48	52	46	49	48.75	No	"راسب"

b) $M1 = 71$, $M2 = 85$, $M3 = 62$
 $M4 = 45$

الحل:

M1	M2	M3	M4	G	$G > 50 ?$	Print
71	85	62	45	65.75	Yes	"ناجح"

يُمكن إيجاد الجذر التربيعي لأي عدد حقيقي موجب مُقَرَّبًا إلى أقرب منزلتين عشريتين باستعمال الخوارزمية الآتية:

1. أدخل العدد N .
2. أجد: $S = \frac{N}{2}$.
3. أجد: $T = \frac{\frac{N}{S} + S}{2}$ مُقَرَّبًا إلى أقرب منزلتين عشريتين.
4. إذا كانت $S = T$ بعد تقريب قيمة T إلى أقرب منزلتين عشريتين، فإنني أنتقل إلى الخطوة السابعة.
5. أضع قيمة T بدلًا من قيمة S .
6. أعود إلى الخطوة الثالثة.
7. أطبع قيم S مُقَرَّبًا إلى أقرب منزلتين عشريتين.

أطبّق الخوارزمية السابقة لإيجاد الجذر التربيعي لكل عدد ممّا يأتي مُقَرَّبًا إلى أقرب منزلتين عشريتين:

1 7

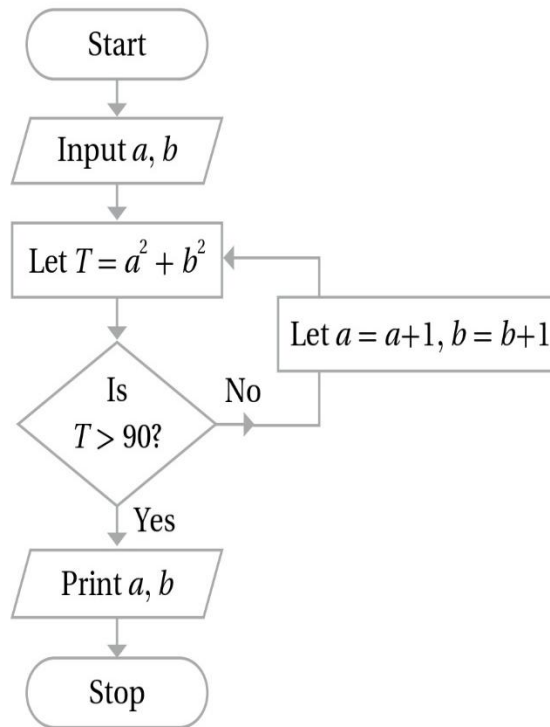
2 3

3 11

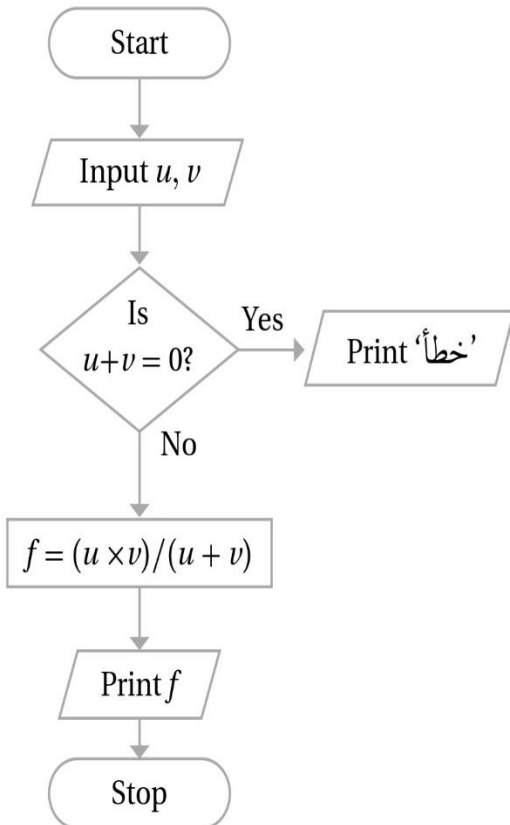
4 أطبّق الخوارزمية الآتية لإيجاد مُخرَجهما عندما $P = 600$, $R = 4$, $T = 5$.

1. Input P, R, T
2. Let $I = (P \times R \times T) / 100$
3. Let $A = P + I$
4. Let $M = A / (T \times 12)$
5. Print M
6. Stop

5 أُنطبق الخوارزمية الآتية لإيجاد مُخرجاتها عندما $a = 3, b = 1$.



أَتأمل الخوارزمية المجاورة المُمثلة بمُخطط سَير العمليات،
ثمَّ أُنطبق الخوارزمية على كُلِّ من قيمة u وقيمة v المُعطاة في
ما يَأْتِي لإيجاد المُخرَج:

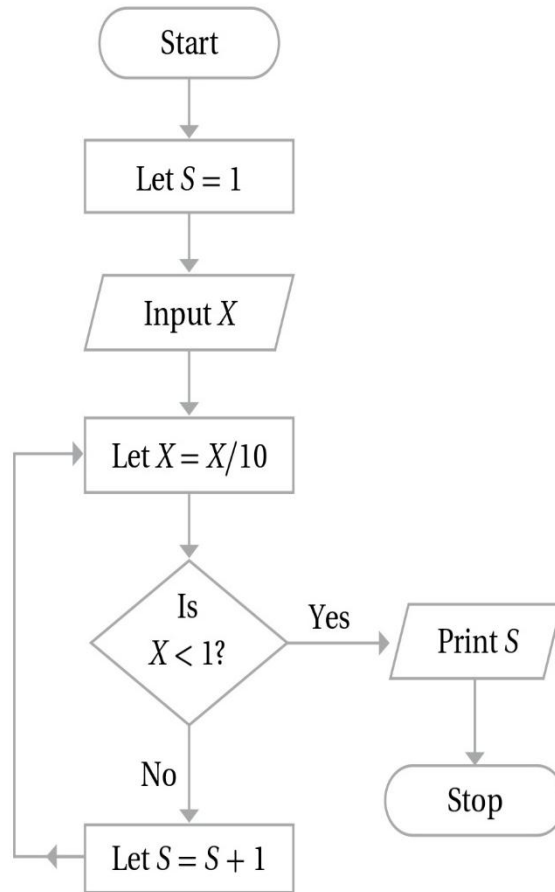


6 $u = 8, v = 8$

7 $u = 7, v = -7$

8 $u = 12, v = 4$

أتأمل الخوارزمية الآتية المُمثَّلة بِمُخَطَّط سَيْرِ العمليات، ثُمَّ أَطَبِّقُ الخوارزمية على قيمة X المُعطاة في ما يأتي لِإيجاد المُخرَج:



9 $X = 48$

10 $X = 9170$

11 $X = -800$

[illegible]

مثال 1: يُراد تعبئة الغُلب (المُعطى ارتفاعاتها في ما يلي) في

صناديق، ارتفاع كل منها 10 وحدات طول، علماً بأنَّ للُلب والصناديق المقطع العرضي نفسه. أجد الحد الأدنى من عدد الصناديق اللازمة لتعبئة الغُلب .

5 7 3 5 6 2 4 4 7 4

الحل:

الخطوة 1: أجد مجموع ارتفاعات الغُلب .

$$5 + 7 + 3 + 5 + 6 + 2 + 4 + 4 + 7 + 4 = 47$$

الخطوة 2: أقسم مجموع ارتفاعات الغُلب على ارتفاع

الصندوق الواحد .

$$\frac{47}{10} = 4.7 \approx 5$$

إذن، الحد الأدنى من عدد الصناديق اللازمة لتعبئة الغُلب هو 5 صناديق .

مثال 2: يُراد تعبئة الغُلب (المُعطى ارتفاعاتها في ما يلي) في

صناديق، ارتفاع كل منها وحدة طول واحدة ، علماً بأنَّ للُلب والصناديق المقطع العرضي نفسه. أجد الحد الأدنى من عدد الصناديق اللازمة لتعبئة الغُلب .

0.5 0.7 0.5 0.2 0.4 0.2 0.5
0.1 0.6

الحل:

الخطوة 1: أجد مجموع ارتفاعات الغُلب .

$$0.5 + 0.7 + 0.5 + 0.2 + 0.4 + 0.2 + 0.5 + 0.1 + 0.6 = 3.7$$

الخطوة 2: أقسم مجموع ارتفاعات الغُلب على ارتفاع

الصندوق الواحد .

$$\frac{3.7}{1} = 3.7 \approx 4$$

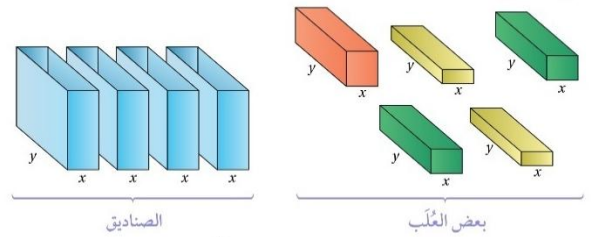
إذن، الحد الأدنى من عدد الصناديق اللازمة لتعبئة الغُلب هو 4 صناديق .

الدرس الثاني : خوارزميات تعبئة الصندوق

Bin - Packing Algorithms

1. الخوارزميات المكتوبة بالكلمات

إذا كان لديَّ n من الغُلب التي لها المقطع العرضي نفسه (مستطيل عرضه x ، وطوله y) ، لكنَّ ارتفاعاتها متفاوتة كما يظهر في الشكل التالي، وأردت تعبئتها في صناديق، عرض كل منها x ، وطول كل منها y ، وارتفاعاتها متساوية، فكيف يمكنني فعل ذلك باستعمال أقل عدد ممكن من الصناديق ؟



تُسمى المسألة السابقة مسألة تعبئة الصندوق، ويمكن حلها باستعمال ما يُسمى **خوارزميات تعبئة الصناديق**

يُستعمل هذا النوع من الخوارزميات في حل كثير من المسائل الحياتية التي تنطوي على المبدأ نفسه، مثل :

- (1) تنظيم صناديق البضائع وترتيبها داخل حاويات الشحن
- (2) تحميل البضائع في شاحنات عليها قيود في الكتلة
- (3) تخزين ملفات بيانات مختلفة الحجم في عدد من الأقراص المُدمجة .

تتمثل الخطوة الأولى لحل مسألة تعبئة الصندوق في إيجاد الحد الأدنى من عدد الصناديق اللازمة كما هو مبين في المثال الآتي .

أمثلة على الخوارزميات :

- (4) ضرب عددين يتكوّن كل منهما من منزلتين

2. خوارزمية الملاءمة الأولى

توجد خوارزميات عديدة لحل مسألة تعبئة الصندوق، منها خوارزمية الملاءمة الأولى في ما يأتي بيان لخطوات هذه الخوارزمية .

خوارزمية الملاءمة الأولى

يُمكن حلُّ مسائل تعبئة الصندوق باستعمال خوارزمية الملاءمة الأولى، وذلك باتباع الخطوات الآتية:

1. إيجاد الحد الأدنى من عدد الصناديق اللازمة .
2. اتباع ترتيب العناصر (العُلب) المُعطى في المسألة .
3. وضع كل عنصر في أول صندوق مُتوافر يتسع له، بدءًا بالصندوق الأول في كل مرة .
4. في حال لم يتسع أي صندوق للعنصر الذي يُراد وضعه، فإنه يجب إضافة صندوق آخر

ملاحظة: إذا كان عدد الصناديق المُتوافرة (التي حصلت عليها) مُساويًا للحد الأدنى من عدد الصناديق اللازمة، فهذا يعني أنني توصّلتُ إلى الحل الأمثل .

مثال 1: يُراد تعبئة العُلب (المُعطى ارتفاعاتها في ما يلي) في صناديق، ارتفاع كل منها 1.5 وحدة طول، إذا علمت أن للعُلب والصناديق المقطع العرضي نفسه. فأجيب عن الاسئلة تباعاً

0.8 0.6 0.5 0.7 0.9 0.4 0.3
0.6 0.5 0.6

- (1) أستعمل خوارزمية الملاءمة الأولى لتعبئة العُلب في الصناديق، ثمَّ أجد عدد الصناديق اللازمة لذلك .

الحل:

الخطوة 1: أجد الحد الأدنى من عدد الصناديق اللازمة لتعبئة العُلب .

$$0.8 + 0.6 + 0.5 + 0.7 + 0.9 + 0.4 + 0.3 + 0.6 + 0.5 + 0.6 = 5.9$$

$$\frac{5.9}{1.5} = 3.933333... \approx 4$$

إذن، الحد الأدنى من عدد الصناديق اللازمة لتعبئة العُلب هو 4 صناديق .

الخطوة 2: أضع كل عُلبة في أول صندوق مُتوافر يتسع لها، بدءًا بالصندوق الأول في كل مرة، وألترم ترتيب العناصر في المسألة .

عُلب الصندوق الأول B1 : 0.8 , 0.6
عُلب الصندوق الثاني B2 : 0.5 , 0.7 , 0.3
عُلب الصندوق الثالث B3 : 0.9 , 0.4
عُلب الصندوق الرابع B4 : 0.6 , 0.5
عُلب الصندوق الخامس B5 : 0.6

إذن، عدد الصناديق اللازمة لتعبئة العُلب باستعمال الملاءمة الأولى هو 5 صناديق .

(2) هل توصّلتُ إلى الحل الأمثل لهذه المسألة؟ أبرر إجابتي .

الحل:

لا؛ لأن عدد الصناديق المُستعملة في هذا الحل يزيد على الحد الأدنى من عدد الصناديق اللازمة .

(3) أجد الارتفاع المهدور في الصناديق جميعها .

الحل:

لإيجاد الارتفاع المهدور في الصناديق جميعها، أجد أولاً الارتفاع المهدور في كل صندوق، ثمَّ أجمع قيم الارتفاعات المهدورة جميعها:

$$0.1 + 0.2 + 0.4 + 0.9 = 1.6$$

إذن، هُدر 1.6 وحدة طول في الصناديق جميعها

مثال 2: يُراد تعبئة العُلب (المُعطى ارتفاعاتها في ما يلي) في

صناديق، ارتفاع كلٍّ منها 20 وحدة طول، اذا علمت أنَّ للعلب والصناديق المقطع العرضي نفسه. فأجيب عن الاسئلة تباعاً

11 2 15 5 6 17 7

(1) أستعمل خوارزمية المُلاءمة الأولى لتعبئة العُلب في الصناديق، ثمَّ أحدد عدد الصناديق اللازمة لذلك .

الحل:

الخطوة 1: أجد الحد الأدنى من عدد الصناديق اللازمة لتعبئة العُلب .

$$11 + 2 + 15 + 5 + 6 + 17 + 7 = 63$$

$$\frac{63}{20} = 3.15 \approx 4$$

إذن، الحد الأدنى من عدد الصناديق اللازمة لتعبئة العُلب هو 4 صناديق .

الخطوة 2: أضع كل عُلبة في أوّل صندوق مُتوافر يتسع لها، بدءاً بالصندوق الأوّل في كل مرة، وألتزم ترتيب العناصر في المسألة .

B1 : 11 , 2 , 5

عُلب الصندوق الأوّل

B2 : 15

عُلب الصندوق الثاني

B3 : 6 , 7

عُلب الصندوق الثالث

B4 : 17

عُلب الصندوق الرابع

إذن، عدد الصناديق اللازمة لتعبئة العُلب باستعمال المُلاءمة الأولى هو 4 صناديق .

(2) هل توصّلتُ إلى الحلّ الأمثل لهذه المسألة؟ أبرّر إجابتي .

الحل:

نعم؛ لأنَّ عدد الصناديق المُستعملة في هذا الحلّ يساوي الحدّ الأدنى من عدد الصناديق اللازمة .

(3) أجد الارتفاع المهدور في الصناديق جميعها .

الحل:

لإيجاد الارتفاع المهدور في الصناديق جميعها، أحدد أولاً الارتفاع المهدور في كل صندوق، ثمَّ أجمع قيم الارتفاعات المهدورة جميعها :

$$2 + 5 + 7 + 3 = 17$$

إذن، هُدر 17 وحدة طول في الصناديق جميعها

مثال 3: يُراد تعبئة العُلب (المُعطى ارتفاعاتها في ما يلي) في

صناديق، ارتفاع كلٍّ منها 5 وحدات طول، اذا علمت أنَّ للعلب والصناديق المقطع العرضي نفسه. فأجيب عن الاسئلة تباعاً

1.8 1.4 2.6 1.6 2.8 0.9 3.1
0.8 1.2 2.4 0.6

(1) أستعمل خوارزمية المُلاءمة الأولى لتعبئة العُلب في الصناديق، ثمَّ أحدد عدد الصناديق اللازمة لذلك .

الخطوة 1: أجد الحد الأدنى من عدد الصناديق اللازمة لتعبئة العُلب .

$$1.8 + 1.4 + 2.6 + 1.6 + 2.8 + 0.9 + 3.1 + 0.8 + 1.2 + 2.4 + 0.6 = 19.2$$

$$\frac{19.2}{5} = 3.84 \approx 4$$

إذن، الحد الأدنى من عدد الصناديق اللازمة لتعبئة العُلب هو 4 صناديق .

الخطوة 2: أضع كل عُلبة في أوّل صندوق مُتوافر يتسع لها، بدءاً بالصندوق الأوّل في كل مرة، وألتزم ترتيب العناصر في المسألة .

B1 : 1.8 , 1.4 , 1.6 عُلب الصندوق الأوّل

B2 : 2.6 , 0.9 , 0.8 , 0.6 عُلب الصندوق الثاني

B3 : 2.8 , 1.2 عُلب الصندوق الثالث

B4 : 3.1 عُلب الصندوق الرابع

B5 : 2.4 عُلب الصندوق الخامس

إذن، عدد الصناديق اللازمة لتعبئة العُلب باستعمال المُلاءمة الأولى هو 5 صناديق .

(2) هل توصّلتُ إلى الحلّ الأمثل لهذه المسألة؟ أبرّر إجابتي .
لا؛ لأنَّ عدد الصناديق المُستعملة في هذا الحلّ يزيد على الحدّ الأدنى من عدد الصناديق اللازمة .

(3) أجد الارتفاع المهدور في الصناديق جميعها .

لإيجاد الارتفاع المهدور في الصناديق جميعها، أحدد أولاً الارتفاع المهدور في كل صندوق، ثمَّ أجمع قيم الارتفاعات المهدورة جميعها :

$$5(5) - 19.2 = 5.8$$

إذن، هُدر 5.8 وحدة طول في الصناديق جميعها

3. خوارزمية الملاءمة الأولى المتناقصة

توجد خوارزمية أخرى يُمكن استعمالها لحلّ هذه المسألة، هي خوارزمية الملاءمة الأولى المتناقصة، التي تبدأ بترتيب مقاسات العناصر المُعطاة (ارتفاعات العُلب مثلاً) ترتيباً تنازلياً، ثمّ تطبيق خوارزمية الملاءمة الأولى لتعبئة العناصر في الصناديق كما هو مُبيّن أدناه .

خوارزمية الملاءمة الأولى المتناقصة

يُمكن حلّ مسائل تعبئة الصندوق باستعمال خوارزمية الملاءمة الأولى المتناقصة، وذلك بأنّباع الخطوتين الآتيتين :

1. ترتيب مقاسات العناصر تنازلياً
2. تطبيق خوارزمية الملاءمة الأولى على العناصر التي أُعيد ترتيب مقاساتها .

مثال 1: يراد تعبئة العُلب (المُعطى ارتفاعاتها في ما يلي) في

صناديق، ارتفاع كلّ منها وحدتان، اذا علمت أنّ للعُلب

والصناديق المقطع العرضي نفسه. فأجيب عن الاسئلة تباعاً

0.6 1.5 1.6 0.2 0.4 0.5 0.7
0.1 0.9 0.3

(1) أستمعمل خوارزمية الملاءمة الأولى المتناقصة لتعبئة

العُلب في الصناديق، ثمّ أحدّد عدد الصناديق اللازمة

لذلك .

الخطوة 1: أجد الحد الأدنى من عدد الصناديق اللازمة لتعبئة

العُلب .

$$0.6 + 1.5 + 1.6 + 0.2 + 0.4 + 0.5 + 0.7 \\ + 0.1 + 0.9 + 0.3 = 6.8$$

$$\frac{6.8}{2} = 3.4 \approx 4$$

إذن، الحد الأدنى من عدد الصناديق اللازمة لتعبئة العُلب

هو 4 صناديق .

الخطوة 2: أرتب ارتفاعات العلب ترتيباً تنازلياً .

1.6 , 1.5 , 0.9 , 0.7 , 0.6 , 0.5
0.4 , 0.3 , 0.2 , 0.1

الخطوة 3: أطبّق خوارزمية الملاءمة الأولى على ارتفاعات

العُلب التي أُعيد ترتيب مقاساتها .

B1 : 1.6 , 0.4 **عُلب الصندوق الأول**

B2 : 1.5 , 0.5 **عُلب الصندوق الثاني**

B3 : 0.9 , 0.7 , 0.3 , 0.1 **الصندوق الثالث**

B4 : 0.6 , 0.2 **عُلب الصندوق الرابع**

إذن، عدد الصناديق اللازمة لتعبئة العُلب باستعمال

الملاءمة الأولى المتناقصة هو 4 صناديق .

(2) هل توصّلتُ إلى الحلّ الأمثل لهذه المسألة؟ أبرّر إجابتي .

الحل:

نعم؛ لأنّ عدد الصناديق المُستعملة في هذا الحلّ مساوٍ للحدّ

الأدنى من عدد الصناديق اللازمة .

(3) أجد الارتفاع المهدور في الصناديق جميعها .

الحل:

ألاحظ عدم وجود ارتفاعات مهدورة إلّا في الصندوق الأخير،

وهو ارتفاع يساوي 1.2 وحدة طول .

مثال 2: يُراد تعبئة العُلب (المُعطى ارتفاعاتها في ما يلي) في صناديق، ارتفاع كلٍّ منها 1.5 وحدة طول ، اذا علمت أنَّ للُعب والصناديق المقطع العرضي نفسه. فأجيب عن الاسئلة تباعاً .

0.8 0.6 0.5 0.7 0.9 0.4 0.3
0.6 0.5 0.6

(1) أستعمل خوارزمية المُلاءمة الأولى المتناقصة لتعبئة العُلب في الصناديق، ثمَّ أحدد عدد الصناديق اللازمة لذلك .

الحل:

الخطوة 1: أجد الحد الأدنى من عدد الصناديق اللازمة لتعبئة العُلب .

$$0.8 + 0.6 + 0.5 + 0.7 + 0.9 + 0.4 + 0.3 + 0.6 + 0.5 + 0.6 = 5.9$$

$$\frac{5.9}{1.5} = 3.933333... \approx 4$$

إذن، الحد الأدنى من عدد الصناديق اللازمة لتعبئة العُلب هو 4 صناديق .

الخطوة 2: أرتب ارتفاعات العلب ترتيباً تنازلياً .

0.9 , 0.8 , 0.7 , 0.6 , 0.6 , 0.6 , 0.5 , 0.5 , 0.4 , 0.3

الخطوة 3: أطبق خوارزمية المُلاءمة الأولى على ارتفاعات العُلب التي أعيد ترتيب مقياساتها .

B1 : 0.9 , 0.6 عُلب الصندوق الأول
B2 : 0.8 , 0.7 عُلب الصندوق الثاني
B3 : 0.6 , 0.6 , 0.3 عُلب الصندوق الثالث
B4 : 0.5 , 0.5 , 0.4 عُلب الصندوق الرابع

إذن، عدد الصناديق اللازمة لتعبئة العُلب باستعمال المُلاءمة الأولى المتناقصة هو 4 صناديق .

(2) هل توصَّلتُ إلى الحلِّ الأمثل لهذه المسألة؟ أبرِّر إجابتي .
نعم؛ لأنَّ عدد الصناديق المُستعملة في هذا الحلِّ يساوي الحدَّ الأدنى من عدد الصناديق اللازمة .

(3) أجد الارتفاع المهدور في الصناديق جميعها .

$$0.1$$

إذن، هُدر 0.1 وحدة طول في الصناديق جميعها

مثال 3: يُراد تعبئة العُلب (المُعطى ارتفاعاتها في ما يلي) في صناديق، ارتفاع كلٍّ منها 60 وحدة طول ، اذا علمت أنَّ للُعب والصناديق المقطع العرضي نفسه. فأجيب عن الاسئلة تباعاً .
31 10 38 45 19 47 35 28 12
(1) أستعمل خوارزمية المُلاءمة الأولى المتناقصة لتعبئة العُلب في الصناديق، ثمَّ أحدد عدد الصناديق اللازمة لذلك .

الحل:

الخطوة 1: أجد الحد الأدنى من عدد الصناديق اللازمة لتعبئة العُلب .

$$31 + 10 + 38 + 45 + 19 + 47 + 35 + 28 + 12 = 265$$

$$\frac{265}{60} = 4.416666667... \approx 5$$

إذن، الحد الأدنى من عدد الصناديق اللازمة لتعبئة العُلب هو 5 صناديق .

الخطوة 2: أرتب ارتفاعات العلب ترتيباً تنازلياً .

47, 45, 38, 35, 31, 28, 19, 12, 10

الخطوة 3: أطبق خوارزمية المُلاءمة الأولى على ارتفاعات العُلب التي أعيد ترتيب مقياساتها .

B1 : 47, 12 عُلب الصندوق الأول
B2 : 45, 10 عُلب الصندوق الثاني
B3 : 38, 19 عُلب الصندوق الثالث
B4 : 35 عُلب الصندوق الرابع
B5 : 31 , 28 عُلب الصندوق الخامس

إذن، عدد الصناديق اللازمة لتعبئة العُلب باستعمال المُلاءمة الأولى المتناقصة هو 5 صناديق .

(2) هل توصَّلتُ إلى الحلِّ الأمثل لهذه المسألة؟ أبرِّر إجابتي .
نعم؛ لأنَّ عدد الصناديق المُستعملة في هذا الحلِّ يساوي الحدَّ الأدنى من عدد الصناديق اللازمة .

(3) أجد الارتفاع المهدور في الصناديق جميعها .

$$5(60) - 265 = 35$$

إذن، هُدر 35 وحدة طول في الصناديق جميعها

4. خوارزمية الصندوق الكامل

ألاحظ أن الخوارزمتين اللتين تعلمتُهما في المثالين السابقين لحل مسائل تعبئة الصندوق تشترطان التزام الترتيب المُعطى أو الترتيب التنازلي لمقاسات العناصر. ولكن ثمة خوارزمية ثالثة يُمكن استعمالها لحل مسائل تعبئة الصندوق من دون الالتزام بأي ترتيب لمقاسات العناصر، وهي :

خوارزمية الصندوق الكامل

تبدأ هذه الخوارزمية باختيار العناصر التي يُمكن دمجها معاً ملء الصندوق كاملاً بصرف النظر عن ترتيب مقاساتها، ثم تعبئة العناصر المتبقية باستعمال خوارزمية الملاءمة الأولى.

خوارزمية الصندوق الكامل

يُمكن حل مسائل تعبئة الصندوق باستعمال خوارزمية الصندوق الكامل، وذلك باتباع الخطوات الآتية :

1. إيجاد الحد الأدنى من عدد الصناديق اللازمة .
2. البحث عن العناصر التي يمكن أن تملأ صندوقاً كاملاً، ثم تعبئتها أولاً .
3. تطبيق خوارزمية الملاءمة الأولى على العناصر المتبقية .

مثال 1 : يُراد تعبئة الغُلب (المُعطى ارتفاعاتها في ما يلي) في صناديق، ارتفاع كل منها 17 ، اذا علمت أن للُلب والصناديق المقطع العرضي نفسه. فأجيب عن الاسئلة تباعاً

3 4 5.2 4.4 4.3 5.6 4.6
4.7 3.2 4.8 5.3 4.1

(1) أستعمل خوارزمية الصندوق الكامل لتعبئة الغُلب في الصناديق، ثم أجد عدد الصناديق اللازمة لذلك .

الحل:

الخطوة 1 : أجد الحد الأدنى من عدد الصناديق اللازمة لتعبئة الغُلب .

$$3 + 3 + 5.2 + 4.4 + 4.3 + 5.6 + 4.6 + 4.7 + 3.2 + 4.8 + 5.3 + 4.1 = 53.2$$

$$\frac{53.2}{17} = 3.129 \approx 4$$

إذن، الحد الأدنى من عدد الصناديق اللازمة لتعبئة الغُلب هو 4 صناديق .

الخطوة 2 : أطبق خوارزمية الصندوق الكامل .

B1 : 3 , 4 , 4.7 , 5.3	غُلب الصندوق الأول
B2 : 4.4 , 4.6 , 3.2 , 4.8	غُلب الصندوق الثاني
B3 : 5.2 , 4.3 , 5.6	غُلب الصندوق الثالث
B4 : 4.1	غُلب الصندوق الرابع

(2) هل توصَّلتُ إلى الحل الأمثل لهذه المسألة؟ أبرر إجابتي .
نعم ؛ لأن عدد الصناديق المُستعملة في هذا الحل مساوٍ للحد الأدنى من عدد الصناديق اللازمة .

مثال 2 : يُراد تعبئة الغُلب (المُعطى ارتفاعاتها في ما يلي) في صناديق، ارتفاع كل منها وحدتان ، اذا علمت أن للُلب والصناديق المقطع العرضي نفسه. فأجيب عن الاسئلة تباعاً

0.6 1.5 1.6 0.2 0.4 0.5 0.7
0.1 0.9 0.3

(1) أستعمل خوارزمية الصندوق الكامل لتعبئة الغُلب في الصناديق، ثم أجد عدد الصناديق اللازمة لذلك .

الحل:

$$0.6 + 1.5 + 1.6 + 0.2 + 0.4 + 0.5 + 0.7 + 0.1 + 0.9 + 0.3 = 6.8$$

$$\frac{6.8}{2} = 3.4 \approx 4$$

B1 : 1.5 , 0.5	غُلب الصندوق الأول
B2 : 1.6 , 0.4	غُلب الصندوق الثاني
B3 : 0.7 , 0.3 , 0.9 , 0.1	غُلب الصندوق الثالث
B4 : 0.6 , 0.2	غُلب الصندوق الرابع

إذن، عدد الصناديق اللازمة لتعبئة الغُلب باستعمال الصندوق الكامل هو 4 صناديق .

(2) هل توصَّلتُ إلى الحل الأمثل لهذه المسألة؟ أبرر إجابتي .
نعم ؛ لأن عدد الصناديق المُستعملة في هذا الحل مساوٍ للحد الأدنى من عدد الصناديق اللازمة .

(3) أجد الارتفاع المهدور في الصناديق جميعها .

الارتفاع المهدور في الصناديق جميعها هو 1.2 وحدة طول.

أسئلة متنوعة

سوف نستخدم في هذه الأسئلة جميع الخوارزميات (الملاءمة الأولى والملاءمة الأولى المتناقصة والصندوق الكامل)

مثال 1: قماش: في ما يأتي أطوال 10 قطع قماش بالمتر، يرغب تاجر في قصّها من لفّات قماش كبيرة، طول كلّ منها 60 m

32 45 17 23 38 28 16
9 12 10

(1) أجد الحد الأدنى من عدد لفّات القماش الكبيرة اللازمة لقصّ قطع القماش .

الحل:

$$32 + 45 + 17 + 23 + 38 + 28 + 16 + 9 + 12 + 10 = 230$$

$$\frac{230}{60} = 3.833333 \dots \approx 4$$

إذن، الحد الأدنى من عدد الصناديق اللازمة لتعبئة الغلب هو 4 صناديق .

(2) أجد كيف تُقصّ قطع القماش باستعمال خوارزمية الملاءمة الأولى، ثمّ أجد عدد اللّفات اللازمة لذلك باستعمال هذه الخوارزمية، ثمّ أجد طول الجزء المهدور من القماش .

B1 : 32 , 17 , 9

اللفة الأولى

B2 : 45 , 12

اللفة الثانية

B3 : 23 , 28

اللفة الثالثة

B4 : 38 , 16

اللفة الرابعة

B5 : 10

اللفة الخامسة

إذن، عدد اللّفات اللازمة لقصّ قطع القماش ذات الأطوال المعطاة باستعمال خوارزمية الملاءمة الأولى هو 5 لفّات قماش كبيرة .

لإيجاد طول الجزء المهدور من القماش، أجد أولاً طول الجزء المهدور من كل لفّة كبيرة، ثمّ أجمع أطوال الأجزاء المهدورة :

$$1 + 3 + 9 + 6 + 50 = 70$$

إذن، طول الجزء المهدور من القماش هو : 70 m

مثال 3: يُراد تعبئة الغلب (المُعطى ارتفاعاتها في ما يلي) في صناديق، ارتفاع كلّ منها 65 ، اذا علمت أنّ للغلب والصناديق المقطع العرضي نفسه. فأجيب عن الاسئلة تباعاً :

$$\begin{array}{ccccccc} 42 & 21 & 15 & 16 & 35 \\ 10 & 31 & 11 & 27 & 39 \end{array}$$

(1) أستعمل خوارزمية الصندوق الكامل لتعبئة الغلب في الصناديق، ثمّ أجد عدد الصناديق اللازمة لذلك .

الحل:

الخطوة 1: أجد الحد الأدنى من عدد الصناديق اللازمة لتعبئة الغلب .

$$42 + 21 + 15 + 16 + 35 + 10 + 31 + 11 + 27 + 39 = 247$$

$$\frac{247}{65} = 3.8 \approx 4$$

إذن، الحد الأدنى من عدد الصناديق اللازمة لتعبئة الغلب هو 4 صناديق .

الخطوة 2: أطبق خوارزمية الصندوق الكامل .

B1 : 39 , 16 , 10

غلب الصندوق الأول

B2 : 42 , 21

غلب الصندوق الثاني

B3 : 15 , 35 , 11

غلب الصندوق الثالث

B4 : 31 , 27

غلب الصندوق الرابع

(2) هل توصّلتُ إلى الحلّ الأمثل لهذه المسألة؟ أبرر إجابتي .

نعم ؛ لأنّ عدد الصناديق المُستعملة في هذا الحلّ مساوٍ للحدّ الأدنى من عدد الصناديق اللازمة .

(3) أجد الارتفاع المهدور في الصناديق جميعها .

$$0 + 2 + 4 + 7 = 13$$

إذن، هدير 13 وحدة طول في الصناديق جميعها

(3) أحدد كيف تُقَصُّ قطع القماش باستعمال خوارزمية الصندوق الكامل، ثم أحدد عدد اللّفات اللازمة لذلك باستعمال هذه الخوارزمية، ثم أجد طول الجزء المهدور من القماش .

B1 : 32 , 28

اللفة الأولى

B2 : 38 , 12 , 10

اللفة الثانية

B3 : 45 , 9

اللفة الثالثة

B4 : 17 , 23 , 16

اللفة الرابعة

إذن، عدد اللّفات اللازمة لقصّ قطع القماش ذات الأطوال المُعطاة باستعمال خوارزمية الصندوق الكامل هو 4 لفات قماش كبيرة .

لإيجاد طول الجزء المهدور من القماش، أحدد أولاً طول الجزء المهدور من كل لفة كبيرة، ثم أجمع أطوال الأجزاء المهدورة :

$$6 + 4 = 10$$

إذن، طول الجزء المهدور من القماش هو : 10 m

(4) أيّ الخوارزميات توصّلتُ بها إلى الحلّ الأمثل؟ أبرّر إجابتي .
توصّلتُ إلى الحلّ الأمثل باستعمال خوارزمية الصندوق الكامل؛ لأنّ عدد لفات القماش الذي حصّرتُه من تطبيقها مُساوٍ للحدّ الأدنى من عدد اللّفات اللازمة .

مثال 2 : تخزين البيانات: في ما يأتي ساعات 9 ملفات حاسوبية (بالجيجابايت) يُراد حفظها في أقراص تخزين، سعة كلّ منها 100 جيجابايت :

29 52 73 87 74 47 38 61 41

(1) أجد الحدّ الأدنى من عدد أقراص التخزين اللازمة لحفظ الملفات .

الحل:

$$29 + 52 + 73 + 87 + 74 + 47 + 38 + 61 + 41 = 502$$

$$\frac{502}{100} = 5.02 \approx 6$$

إذن، الحدّ الأدنى من عدد الصناديق اللازمة لتعبئة الغُلب هو 6 صناديق .

(2) أحدد كيف تُحَفَظ الملفات في الأقراص باستعمال

خوارزمية الملاءمة الأولى، ثم أحدد عدد الأقراص اللازمة لذلك باستعمال هذه الخوارزمية، ثم أجد مساحة التخزين المهدورة في الأقراص .

B1 : 29 , 52

B2 : 73

B3 : 87

B4 : 74

B5 : 47 , 38

B6 : 61

B7 : 41

الجزء المهدور:

$$19 + 27 + 13 + 26 + 15 + 39 + 59 = 198$$

(3) أحدد كيف تُحَفَظ الملفات في الأقراص باستعمال

خوارزمية الصندوق الكامل، ثم أحدد عدد الأقراص اللازمة لذلك باستعمال هذه الخوارزمية، ثم أجد مساحة التخزين المهدورة في الأقراص .

B1 : 29 , 52

B2 : 73

B3 : 87

B4 : 74

B5 : 47 , 38

B6 : 61

B7 : 41

طول الجزء المهدور:

$$10 + 1 + 27 + 13 + 62 + 26 + 59 = 198$$

(4) أيّ الخوارزميات توصّلتُ بها إلى الحلّ الأمثل؟ أبرّر إجابتي .
كلا الخوارزميتين أعطيا نفس العدد من الأقراص (7)، وهو أكبر من الحد الأدنى النظري. إذاً لا توجد أفضلية واضحة بينهما في هذا المثال.

(4) أحدد كيف تُوزَّع الأجهزة على الصناديق باستعمال خوارزمية الصندوق الكامل، ثمَّ أحدد عدد الصناديق اللازمة لذلك باستعمال هذه الخوارزمية.

B1 : 28 , 32	غُلب الصندوق الأول
B2 : 31 , 29	غُلب الصندوق الثاني
B3 : 41	غُلب الصندوق الثالث
B4 : 42	غُلب الصندوق الرابع
B5 : 36	غُلب الصندوق الخامس

(5) أيُّ الخوارزميات توصَّلتُ بها إلى الحلِّ الأمثل؟ أبرِّر إجابتي.
جميع الخوارزميات لم تتوصل إلى الحل الأمثل لأن عدد الصناديق المستعملة لا يساوي الحد الأدنى.

مثال 2 : أسلاك نحاسية: في ما يأتي أطوالُ (بالسنتيمتر) لـ 10 قطع يُراد قَصُّها من أسلاك نحاسية، طول كلٍّ منها 1 m :

58 45 18 55 47
12 63 30 19 41

(1) أحدد كيف تُقَصُّ القطع باستعمال خوارزمية الملاءمة الأولى، ثمَّ أحدد عدد الأسلاك اللازمة لذلك باستعمال هذه الخوارزمية، ثمَّ أجد طول الجزء المهدور من الأسلاك جميعها.

$$58 + 45 + 18 + 55 + 47 + 12 + 63 + 30 + 19 + 41 = 389$$

$$1 \text{ m} = 100 \text{ cm}$$

$$\frac{389}{100} = 3.89 \approx 4$$

الحدُّ الأدنى من عدد الصناديق اللازمة لتعبئة الغُلب هو 4

B1 : 58 , 18 , 12	غُلب الصندوق الأول
B2 : 45 , 55	غُلب الصندوق الثاني
B3 : 47 , 30 , 19	غُلب الصندوق الثالث
B4 : 63	غُلب الصندوق الرابع
B5 : 42	غُلب الصندوق الخامس

طول الجزء المهدور:

$$5(100) - 389 = 111 \text{ cm}$$

مثال 2 : شحن: في ما يأتي كتل 7 أجهزة (بالكيلوغرام) يُراد شحنها في صناديق؛ على ألا تتجاوز كتلة الصندوق الواحد 60 kg
41 28 42 31 36 32 29
(1) أجد الحد الأدنى من عدد الصناديق اللازمة لشحن الأجهزة.

الحل:

$$41 + 28 + 42 + 31 + 36 + 32 + 29 = 239$$

$$\frac{239}{60} = 3.9833333 \dots \approx 4$$

إذن، الحدُّ الأدنى من عدد الصناديق اللازمة لتعبئة الغُلب هو 4 صناديق .

(2) أحدد كيف تُوزَّع الأجهزة على الصناديق باستعمال خوارزمية الملاءمة الأولى، ثمَّ أحدد عدد الصناديق اللازمة لذلك باستعمال هذه الخوارزمية .

B1 : 41	غُلب الصندوق الأول
B2 : 28 , 31	غُلب الصندوق الثاني
B3 : 42	غُلب الصندوق الثالث
B4 : 36	غُلب الصندوق الرابع
B5 : 32	غُلب الصندوق الخامس
B6 : 29	غُلب الصندوق السادس

(3) أحدد كيف تُوزَّع الأجهزة على الصناديق باستعمال خوارزمية الملاءمة الأولى المُتناقصة، ثمَّ أحدد عدد الصناديق اللازمة لذلك باستعمال هذه الخوارزمية.

ارتب ترتيباً تنازلياً :

42 41 36 32 32 29 28

B1 : 42	غُلب الصندوق الأول
B2 : 41	غُلب الصندوق الثاني
B3 : 36	غُلب الصندوق الثالث
B4 : 32 , 28	غُلب الصندوق الرابع
B5 : 31 , 29	غُلب الصندوق الخامس

(2) أحدد كيف تُقَصُّ القطع باستعمال خوارزمية الملاءمة الأولى المتناقصة ، ثم أحدد عدد الأسلاك اللازمة لذلك باستعمال هذه الخوارزمية ، ثم أجد طول الجزء المهدور من الأسلاك جميعها .

ترتيب تنازلي :

63 58 55 47 45 42 30 19 18 12

B1 : 63 , 30 غلب الصندوق الأول
B2 : 58 , 42 غلب الصندوق الثاني
B3 : 55 , 45 غلب الصندوق الثالث
B4 : 47 , 19 , 18 , 12 غلب الصندوق الرابع
طول الجزء المهدور :

$$4(100) - 389 = 11 \text{ cm}$$

(3) أحدد كيف تُقَصُّ القطع باستعمال خوارزمية الصندوق الكامل ، ثم أحدد عدد الأسلاك اللازمة لذلك باستعمال هذه الخوارزمية ، ثم أجد طول الجزء المهدور من الأسلاك جميعها .

B1 : 58 , 42 غلب الصندوق الأول
B2 : 45 , 55 غلب الصندوق الثاني
B3 : 63 , 18 , 19 غلب الصندوق الثالث
B4 : 47 , 12 , 30 غلب الصندوق الرابع
طول الجزء المهدور : 11

(4) أي الخوارزميات توصّلت بها إلى الحل الأمثل ؟ أبرر إجابتني خوارزمية الملاءمة الأولى : 5 صناديق
خوارزمية الملاءمة الأولى المتناقصة : 4 صناديق (الأمثل)
خوارزمية الصندوق الكامل : 4 صناديق (الأمثل)

مثال 3 : يرغب مُدَرَّب في صالة رياضية أن يُرتَّب على رفوف الأثقال المُبَيَّنَة كتلها (بالكيلوغرام) في ما يلي ، علماً بأنّه يُمكن لكل رَفٍّ منها أن يحمل 40 kg في الحد الأقصى . كيف يُمكن للمُدَرَّب أن يُرتَّب الأثقال باستعمال أقل عدد من الرفوف ؟

18 16 24 16 20 10 12 8
16 12 10 4 12 6 13

(1) أحدد كيف تُرتَّب الأثقال على الرفوف باستعمال

خوارزمية الملاءمة الأولى ، ثم أحدد عدد الرفوف اللازمة لذلك باستعمال هذه الخوارزمية .

$$18 + 16 + 24 + 16 + 20 + 10 + 12 + 8 \\ + 16 + 12 + 10 + 4 + 12 + 6 \\ + 13 = 197$$

$$\frac{197}{40} = 4.925 \approx 5$$

إذن ، الحد الأدنى من عدد الصناديق اللازمة لتعبئة الغلب هو 5 صناديق .

B1 : 18 , 16 , 4 غلب الصندوق الأول
B2 : 24 , 16 غلب الصندوق الثاني
B3 : 20 , 10 , 8 غلب الصندوق الثالث
B4 : 12 , 16 , 12 غلب الصندوق الرابع
B5 : 12 , 10 , 6 غلب الصندوق الخامس
B6 : 13 غلب الصندوق السادس

(2) أحدد كيف تُرتَّب الأثقال على الرفوف باستعمال خوارزمية الصندوق الكامل ، ثم أحدد عدد الرفوف اللازمة لذلك باستعمال هذه الخوارزمية .

B1 : 18 , 16 , 6 غلب الصندوق الأول
B2 : 16 , 24 غلب الصندوق الثاني
B3 : 20 , 10 , 10 غلب الصندوق الثالث
B4 : 16 , 12 , 12 غلب الصندوق الرابع
B5 : 12 , 13 , 4 , 8 غلب الصندوق الخامس

$$75 + 70 + 60 + 50 + 35 + 20 + 20 + 20 = 350$$

$$\frac{350}{150} = 2.3 \approx 3$$

إذن، الحد الأدنى من عدد الصناديق اللازمة لتعبئة العُلب هو 3 صناديق .

B1 : 75 , 70

B2 : 60 , 50 , 35

B3 : 20 , 20 , 20

العدد هو : 3 ألواح ، إذن التكلفة تساوي :

$$3 \times 4 = 12 \text{ JD}$$

$$5 + 5 + 90 = 100 \text{ cm} = 1 \text{ m}$$

(3) أي الخوارزمتين يُمكن استعمالها لصنع الخزانة بتكلفة أقل؟ أبرّر إجابتي.

التكلفة بالطريقتين متساوية

(4) ما أقل تكلفة لصنع الخزانة إذا أمكن استعمال الألواح التي طولها 1 m والألواح التي طولها 1.5 m معاً؟ أبرّر إجابتي .

يمكن التقطيع في لوحين 1.5 m ولوح 1 m (سعة 100 cm , 150 cm , 150 cm) مثلاً:

- لوح 1.5 m : (70 cm + 75 cm)
- لوح 1.5 m : (60 cm + 50 cm + 35 cm)
- لوح 1 m : (20 cm + 20 cm + 20 cm)

مهارات التفكير العليا

مثال 1 : في ما يأتي أطوال 8 قطع خشبية (بالسنتيمتر) تلزم

لصنع خزانة صغيرة، ويراد قَصُّها من ألواح خشبية :

20 35 50 60 20 70 75 20

(1) تتوافر ألواح خشبية، طول كلٍّ منها 1 m ، وسعرها 3 JD

أستعمل خوارزمية الملاءمة الأولى المُتناقصة لتحديد

كيف تُقَصُّ القطع الخشبية من الألواح، ثمَّ أجد التكلفة

الكلية لصنع الخزانة باستعمال هذه الخوارزمية، ثمَّ

أحسب الكمية المهدورة من الخشب.

ترتيب تنازلي :

75 70 60 50 35 20 20 20

$$75 + 70 + 60 + 50 + 35 + 20 + 20 + 20 = 350$$

$$\frac{350}{100} = 3.5 \approx 4$$

إذن، الحد الأدنى من عدد الصناديق اللازمة لتعبئة العُلب هو 4 صناديق .

B1 : 75 , 20

B2 : 70 , 20

B3 : 60 , 35

B4 : 50 , 20

العدد هو : 4 ألواح ، إذن التكلفة تساوي :

$$4 \times 3 = 12 \text{ JD}$$

الفاقد هو :

$$400 - 350 = 50 \text{ cm} = 0.5 \text{ m}$$

(2) تتوافر ألواح خشبية، طول كلٍّ منها 1.5 m ، وسعرها

4 JD أستخدم خوارزمية الملاءمة الأولى المُتناقصة

لتحديد كيف تُقَصُّ القطع الخشبية من الألواح، ثمَّ أجد

التكلفة الكلية لصنع الخزانة باستعمال هذه الخوارزمية،

ثمَّ أحسب الكمية المهدورة من الخشب.

ترتيب تنازلي :

75 70 60 50 35 20 20 20

$$\frac{135}{50} = 2.7 \approx 3$$

B1 : 25 , 24

B2 : 23 , 19 , 8

B3 : 17 , 14 , 9 , 6

الحالة (2) : إذا كانت $19 < x < 23$:

ترتيب تنازلي :

25 24 x 19 17 14 9 8 6

$$24 + 14 + 8 + x + 9 + 25 + 6 + 17 + 9 = 112 + x$$

$$\frac{112 + x}{50} = \frac{112}{50} + \frac{x}{50} = 2.24 + \frac{x}{50} \approx 3$$

$$19 < x < 23$$

$$\frac{19}{50} < \frac{x}{50} < \frac{23}{50}$$

$$0.38 < \frac{x}{50} < 0.46$$

B1 : 25 , 24

B2 : x , 19 , 9

B3 : 17 , 14 , 8 , 6

في كلتا الحالتين نحتاج ثلاث حاويات.

(3) أعدد القيمة (القيم) الممكنة للمتغير x في كل من

الطريقتين المشار إليهما في السؤال السابق بعد توزيع

الحقائب باستعمال خوارزمية الملاءمة الأولى المتناقصة

للتوزيع (الحالة 1) :

B1 : 25 , 24

B2 : x , 19

B3 : 17 , 14 , 9 , 8 , 6

قيم الممكنة x هي فقط 23

للتوزيع (الحالة 2) :

B1 : 25 , 24

B2 : x , 19

B3 : 17 , 14 , 9 , 8 , 6

قيم الممكنة x هي : 20 , 21 , 22**مثال 2 :** تحدّد في ما يأتي كتل 9 حقائب سفر (بالكيلوغرام) يُراد

نقلها في حاويات، ويُمكن لكلٍّ منها أن تحمل كتلة إجمالية أقصاها 50 kg :

24 14 8 x 19 25 6 17 9

إذا علمتُ أن كتلة إحدى الحقائب لم تُقَسَّ قياسًا دقيقًا، ولتكن x كيلوغرامًا، حيث : $19 < x \leq 23$ ، فأجب عن الأسئلة الآتية تباعًا :

(1) أعدد كيف تُوزَع الحقائب على الحاويات باستعمال خوارزمية الملاءمة الأولى .

$$24 + 14 + 8 + x + 9 + 25 + 6 + 17 + 9 = 112 + x$$

$$\frac{112 + x}{50} = \frac{112}{50} + \frac{x}{50} = 2.24 + \frac{x}{50} \approx 3$$

$$19 < x \leq 23$$

$$\frac{19}{50} < \frac{x}{50} \leq \frac{23}{50}$$

$$0.38 < \frac{x}{50} \leq 0.46$$

إذن، الحد الأدنى من عدد الصناديق اللازمة لتعبئة العُلب هو 3 صناديق .

B1 : 24 , 14 , 8

B2 : x , 19 , 6

B3 : 25 , 17

B4 : 9

(2) أعدد الطريقتين المُمكنتين لتوزيع الحقائب على

الحاويات باستعمال خوارزمية الملاءمة الأولى المتناقصة .

الحالة (1) : إذا كانت قيمة x تساوي 23 :

ترتيب تنازلي :

25 24 x 19 17 14 9 8 6

$$24 + 14 + 8 + x + 9 + 25 + 6 + 17 + 9 = 135$$

يُراد تعبئة العُلب (المُعطى ارتفاعاتها في ما يلي) في صناديق، ارتفاع كلٍّ منها 45 وحدة طول. إذا علِمْتُ أَنَّ للعُلب والصناديق المقطع العرضي نفسه، فأجيب عن الأسئلة التالية:

11 6 13 17 5 35 20 4 9 18 23 16

- 1 أستعمل خوارزمية الملاءمة الأولى لتعبئة العُلب في الصناديق، ثمَّ أحدد عدد الصناديق اللازمة لذلك، ثمَّ أجد الارتفاع المهدور في الصناديق جميعها.
- 2 أستعمل خوارزمية الملاءمة الأولى المُتناقصة لتعبئة العُلب في الصناديق، ثمَّ أحدد عدد الصناديق اللازمة لذلك، ثمَّ أجد الارتفاع المهدور في الصناديق جميعها.
- 3 أيُّ الخوارزميتين توصلتُ بها إلى الحلِّ الأمثل؟ أبرر إجابتي.

يُراد تعبئة العُلب (المُعطى ارتفاعاتها في ما يلي) في صناديق، ارتفاع كلٍّ منها 20 وحدة طول. إذا علِمْتُ أَنَّ للعُلب والصناديق المقطع العرضي نفسه، فأجيب عن الأسئلة التالية:

10 12 15 2 8 5 16 13 8 1 5

- 4 أستعمل خوارزمية الملاءمة الأولى لتعبئة العُلب في الصناديق، ثمَّ أحدد عدد الصناديق اللازمة لذلك، ثمَّ أجد الارتفاع المهدور في الصناديق جميعها.
- 5 أستعمل خوارزمية الملاءمة الأولى المُتناقصة لتعبئة العُلب في الصناديق، ثمَّ أحدد عدد الصناديق اللازمة لذلك، ثمَّ أجد الارتفاع المهدور في الصناديق جميعها.
- 6 أستعمل خوارزمية الصندوق الكامل لتعبئة العُلب في الصناديق، ثمَّ أحدد عدد الصناديق اللازمة لذلك، ثمَّ أجد الارتفاع المهدور في الصناديق جميعها.
- 7 أيُّ الخوارزميات توصلتُ بها إلى الحلِّ الأمثل؟ أبرر إجابتي.

تخزين بيانات: في ما يأتي ساعات 8 ملفات حاسوبية (بالميجابايت) يُراد حفظها في أقراص تخزين، سعة كل منها 50 ميجابايت:

23 29 11 34 10 14 35 17

8 أُحَدِّد كيف تُحَفَظ الملفات في الأقراص باستعمال خوارزمية الملاءمة الأولى، ثمَّ أُحَدِّد عدد الأقراص اللازمة لذلك باستعمال هذه الخوارزمية، ثمَّ أجد مساحة التخزين المهدورة في الأقراص.

9 أُحَدِّد كيف تُحَفَظ الملفات في الأقراص باستعمال خوارزمية الصندوق الكامل، ثمَّ أُحَدِّد عدد الأقراص اللازمة لذلك باستعمال هذه الخوارزمية، ثمَّ أجد مساحة التخزين المهدورة في الأقراص.

10 أيُّ الخوارزميتين توصلتُ بها إلى الحلِّ الأمثل؟ أبرِّر إجابتي.

خشب: في ما يأتي أطوال 10 قطع خشبية (بالمليمتر)، يراد قَصُّها من ألواح خشبية كبيرة تُباع بطول 1 m:

650 431 245 643 455 134 710 290 550 452

11 أُحَدِّد كيف تُقَصُّ القطع الخشبية من الألواح باستعمال خوارزمية الملاءمة الأولى، ثمَّ أُحَدِّد عدد الألواح اللازمة لذلك باستعمال هذه الخوارزمية، ثمَّ أجد طول الجزء المهدور في الخشب.

12 أُحَدِّد كيف تُقَصُّ القطع الخشبية من الألواح باستعمال خوارزمية الملاءمة الأولى المُتَنَاقِصَة، ثمَّ أُحَدِّد عدد الألواح اللازمة لذلك باستعمال هذه الخوارزمية، ثمَّ أجد طول الجزء المهدور في الخشب.

13 أيُّ الخوارزميتين توصلتُ بها إلى الحلِّ الأمثل؟ أبرِّر إجابتي.

شحن: في ما يأتي كتل 10 صناديق (بالكيلو غرام)، يُراد نقلها في شاحنات، تحمل كلُّ منها كتلة إجمالية أقصاها 300 kg:

175 135 210 105 100 150 60 30 90 125

14 أُحَدِّد كيف تُوزَّع الصناديق على الشاحنات باستعمال خوارزمية المُلاءمة الأولى، ثمَّ أُحَدِّد عدد الشاحنات اللازمة لذلك باستعمال هذه الخوارزمية.

15 أُحَدِّد كيف تُوزَّع الصناديق على الشاحنات باستعمال خوارزمية المُلاءمة الأولى المُتناقصة، ثمَّ أُحَدِّد عدد الشاحنات اللازمة لذلك باستعمال هذه الخوارزمية.

16 أيُّ الخوارزميتين توصلتُ بها إلى الحلِّ الأمثل؟ أبرِّر إجابتي.

أنابيب: في ما يأتي أطوال 8 قطع بلاستيكية (بالسنتيمتر)، يراد قَصُّها من أنابيب، طول كلِّ منها 50 cm:

25 22 30 18 29 21 27 21

17 أُحَدِّد كيف تُقَصُّ القطع من الأنابيب باستعمال خوارزمية المُلاءمة الأولى المُتناقصة، ثمَّ أُحَدِّد عدد الأنابيب اللازمة لذلك باستعمال هذه الخوارزمية، ثمَّ أجد طول الجزء المهدور في الأنابيب.

18 أُحَدِّد كيف تُقَصُّ القطع من الأنابيب باستعمال خوارزمية الصندوق الكامل، ثمَّ أُحَدِّد عدد الأنابيب اللازمة لذلك باستعمال هذه الخوارزمية، ثمَّ أجد طول الجزء المهدور في الأنابيب.

19 أيُّ الخوارزميتين توصلتُ بها إلى الحلِّ الأمثل؟ أبرِّر إجابتي.

[illegible]

الدرس الثالث : المخططات

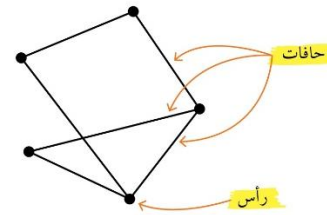
Graphs

1. المخططات .

تنطوي العديد من المواقف الحياتية على روابط بين أشخاص أو أماكن أو أشياء مختلفة . فمثلاً :

- ترتبط المدن بعضها ببعض عبر الطرق
- تتصل أجهزة الحاسوب بعضها ببعض عبر شبكات الإنترنت

ويمكن التعبير عن كل من هذه الروابط بتمثيل بياني يُسمى **المُخطَّط** ؛ وهو وسيلة تُظهر كيف ترتبط الأشياء المختلفة بصرياً ، بحيث يُعبّر عن هذه الأشياء بعقد تُسمى الرؤوس ويُعبّر عن الروابط بين الرؤوس (إن وجدت) بخطوط (أو منحنيات) متصلة تُسمى **الحافات** كما يظهر في الشكل المجاور



نظرية المخططات : هي تسمية لفرع من فروع الرياضيات يُعنى بدراسة المخططات .

مثال 1 : الباص السريع : تأمل الشكل الآتي الذي يُبين شبكة الباص السريع داخل مدينة عمان ، ثم أجب عن الأسئلة التالية تبعاً :



(1) هل يُعدّ الشكل السابق مُخطّطاً؟ أبرّر إجابتي .

الحل :

نعم ؛ لأنه يحتوي على رؤوس ، وعلى حافات بين بعض هذه الرؤوس .

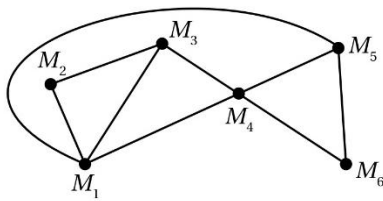
(2) أصف ما تمثّله كل من الرؤوس والحافات في المُخطّط؟

الرؤوس : تمثل المَحطات التي يتوقّف عندها الباص السريع
الحافات : تمثل مسارات الباص السريع بين المَحطات .

(3) أحرّد المَحطات التي سيمرّ بها الباص في رحلة من مُجمّع المَحطة إلى حدائق الملك عبد الله .

المَحطات التي سيمرّ بها الباص أثناء الرحلة هي : مستشفى الأمير حمزة ، وتقاطع طارق ، ومُجمّع الشمال ، ودوار المدينة الرياضية .

مثال 2 : طيران : تأمل الشكل المجاور الذي يُبين المسارات الجوية التي تتبعها طائرات إحدى شركات الطيران ، ثم أجب عن الأسئلة الآتية تبعاً :



(1) هل يُعدّ الشكل السابق مُخطّطاً؟ أبرّر إجابتي .

نعم ؛ لأنه يحتوي على رؤوس ، وعلى حافات بين بعض هذه الرؤوس .

(2) أصف ما تمثّله كل من الرؤوس والحافات في المُخطّط؟

الرؤوس : تمثل طائرات إحدى شركات الطيران .

الحافات : تمثل المسارات الجوية التي تتبعها تلك طائرات .

(3) أحرّد المَحطات التي ستمرّ بها إحدى الطائرات التابعة للشركة في رحلة من الرأس M_1 إلى الرأس M_6 (أذكر حلّين مختلفين) .

الحل الأول : المَحطات التي ستمرّ بها الطائرات أثناء الرحلة

هي : M_4

الحل الثاني : المَحطات التي ستمرّ بها الطائرات أثناء الرحلة

هي : M_2 , M_3 , M_4 , M_5

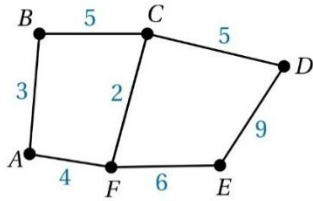
2. المخططات الموزونة.

المُخَطَّط الموزون : هو المُخَطَّط الذي يحوي قيمة مُقترنة بكل حافة من حافته اسم ، وتُمثِّل هذه القيم مقاييس عديدة ، مثل : **المسافة ، والتكلفة ، والزمن .**

يُمكن استعمال المُخَطَّطات الموزونة لحلَّ العديد من المسائل الحياتية والعلمية ، مثل :

1. تحديد المسار الذي يُمكن به الوصول من موقع إلى آخر في إحدى المدن عبر أقصر مسار مُمكن ، أو بأقل تكلفة مُمكنة وبلغة المُخَطَّطات ، فإنَّ المسار من الرأس A إلى الرأس B هو مجموعة من الحافات ، تبدأ بالرأس A ، وتنتهي بالرأس B ، وقد يتكرَّر في المسار أيُّ من الرؤوس والحافات .

مثال 1 : طرق : يُبيِّن الشكل المجاور مُخَطَّطًا للطرق الرئيسة في إحدى المدن ، ويُمثِّل العدد على كل حافة المسافة (بالكيلومترات) بين كل منطقتين في المدينة :



- (1) أجد طول المسار المباشر بين المنطقة F والمنطقة C .

طول المسار المباشر بين هاتين المنطقتين هو : 2 km

- (2) أجد أقصر مسار بين المنطقة A والمنطقة D .

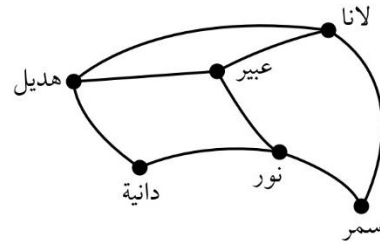
لتحديد أقصر مسار بين هاتين المنطقتين ، أجدُّ أولاً جميع المسارات التي تصل بينهما ، وأجد طول كلٍّ منها ، ثمَّ أجدُّ أقصر مسار بين هذه المسارات :

المسار	طول المسار (بالكيلومترات)
$ABCD$	$3 + 5 + 5 = 13 \text{ km}$
$AFED$	$4 + 6 + 9 = 19 \text{ km}$
$AFCD$	$4 + 2 + 5 = 11 \text{ km}$
$ABCFED$	$3 + 5 + 2 + 6 + 9 = 25 \text{ km}$

إذن ، أقصر مسار بين المنطقة A والمنطقة D هو $AFCD$ ، وطوله 11 km

مثال 3 : أنامل الشكل المجاور الذي يُبيِّن علاقات الصداقة

التي تربط بين مجموعة من الفتيات في أحد مواقع التواصل الاجتماعي ، ثمَّ أجيب عن كلِّ ممَّا يأتي :



- (1) هل يُعدُّ الشكل السابق مُخَطَّطًا؟ أبرِّر إجابتي.

نعم؛ لأنَّه يحتوي على رؤوس ، وعلى حافات بين بعض هذه الرؤوس .

- (2) أصِف ما تُمثِّله كلُّ من الرؤوس والحافات في المُخَطَّط؟

الرؤوس : الفتيات في أحد مواقع التواصل الاجتماعي .

الحافات : علاقة الصداقة التي تربط الفتيات .

- (3) كم صديقة للانا في هذا الموقع ؟

عدد أصدقاء لانا هو عدد الرؤوس التي تربط بينها وبين لانا

إذن يوجد : هديل وعبيير وسمر

إذن يوجد 3 صديقات للانا

- (4) من الصديقات المشتركات بين عبيير ودانية ؟

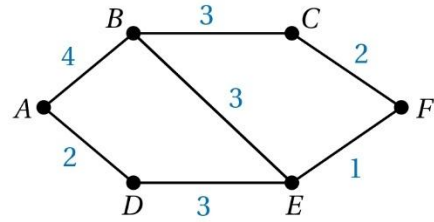
أصدقاء عبيير : هديل ولانا ونور

أصدقاء دانية : نور وهديل

إذن الصديقات المشتركات بين عبيير ودانية هم : هديل ونور

مثال 2 : طرق: يُبيّن الشكل المجاور مُخطّطًا للطرق الرئيسية

بين مجموعة من المدن، ويمثّل العدد على كل حافة الزمن (بالساعات) الذي تستغرقه سيارّة في قطع المسافة بين كل مدينتين :



(1) أحدّد الزمن الذي تستغرقه السيارّة في قطع المسار المباشر بين المدينة B والمدينة E.

الزمن هو: 3 h

(2) أحدّد أقل زمن تستغرقه السيارّة في الوصول من المدينة A إلى المدينة F، والمسار الذي تتبعه في هذه الرحلة .

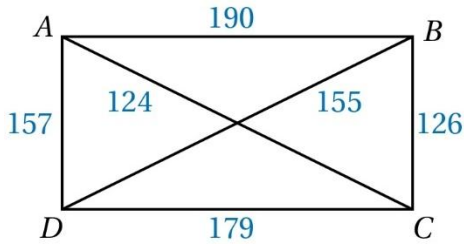
المسار	الزمن المستغرق في المسار
ABCF	$4 + 3 + 2 = 9 \text{ h}$
ADEF	$2 + 3 + 1 = 6 \text{ h}$
ABEF	$4 + 3 + 1 = 8 \text{ h}$
ADEBCF	$2 + 3 + 3 + 3 + 2 = 13 \text{ h}$

إذن، أقل زمن تستغرقه السيارّة في الوصول من المنطقة A إلى

المنطقة F هو 6 ساعات متبعة المسار ADEF

مثال 3 : مندوب مبيعات: يُبيّن الشكل المجاور مُخطّطًا

لتكلفة تنقّل مندوب مبيعات بين مجموعة من المحافظات الأردنية للترويج لمُنتج جديد، حيث يُمثّل العدد على كل حافة التكلفة بالدينار للتنقّل بين كل محافظتين :



(1) أجد تكلفة ذهاب مندوب المبيعات في مسار مباشر من المحافظة A إلى المحافظة B، ثمّ إلى المحافظة C. التكلفة هي: $190 \text{ JD} + 126 \text{ JD} = 316 \text{ JD}$

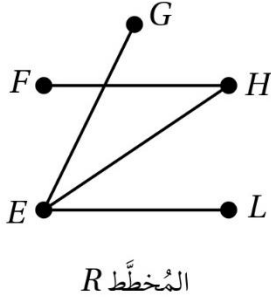
(2) أحدّد أقل تكلفة للذهاب من المحافظة B إلى المحافظة D، ثمّ أحدّد المسار الذي اتخذه لذلك.

المسار	تكلفة تنقل المندوب من B الى D
BD	155 JD
BAD	$190 + 157 = 347 \text{ km}$
BCD	$126 + 179 = 305 \text{ km}$
BACD	$190 + 124 + 179 = 493 \text{ km}$
BCAD	$126 + 124 + 157 = 407 \text{ km}$

إذن، أقل تكلفة للذهاب من المحافظة B إلى المحافظة D هي

155 دينار على المسار المباشر BD

مثال 1: أتاَمَل المُنْخَطَط R المجاور، ثمَّ أُجِيب عن كلِّ ممَّا يأتي :



(1) أحتدِّد مجموعة الرؤوس ومجموعة الحافات .

مجموعة الرؤوس هي : (E, F, G, H, L)

مجموعة الحافات هي : (EL, EH, EG, FH)

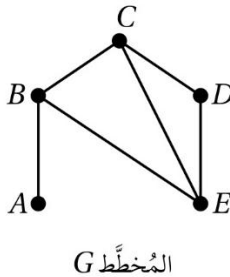
(2) أحتدِّد درجة كل رأس، ونوعها .

الرأس	الدرجة	نوع الدرجة
E	3	فردية
F	1	فردية
G	1	فردية
H	2	زوجية
L	1	فردية

(3) أحتدِّد مجموعة الدرجات للمُنْخَطَط.

$$\deg R = (1, 1, 1, 2, 3)$$

مثال 2: أتاَمَل المُنْخَطَط G المجاور، ثمَّ أُجِيب عن كلِّ ممَّا يأتي :



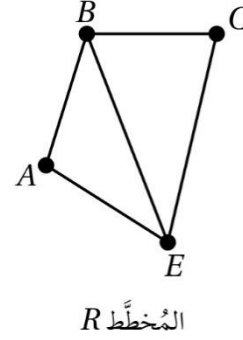
(1) أحتدِّد مجموعة الرؤوس ومجموعة الحافات .

مجموعة الرؤوس هي : (A, B, C, D, E)

مجموعة الحافات هي : (AB, BC, CD, DE, BE, CE)

3. المخططات الموزونة .

في ما يأتي بعض التعريفات الأساسية الخاصة بنظرية المُنْخَطَطَات :



• **مجموعة الرؤوس** : مجموعة تحوي جميع رؤوس المُنْخَطَط

فمثلاً ، مجموعة رؤوس المُنْخَطَط R المجاور هي :

$$(A, B, C, E)$$

• **مجموعة الحافات** : مجموعة تحوي جميع حافات المُنْخَطَط

فمثلاً ، مجموعة حافات المُنْخَطَط R المجاور هي :

$$(AB, AE, BC, BE, CE)$$

حيث يُعبَّر الرمز AB مثلاً عن الحافة بين الرأس A والرأس B

• **درجة الرأس** : عدد يُعبَّر عن عدد الحافات التي تلتقي عند

الرأس . فمثلاً :

درجة الرأس A في المُنْخَطَط R أعلاه هي 2 (درجة زوجية)

درجة الرأس B في المُنْخَطَط نفسه هي 3 (درجة فردية)

• **مجموعة الدرجات** : مجموعة تحوي جميع درجات رؤوس

المُنْخَطَط . فمثلاً ، مجموعة الدرجات للمُنْخَطَط R أعلاه

هي :

$$\deg R = (2, 2, 3, 3)$$

رموز رياضية : يُرمز إلى مجموعة درجات المُنْخَطَط R أعلاه

بالرمز $\deg R$ علماً بأنَّ $\deg$ اختصار للكلمة الإنجليزية

degree التي تعني الدرجة

4. مجموع درجات رؤوس المخطط.

يُمكن أيضًا إيجاد مجموع درجات رؤوس أي مخطط إذا عُلِم عدد حافته، وذلك بضرب عدد حافته في 2؛ لأن كل حافة ترتبط برأسين.

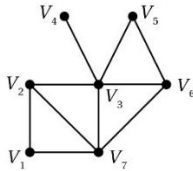
مفهوم أساسي: مجموع درجات رؤوس المخطط

إذا كان لمخطط n من الرؤوس، و E من الحافات، فإنه يُمكن إيجاد مجموع درجات رؤوس هذا المخطط باستعمال العلاقة الآتية:

$$\sum_{k=1}^n (\deg V_k) = 2E$$

حيث $\deg V_k$ درجة الرأس V_k .

مثال 1



(1) أجد مجموع درجات رؤوس المخطط المجاور.

للمخطط المجاور 10 حافات؛ لذا يُمكن إيجاد مجموع درجات رؤوسه كالآتي:

$$\sum_{k=1}^n (\deg V_k) = 2E = 2(10) = 20$$

إذن، مجموع درجات رؤوس المخطط هو: 20

(2) مخطط له 6 رؤوس و 9 حافات، ودرجات رؤوسه هي:

$$x, 2x, 2x-1, x+1, x^2-1$$

أجد قيمة المتغير x .

$$\sum_{k=1}^n (\deg V_k) = 2E$$

$$x + 2x + 2x - 1 + x + 1 + x + 1 + x^2 - 1 = 2(9)$$

$$x^2 + 7x = 18$$

$$x^2 + 7x - 18 = 0$$

$$(x+9)(x-2) = 0$$

$$x = -9 \text{ or } x = 2$$

من غير المُمكن أن يكون x سالبًا. إذن: $x = 2$

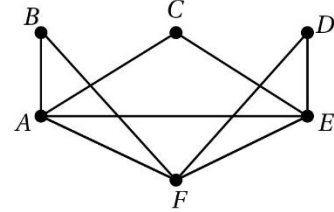
(2) أحدد درجة كل رأس، ونوعها.

نوع الدرجة	الدرجة	الرأس
فردية	1	A
فردية	3	B
فردية	3	C
زوجية	2	D
فردية	3	E

(3) أحدد مجموعة الدرجات للمخطط.

$$\deg G = (1, 2, 3, 3, 3)$$

مثال 3: أتاَمَل المخطط المجاور، ثم أجب عن كل مما يأتي:



(1) أحدد مجموعة الرؤوس ومجموعة الحافات.

مجموعة الرؤوس هي: (A, B, C, D, E, F)

مجموعة الحافات هي:

$$(AB, BF, FD, DE, AF, FE, AE, AC, CE)$$

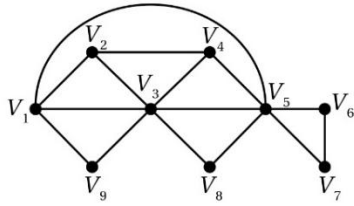
(2) أحدد درجة كل رأس، ونوعها.

نوع الدرجة	الدرجة	الرأس
زوجية	4	A
زوجية	2	B
زوجية	2	C
زوجية	2	D
زوجية	4	E
زوجية	4	F

(3) أحدد مجموعة الدرجات للمخطط.

$$\deg = (2, 2, 2, 4, 4, 4)$$

مثال 3: أجد مجموع درجات رؤوس المخطط المجاور.



$$\sum_{k=1}^n (\deg V_k) = 2E$$

$$\sum_{k=1}^n (\deg V_k) = 2(15) = 30$$

مثال 2: مُخَطَّط له 5 رُؤوس و 6 حافات، ودرجات رُؤوسه هي

$$x, 2x, x^2 + 3, x + 1, 2x + 1$$

أجد قيمة المتغير x .

$$\sum_{k=1}^n (\deg V_k) = 2E$$

$$x + 2x + x^2 + 3 + x + 1 + 2x + 1 = 2(6)$$

$$x^2 + 6x + 5 = 12$$

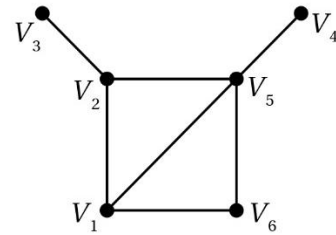
$$x^2 + 6x - 7 = 0$$

$$(x + 7)(x - 1) = 0$$

$$x = -7 \text{ or } x = 1$$

من غير المُمْكِن أن يكون x سالِبًا. إذن: $x = 1$

مثال 2



(1) أجد مجموع درجات رؤوس المخطط المجاور.

للمُحَظَّط المجاور 7 حافات؛ لذا يُمكن إيجاد مجموع درجات رؤوسه كالآتي :

$$\sum_{k=1}^n (\deg V_k) = 2E$$

$$\sum_{k=1}^n (\deg V_k) = 2(7) = 14$$

إذن، مجموع درجات رؤوس المخطط هو: 14

(2) مُخَطَّط له 5 رُؤوس و 6 حافات، ودرجات رُؤوسه هي :

$$x, x^2 + 2, 3x - 1, 3x, 2x + 1$$

أجد قيمة المتغير x .

$$\sum_{k=1}^n (\deg V_k) = 2E$$

$$x + x^2 + 2 + 3x - 1 + 3x + 2x + 1 = 2(6)$$

$$x^2 + 9x + 2 = 12$$

$$x^2 + 9x - 10 = 0$$

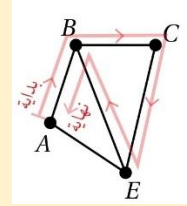
$$(x + 10)(x - 1) = 0$$

$$x = -10 \text{ or } x = 1$$

من غير المُمكِن أن يكون x سالِبًا. إذن: $x = 1$

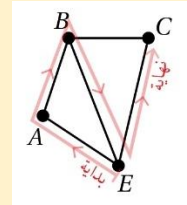
5. الممشى والممر والطريق والدائرة والحلقة في المخطط.

الممشى (walk)



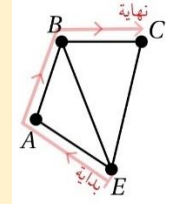
سلسلة من الحافات في المخطط، تُمثل فيها نهاية كل حافة بداية حافة أخرى، ما عدا الحافة الأخيرة. فمثلاً:
ABCEBA : ممشى في المخطط المجاور.

الممر (trail)



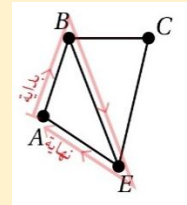
ممشى لا تتكرر فيه أي حافة، ويمكن أن تتكرر فيه الرؤوس.
 فمثلاً: **EABEC** ممر في المخطط المجاور.

الطريق (path)



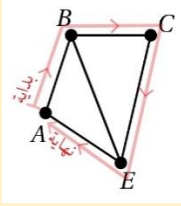
ممر لا يتكرر فيه أي رأس. فمثلاً:
EABC : طريق في المخطط المجاور.

الدائرة (circuit)



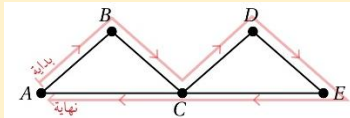
ممر رأس بدايته هو نفسه رأس نهايته، ولا يتكرر فيه أي رأس،
 ما عدا رأس البداية ورأس النهاية. فمثلاً:
ABEA : دائرة في المخطط المجاور.

دائرة هاملتون (Hamiltonian circuit)



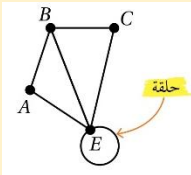
دائرة تحوي جميع رؤوس المخطط. فمثلاً:
ABCEA : دائرة هاملتون في المخطط المجاور.

دائرة أويلر (Eulerian circuit)



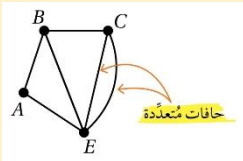
ممر رأس بدايته هو نفسه رأس نهايته، وهو يشمل جميع
 حافات المخطط من دون تكرار. فمثلاً:
ABCDECA : دائرة أويلر في المخطط المجاور.

الحلقة (loop)



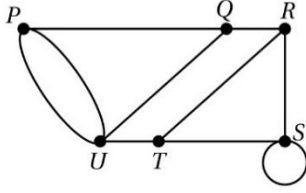
حافة تبدأ بالرأس نفسه، وتنتهي به. فمثلاً:
EE : حلقة في المخطط المجاور.

الحافات المتعددة (multiple edges)



حافتان أو مجموعة من الحافات التي تربط زوجاً من الرؤوس.
 فمثلاً، **الحافات المتعددة** في المخطط المجاور تربط بين
 الرأس E والرأس C.

مثال 3: أتاَمَل المَخْطَط المجاور، ثمَّ أجيب عن كل مما يأتي :



(1) أحدد مجموعة الرؤوس ومجموعة الحافات .

مجموعة الرؤوس هي : (P, Q, R, S, T, U)

مجموعة الحافات هي :

$(PU, UP, PQ, QU, QR, UT, RT, RS, TS, SS)$

(2) أجد مجموع درجات رؤوس المخطط .

للمَخْطَط المجاور 10 حافات؛ لذا يُمكن إيجاد مجموع درجات رؤوسه كالآتي :

$$\sum_{k=1}^n (\deg V_k) = 2E$$

$$\sum_{k=1}^n (\deg V_k) = 2(10) = 20$$

إذن، مجموع درجات رؤوس المَخْطَط هو: 20

(3) أحدد في المَخْطَط ممشًى لا يُمثَّل ممراً، وممراً لا يُمثَّل

طريقاً، وطريقاً، ودائرة، ودائرة هاملتون (إن وُجدت)، ودائرة أويلر (إن وُجدت) .

◉ ممشًى لا يُمثَّل ممراً STRQUTS .

◉ ممراً لا يُمثَّل طريقاً PQRSTUQ .

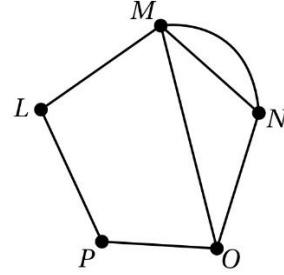
◉ طريق RST .

◉ دائرة PUQP .

◉ دائرة هاملتون PQRSTUP .

◉ دائرة أويلر: لا يُمكن إيجاد دائرة أويلر في هذا المَخْطَط .

مثال 1: أتاَمَل المَخْطَط المجاور، ثمَّ أحدد فيه ممشًى لا يُمثَّل ممراً، وممراً لا يُمثَّل طريقاً، وطريقاً، ودائرة، ودائرة هاملتون (إن وُجدت)، ودائرة أويلر (إن وُجدت) .



◉ ممشًى لا يُمثَّل ممراً POMNOP .

◉ ممراً لا يُمثَّل طريقاً MLPOMN .

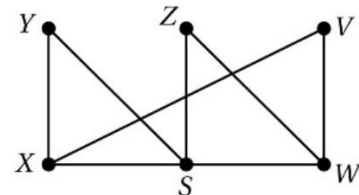
◉ طريق MLPO .

◉ دائرة LMOPL .

◉ دائرة هاملتون LMNOPL .

◉ دائرة أويلر: لا يُمكن إيجاد دائرة أويلر في هذا المَخْطَط .

مثال 2: أتاَمَل المَخْطَط المجاور، ثمَّ أحدد فيه ممشًى لا يُمثَّل ممراً، وممراً لا يُمثَّل طريقاً، وطريقاً، ودائرة، ودائرة هاملتون (إن وُجدت)، ودائرة أويلر (إن وُجدت) .



◉ ممشًى لا يُمثَّل ممراً VWZSWV .

◉ ممراً لا يُمثَّل طريقاً YXVWSX .

◉ طريق ZSWV .

◉ دائرة XYSX .

◉ دائرة هاملتون XYZSWVX .

◉ دائرة أويلر: لا يُمكن إيجاد دائرة أويلر في هذا المَخْطَط .

(2) أجد دائرة تبدأ بالرأس B ، وتنتهي به، ثم أجد طولها بالكيلومتر.

مثلاً: $BDEB$ وطولها :

$$5 + 1 + 2 = 8 \text{ km}$$

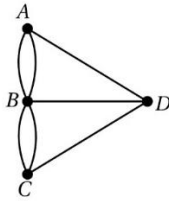
(3) أجد دائرة هاملتون، ثم أجد طولها بالكيلومتر.

ACEZDBA وطولها :

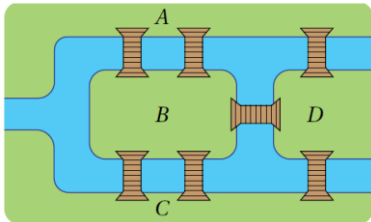
$$3 + 5 + 4 + 2 + 5 + 2 = 21 \text{ km}$$

مثال 6: جسور: يُبين الشكل المجاور مُخطّطاً للمسألة الواردة في بند (مسألة اليوم).

أستعين بالمُخطّط وما تعلّمته في هذا الدرس عن دائرة أويلر للإجابة عن المسألة، ثم أبرّر إجابتي.



يُبين الشكل المجاور 4 مناطق في مدينة، يفصل بينها نهر مُتفرّع، وقد أنشئت 7 جسور بين تلك المناطق. هل يمكن زيارة المناطق الأربع جميعها، بدءاً بإحداها؛ شرط عبور الجسور السبعة جميعها وعدم عبور أيّ جسر منها مرّتين، ثم العودة إلى نقطة البداية.



لا يمكن ذلك.

نمّثل المناطق بالرؤوس A, B, C, D والجسور بالأضلاع. درجات الرؤوس هي :

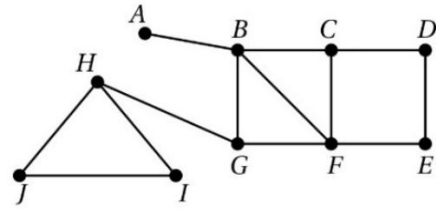
$$\deg(A) = 3, \quad \deg(B) = 5$$

$$\deg(C) = 3, \quad \deg(D) = 3$$

أي أن لدينا 4 رؤوس درجاتها فردية (وهذا غير ممكن في دائرة أويلر لأنه في دائرة أويلر رأس البداية والنهاية يجب أن يكون درجته زوجية)

فلا يمكن عبور الجسور السبعة مرة واحدة (ولا العودة لنقطة البداية). وبالتالي لا يمكن تنفيذ المطلوب.

مثال 4: أتأمل المُخطّط المجاور، ثم أحدد فيه :



(1) ممشًى لا يُمثّل ممراً : $GBCFBG$

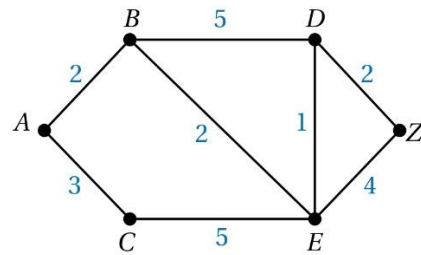
(2) ممراً لا يُمثّل طريقاً : $HGBFCBA$

(3) خمسة طرق من B إلى D

$BCD, BFED, BFCD, BGFED, BGFCB$

(4) دائرة : $IJHI$

مثال 5: طرق: يُبين الشكل المجاور مُخطّطاً للطرق الرئيسة التي تصل بين مجموعة من المناطق في إحدى المدن، ويُمثّل العدد على كل حافة المسافة (بالكيلومتر) بين كل منطقتين :



(1) أحدد طول أقصر مسار بين المنطقة A والمنطقة Z ، ثم أحدد المسار الذي اتخذته لذلك.

الحل:

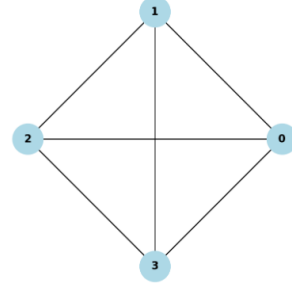
المسار	طول المسار من A إلى Z
ABDZ	$2 + 5 + 2 = 9 \text{ km}$
ABEZ	$2 + 2 + 4 = 8 \text{ km}$
ABDEZ	$2 + 5 + 1 + 4 = 12 \text{ km}$
ABEDZ	$2 + 2 + 1 + 2 = 7 \text{ km}$
ACEZ	$3 + 5 + 4 = 12 \text{ km}$
ACEDZ	$3 + 5 + 1 + 2 = 11 \text{ km}$
ACEBDZ	$3 + 5 + 2 + 5 + 2 = 17 \text{ km}$
ACEBDEZ	$3 + 5 + 2 + 5 + 1 + 4 = 20 \text{ km}$

طول اقصر مسار هو $ABEDZ$ وطوله : 7 km

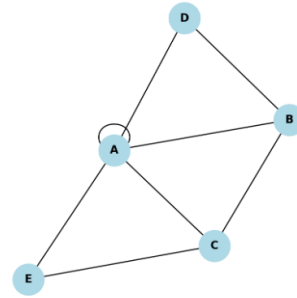
مهارات التفكير العليا

مثال 7: مسألة مفتوحة: أرسم مُخطَّطًا يُحقِّق الوصف المُعطى في كلِّ ممَّا يأتي :

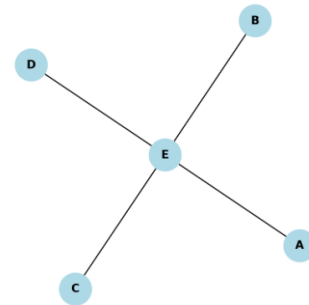
(1) يتضمَّن المُخطَّط 4 رؤوس، و 6 حافات .



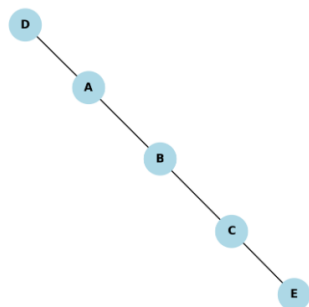
(2) يتضمَّن المُخطَّط 5 رؤوس، و 8 حافات، وحلقة واحدة .



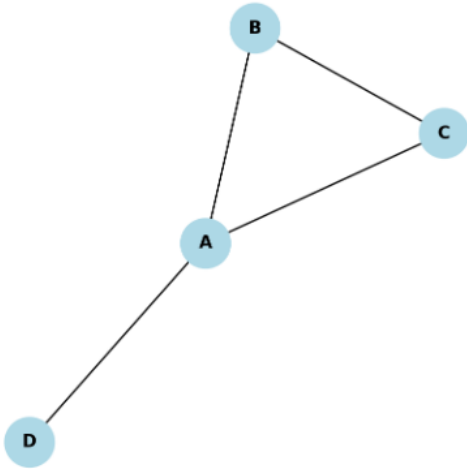
(3) يتضمَّن المُخطَّط 4 رؤوس درجاتها فردية، ورأسًا درجته زوجية .



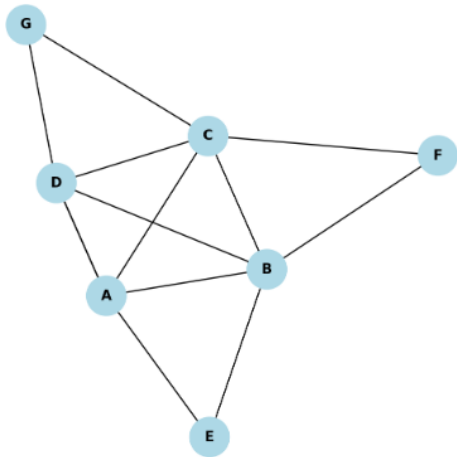
(4) يتضمَّن المُخطَّط 3 رؤوس درجة كلِّ منها 2، ورأسين درجة كلِّ منهما 1 .



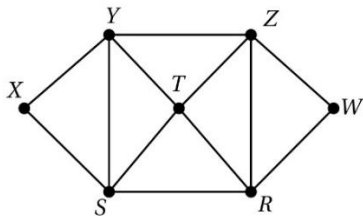
(5) يتضمَّن المُخطَّط رأسين درجة كلِّ منهما 2، ورأسًا درجته 3 ورأسًا درجته 1 .



(6) يتضمَّن المُخطَّط 4 رؤوس درجة كلِّ منها 5، و 3 رؤوس درجة كلِّ منها 2 .



مثال 8: تحدُّ : أتأمَّل المُخطَّط المجاور، ثمَّ أجيب عن السؤالين الآتيين :

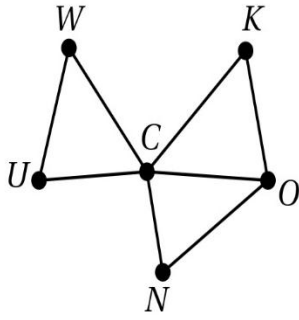


(1) أحدد دارة هاملتون في المُخطَّط .

XYTZWRXS

(2) أحدد دارة أويلر في المُخطَّط .

XYSTYZWRZTRXS

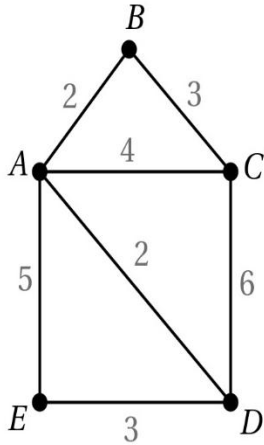


أتأمل الشكل المجاور الذي يُبين مُخطَّطاً للطرق الرئيسة بين مجموعة من المدن،
ثمَّ أجيب عن الأسئلة الآتية تبعاً:

1 أصف ما تمثله كلُّ من الرؤوس والحافات في المُخطَّط؟

2 أصف مسارين مُحتملين يُمكن بهما الوصول من المدينة W إلى المدينة O.

3 ما عدد المدن التي ترتبط بها المدينة C مباشرة؟



تكلفة: يُبين الشكل المجاور مُخطَّطاً لتكلفة استعمال سيارة رُكَّاب صغيرة للتنقُّل بين
مناطق عدَّة في مدينة عمَّان، حيث يُمثِّل العدد على كل حافةٍ التكلفة بالدينار للتنقُّل بين
كل منطقتين:

4 أجد تكلفة الذهاب من المنطقة C إلى المنطقة D مباشرة.

5 أجد أقل تكلفة للذهاب من المنطقة A إلى المنطقة D، ثمَّ أجد المسار الذي
اتخذته لذلك.

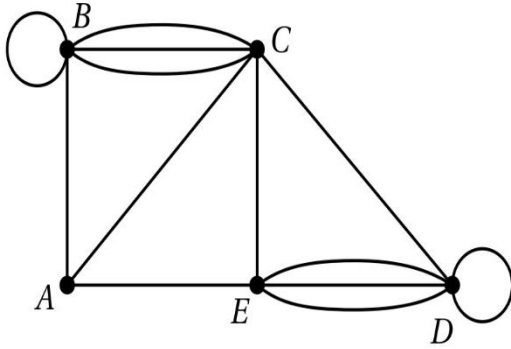
6 أجد أقل تكلفة للذهاب من المنطقة B إلى المنطقة E، ثمَّ أجد المسار الذي اتخذته لذلك.

أتأمل المخطط المجاور، ثم أجيب عن كل مما يأتي:

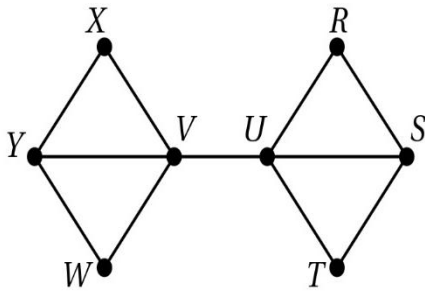
7 أحدد مجموعة الرؤوس ومجموعة الحافات.

8 أحدد درجة كل رأس من رؤوس المخطط، ونوعها.

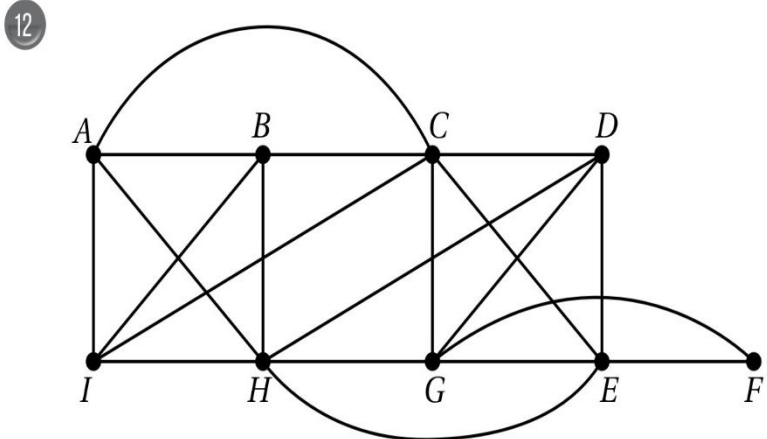
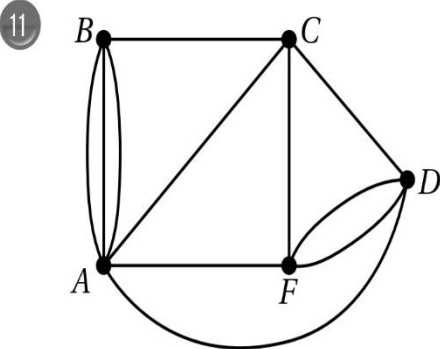
9 أحدد مجموعة الدرجات للمخطط.



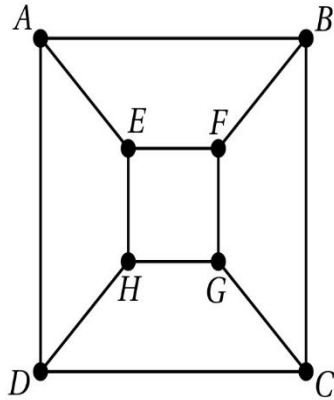
10 أحدد جميع الطرق التي تصل بين الرأس X والرأس T في المخطط المجاور.



أجد مجموع درجات الرؤوس في كل من المخططين الآتين:



أتأمل المخطط المجاور، ثم أجيب عن كل مما يأتي:

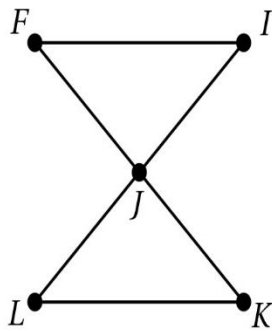


13 أحدد مجموعة الرؤوس ومجموعة الحافات.

14 أحدد درجة كل رأس من رؤوس المخطط، ونوعها.

15 أحدد مجموعة الدرجات للمخطط.

16 أحدد في المخطط ممشي لا يمثل ممرا، وممرا لا يمثل طريقا، وطريقا، ودائرة، ودائرة هاملتون تبدأ بالرأس A، ودائرة أويلر (إن وجدت).



أتأمل المخطط المجاور، ثم أجيب عن كل مما يأتي:

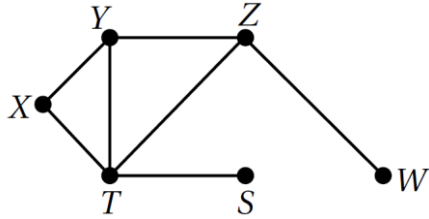
17 أحدد مجموعة الرؤوس ومجموعة الحافات.

18 أحدد درجة كل رأس من رؤوس المخطط، ونوعها.

19 أحدد في المخطط ممشي لا يمثل ممرا، وممرا لا يمثل طريقا، وطريقا، ودائرة، ودائرة هاملتون (إن وجدت)، ودائرة أويلر تبدأ بالرأس F.

[illegible]

مثال 1: أتملّل المخطّط المجاور، ثمّ أجيب عن كلّ ممّا يأتي :



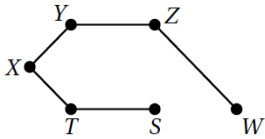
(1) هل المخطّط بسيط؟ أبرّر إجابتي .

نعم؛ لأنّه لا يحوي حلقات أو حافات متعدّدة .

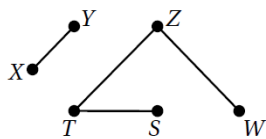
(2) هل المخطّط متصل؟ أبرّر إجابتي .

نعم؛ لأنّه يُمكن إيجاد طريق يصل بين كلّ رأسين من رؤوسه .

(3) أرسم مخطّطين جزئيين من المخطّط .

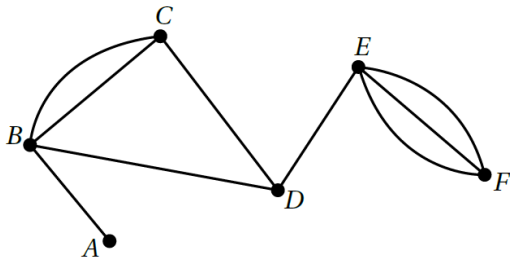


المخطّط الجزئي 1



المخطّط الجزئي 2

مثال 2: أتملّل المخطّط المجاور، ثمّ أجيب عن كلّ ممّا يأتي :



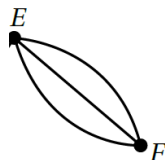
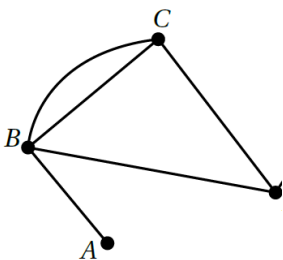
(1) هل المخطّط بسيط؟ أبرّر إجابتي .

لا؛ لأنّه يحوي حافات متعدّدة .

(2) هل المخطّط متصل؟ أبرّر إجابتي .

نعم؛ لأنّه يُمكن إيجاد طريق يصل بين كلّ رأسين من رؤوسه .

(3) أرسم مخطّطين جزئيين من المخطّط .



الدرس الرابع: أنواع خاصة من المخطّطات

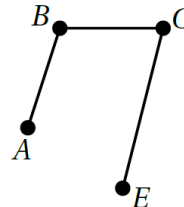
Special Types of Graphs

1. المُخطّط البسيط، والمُخطّط المتصل، والمُخطّط الجزئي

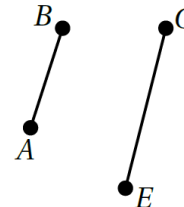
المُخطّط البسيط: هو المُخطّط الذي لا توجد فيه حلقة أو حافات متعدّدة .

المُخطّط المتصل: هو المُخطّط الذي يمتاز بوجود طريق يصل بين كلّ رأسين من رؤوسه .

أنظر الشكل الآتي الذي يبيّن مخطّطًا متصلًا ومخطّطًا آخر غير متصل .



مُخطّط متصل

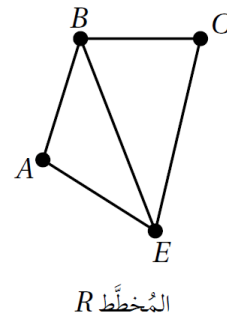


مُخطّط غير متصل

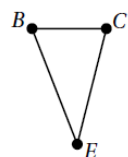
المُخطّط الجزئي من مُخطّط ما: هو مُخطّط تنتمي جميع

رؤوسه وحافاته إلى هذا المُخطّط .

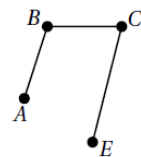
في ما يأتي مخطّطات جزئية من المُخطّط R المبين في الشكل المجاور .



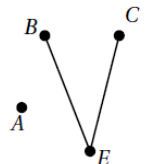
المُخطّط R



المُخطّط الجزئي 1



المُخطّط الجزئي 2

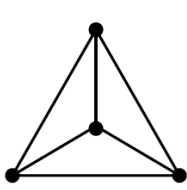
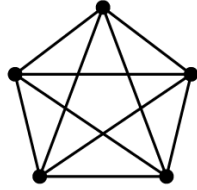


المُخطّط الجزئي 3

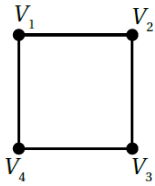
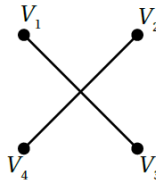
أتعلّم: لا يشترط في المُخطّط الجزئي أن يكون متصلًا .

2. المُخَطَّط الكامل، والمُخَطَّط المُكْمَل.

المُخَطَّط الكامل : هو مُخَطَّط بسيط يتصل كل رأسين فيه بحافة واحدة، ويُرمز إلى المُخَطَّط الكامل الذي يحوي n من الرؤوس بالرمز K_n . أنظر الشكل الآتي الذي يُبين المُخَطَّط K_4 والمُخَطَّط K_5 .

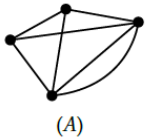
المُخَطَّط K_4 المُخَطَّط K_5

وأما **المُخَطَّط البسيط** الذي عدد رؤوسه مساو لعدد رؤوس المُخَطَّط البسيط G ، وليكن n ، والذي تكون مجموعة حافته هي جميع الحافات الموجودة في المُخَطَّط K_n وغير الموجودة في المُخَطَّط G ، فيُسمى المُخَطَّط المُكْمَل للمُخَطَّط G ويُرمز إليه بالرمز $\bar{G}$. أنظر الشكل الآتي الذي يُبين المُخَطَّط G والمُخَطَّط المُكْمَل له $\bar{G}$.

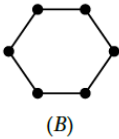
المُخَطَّط G  $\bar{G}$ المُخَطَّط المُكْمَل للمُخَطَّط G

مثال 1 :

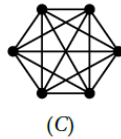
(1) أحدد المُخَطَّط الكامل ممَّا يأتي، وأسمِّيه بالرموز، ثمَّ أبرر إجابتي .



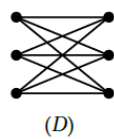
(A)



(B)



(C)



(D)

المُخَطَّط C : مُخَطَّط الكامل (لأنَّ كل رأسين من رؤوسه

متصلان بحافة واحدة فقط) ويُرمز إلى هذا المُخَطَّط بالرمز K_6 .

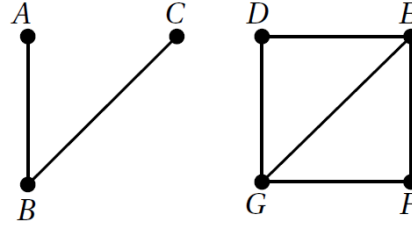
المُخَطَّط A : فهو غير كامل (لأنه مُخَطَّط غير بسيط؛ إذ يتصل

رأسان من رؤوسه بحافتين)

وأما المُخَطَّطان B و D فهما ليسا كامليين؛ (لأنَّ فيهما رؤوسا

غير متصلة بحافات)

مثال 3 : أنامل المُخَطَّط المجاور، ثمَّ أجيب عن كلِّ ممَّا يأتي :



(1) هل المُخَطَّط بسيط؟ أبرر إجابتي .

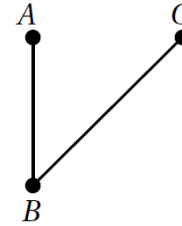
نعم ؛ لأنه لا يحوي حلقات أو حافات مُتعدِّدة .

(2) هل المُخَطَّط متصل؟ أبرر إجابتي .

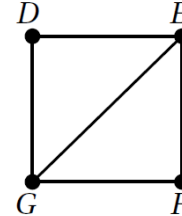
لا ؛ لأنه لا يُمكن إيجاد طريق يصل بين الرأس C والرأس D .

(3) أرسم مُخَطَّطين جزئيين من المُخَطَّط .

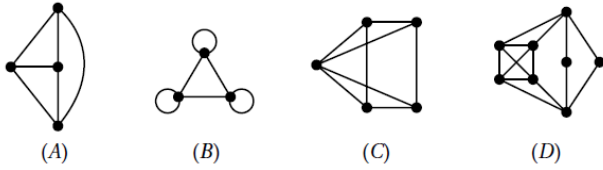
المُخَطَّط الأول :



المُخَطَّط الثاني :



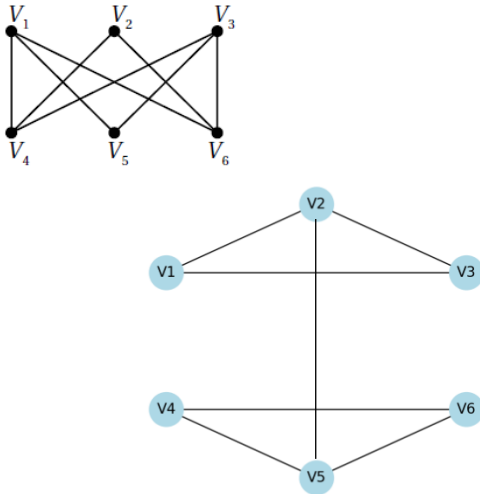
مثال 3: أحدد المخطط الكامل مما يأتي، وأسميه بالرموز، ثم أبرر إجابتي .



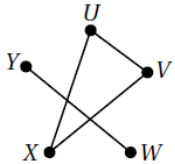
المخطط الكامل هو الشكل (A)، ويرمز له بـ K_4
أما (B) ففيه حلقات، و (C) و (D) ينقصهما وصلات بين
بعض الأزواج، لذلك ليست كاملة .

مثال 4: أرسم المخطط المكمل لكل من المخططات الآتية :

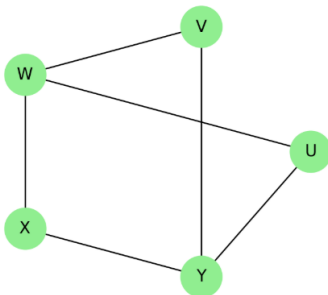
(1)



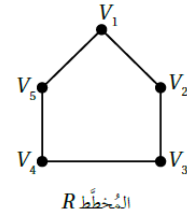
(2)



الحل:

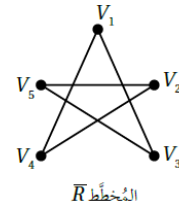


(2) أرسم $\bar{R}$ للمخطط R المجاور.



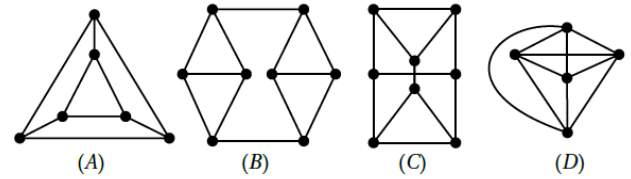
الحل:

يُبين الشكل الآتي المخطط $\bar{R}$ المكمل للمخطط R المجاور.



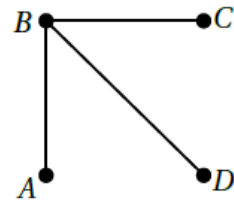
مثال 2:

(1) أحدد المخطط الكامل مما يأتي، وأسميه بالرموز، ثم أبرر إجابتي .

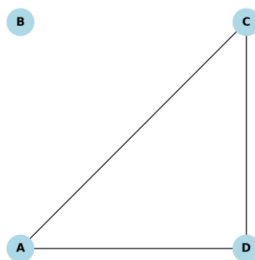


المخطط D : مخطط الكامل (لأن كل رأسين من رؤوسه
متصلان بحافة واحدة فقط) ويرمز إلى هذا المخطط بالرمز K_5 .
وأما المخططات A و B و C فهم ليسوا كاملين ؛ (لأن فيهما
رؤوساً غير متصلة بحافات)

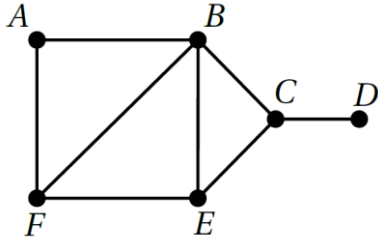
(2) أرسم $\bar{R}$ للمخطط R المجاور.



الحل:

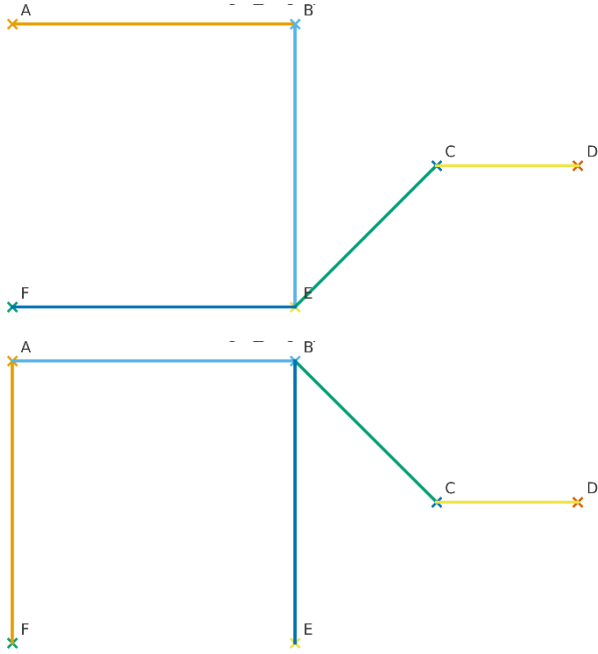


مثال 2 : أرسم شجرتين شاملتين للمخطط المجاور.

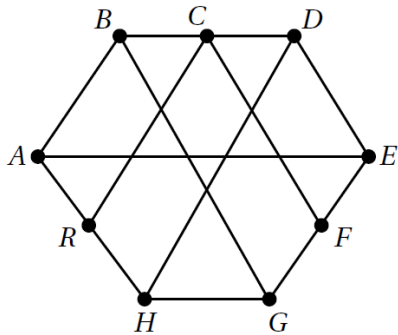


الحل:

يُمكن رسم شجرتين شاملتين للمخطط المجاور كما يأتي :



مثال 3 : أتمل المخطط المجاور، ثم أجيب عن كل مما يأتي :

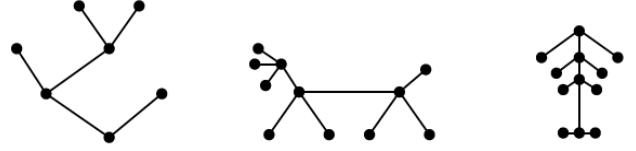


(1) هل المخطط بسيط؟ أبرر إجابتي .

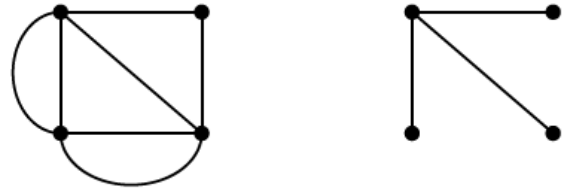
نعم، بسيط؛ لأنه لا يحتوي على حلقات (loops) ولا على أضلاع مكررة بين زوج من الرؤوس .

3. الشجرة والشجرة الشاملة .

يُطلق على المخطط المتصل الذي لا يحتوي أي دائرة اسم **الشجرة** في ما يأتي ثلاثة مخططات يُعد كل منها شجرة :



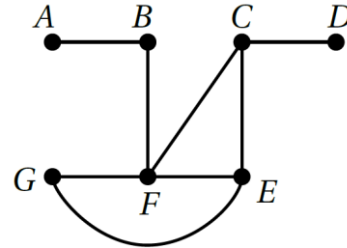
تُسمى الشجرة **T** شجرة شاملة للمخطط المتصل **G** إذا كانت **T** مخططًا جزئيًا من **G**، وتحتوي جميع رؤوسه كما هو مبين في الشكل الآتي .



المخطط **G**.

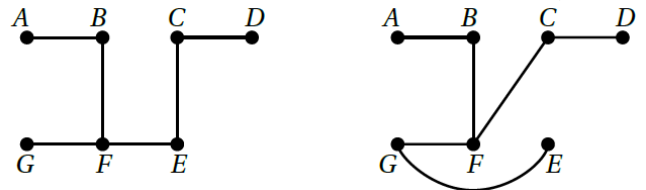
الشجرة **T** شاملة للمخطط **G**.

مثال 1 : أرسم شجرتين شاملتين للمخطط المجاور.



الحل:

يُمكن رسم شجرتين شاملتين للمخطط المجاور كما يأتي :



4. أصغر شجرة شاملة .

تعلّمتُ في المثال السابق إيجاد أشجار شاملة لمُخطّط متصل .

ولكن، كيف يُمكن إيجاد أصغر شجرة شاملة للمُخطّط المتصل

الموزون ؟

يُمكن إيجاد أصغر شجرة شاملة للمُخطّط المتصل الموزون

باستعمال خوارزمية برايم ، التي يُمكن بها تحديد أقصر طريقة

وأسرعها لربط جميع الرؤوس في المُخطّط المتصل الموزون،

بحيث يكون مجموع أوزان الحافات في هذه الشجرة الشاملة

أقل ما يُمكن .

خوارزمية : خوارزمية برايم

يُمكن إيجاد أصغر شجرة شاملة لمُخطّط متصل موزون

باستعمال خوارزمية برايم ، وذلك بالتّباع الخطوات الآتية :

(1) اختيار أيّ رأس في المُخطّط لبدء رسم (إنشاء) الشجرة .

(2) تحديد أقل حافة وزناً تربط بين رأس موجود في الشجرة

ورأس لم يُضف بعدُ إلى الشجرة . وفي حال وجود حافات

عديدة لها الوزن نفسه ، فإنّه يُمكن اختيار أيّ منها . وإذا

شكّلت الحافة دائرة ، فإنّها لا تضاف إلى الشجرة .

(3) تكرار الخطوة الثانية حتّى تكتمل إضافة جميع الرؤوس،

ويتمّ ربطها بالشجرة .

(4) كتابة الحافات المضافة إلى الشجرة بالترتيب .

أتعلّم : مفهوم (أصغر شجرة شاملة) مُرتبط فقط

بالمُخطّطات الموزونة .

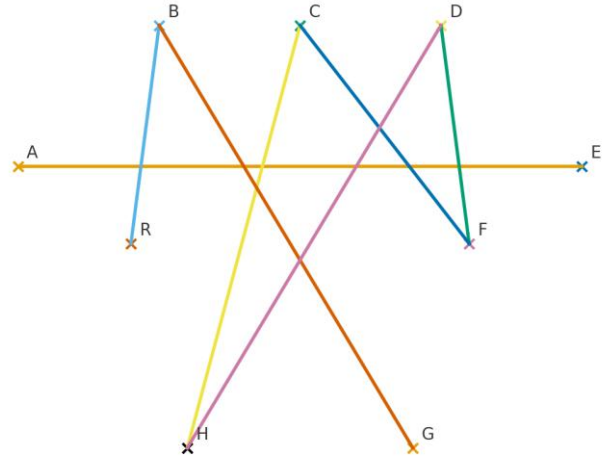
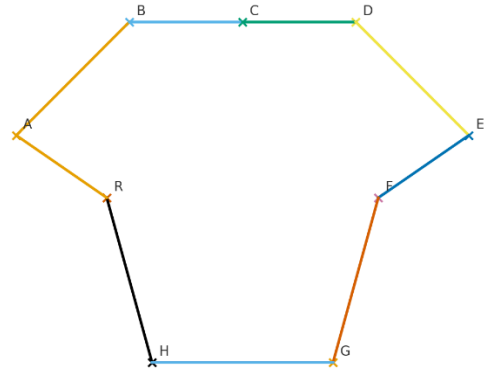
(2) هل المُخطّط متصل ؟ أبرّر إجابتي .

نعم، متصل؛ إذ توجد مسارات تصل بين كل زوج من الرؤوس (يمكن تتبّعها عبر حدود الشكل والأقطار).

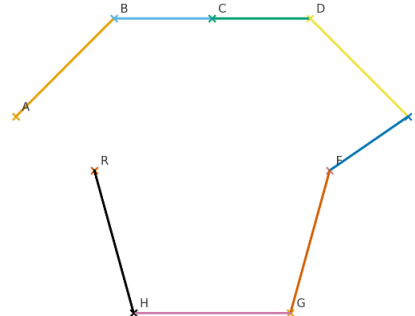
(3) هل المُخطّط كامل ؟ أبرّر إجابتي .

لا، غير كامل؛ ففي الرسم البياني الكامل K_n يجب أن تكون كل زوج من الرؤوس متجاوراً بحافة مباشرة، وهو غير محقّق هنا .

(4) أرسم مُخطّطين جزئيين من المُخطّط .

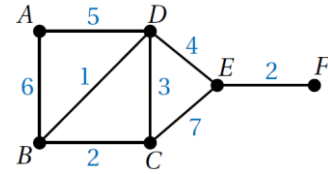


(5) أرسم شجرة شاملة من المُخطّط .



مثال 1 : (من الحياة)

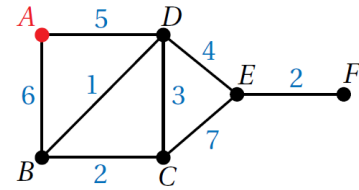
أكبال كهربائية: يبين الشكل المجاور مخططًا لأكبال كهربائية تربط بين محطات التوزيع في إحدى المناطق. وفيه يُمثل العدد على كل حافة طول الكَبَل (بالكيلومترات) بين كل مَحْطَين في المنطقة :



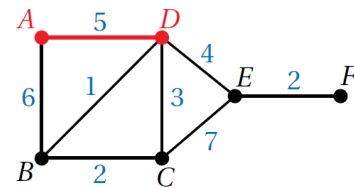
(1) أستمعمل خوارزمية برايم لإيجاد أصغر شجرة شاملة للمُخَطَّط، ثم أكتب الحافات التي أُضيفت إلى الشجرة بالترتيب .

الحل:

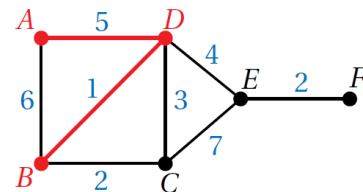
1. أختار أي رأس في المُخَطَّط لبدء رسم (إنشاء) الشجرة الشاملة، وليكن الرأس A .



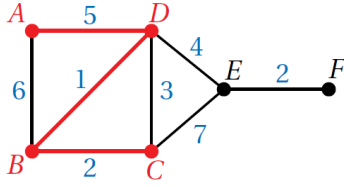
2. أحدد أقل حافة وزنًا مُرتبطة بالرأس A ، وهي AD ، ثم أُضيفها إلى الشجرة .



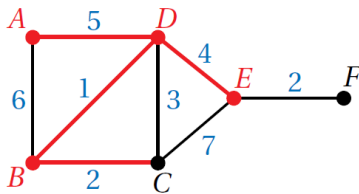
3. أُضيف الحافة DB إلى الشجرة؛ لأنها أقل حافة وزنًا بين الحافات المُرتبطة بالرأس A والرأس D اللذين أُضيفا إلى الشجرة أصلًا .



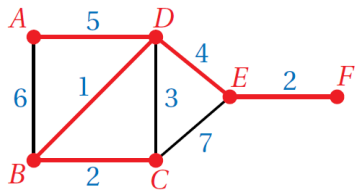
4. أُضيف الحافة BC إلى الشجرة؛ لأنها أقل حافة وزنًا بين الحافات المُرتبطة بالرؤوس A, D, B التي أُضيفت إلى الشجرة أصلًا .



5. أُضيف الحافة DE إلى الشجرة؛ لأنها أقل حافة وزنًا بين الحافات المُرتبطة بالرؤوس A, D, B, C التي أُضيفت إلى الشجرة أصلًا .



6. أُضيف الحافة EF إلى الشجرة .



بما أنه تم ربط جميع رؤوس المخطط معًا، فإن ذلك يعني رسم (إنشاء) أصغر شجرة شاملة .

الحافات التي أُضيفت إلى الشجرة الشاملة بالترتيب هي :
AD , DB , BC , DE , EF

(2) أستمعمل إجابة السؤال السابق لإيجاد أقل طول من الأكبال يلزم لربط جميع المَحْطَّات في المنطقة .

الحل:

لإيجاد أقل طول للأكبال، أجد الوزن الكلي للشجرة

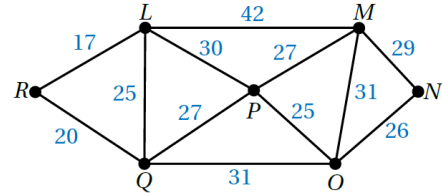
الشاملة الناتجة في السؤال السابق، وذلك بجمع أوزان الحافات في الشجرة كما يأتي :

$$5 + 1 + 2 + 4 + 2 = 14$$

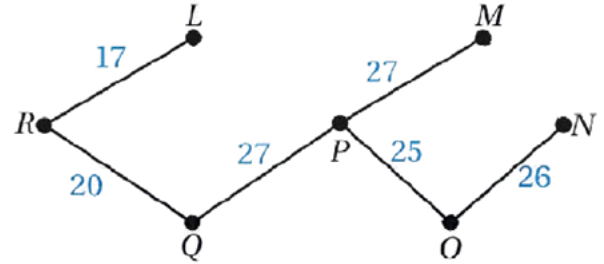
إذن، أقل طول من الأكبال يلزم لربط جميع المَحْطَّات في المنطقة هو: 14 km

مثال 2 : (من الحياة)

أنابيب مياه : يُبين الشكل المجاور مُخطّطًا لشبكة أنابيب مياه تصل بين المَحَطّات الرئيسة في إحدى المدن. وفيه يُمثّل العدد على كل حافة طول الأنبوب (بالكيلومتر) بين كل مَحَطّتين في المدينة :



(1) أستخدم خوارزمية برايم لإيجاد أصغر شجرة شاملة للمُخطّط، ثمّ أكتب الحافات التي أضيفت إليها بالترتيب .



الحافات التي أضيفت هي :

LR , RQ , QP , PO , OM , PM

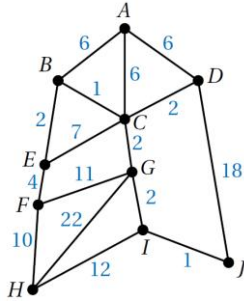
(2) أستخدم إجابة السؤال السابق لإيجاد أقل طول من الأنابيب يلزم لربط جميع المَحَطّات في المدينة .

مجموع أطوال الحواف في الشجرة الشاملة السابقة :

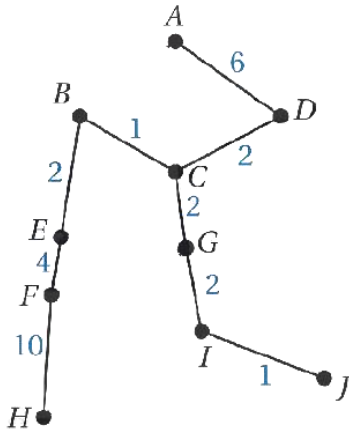
$$17 + 20 + 25 + 27 + 25 + 26 + 27 = 142 \text{ km}$$

مثال 3 : إنترنت : يُبين الشكل المجاور مُخطّطًا لشبكة

إنترنت تصل بين مجموعة من الحواسيب في إحدى المكتبات العامة . وفيه يُمثّل العدد على كل حافة طول الكَبْل (بالمتر) بين كل جهازي حاسوب في المكتبة. أجب عن السؤالين الآتيين تبعًا :



(1) أستخدم خوارزمية برايم لإيجاد أصغر شجرة شاملة للمُخطّط، ثمّ أكتب الحافات التي أضيفت إليها بالترتيب .



الحافات التي أضيفت هي :

JI , IG , GC , CD , DA , CB , BE , EF , FH

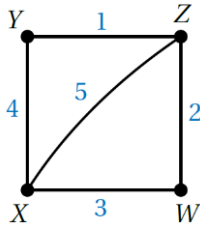
(2) أستخدم إجابة السؤال السابق لإيجاد أقل تكلفة تلزم

لربط جميع الحواسيب في المكتبة، علمًا بأنّ تكلفة تمديد المتر الواحد من الكَبْل 3 دنانير.

تكلفة المتر الواحد = 3 دنانير $\Rightarrow$

$$\boxed{90 \text{ دينار}} = 3 \times 30 = \text{التكلفة الكلية}$$

(2) أمثل المخطط الموزون المجاور بمصفوفة الوزن



الحل:

بما أن المخطط يحوي 4 رؤوس، فإن رتبة المصفوفة

هي 4×4

أكتب أسماء الرؤوس فوق الأعمدة وبجانب الصفوف

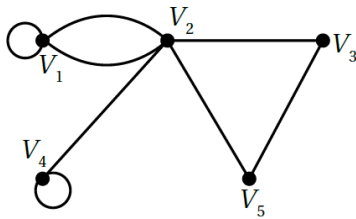
لتسهيل الحل، ثم أملأ مدخلات المصفوفة بأوزان الحافات

بين كل رأسين من الصفوف والأعمدة .

	X	Y	Z	W
X	—	4	5	3
Y	4	—	1	—
Z	5	1	—	2
W	3	—	2	—

مثال 2 :

(1) أمثل المخطط المجاور بمصفوفة الجوار.



الحل:

بما أن المخطط يحوي 5 رؤوس، فإن رتبة المصفوفة هي 5×5

	V ₁	V ₂	V ₃	V ₄	V ₅
V ₁	2	2	0	0	0
V ₂	2	0	1	1	1
V ₃	0	1	0	0	1
V ₄	0	1	0	2	0
V ₅	0	1	1	0	0

5. تمثيل المخططات باستعمال المصفوفات .

تعرفت في الدرس السابق أن المخطط تمثيل بياني يستعمل

للتعبير عن روابط بين أشياء باستعمال رؤوس وحافات. ولكن

يمكن أيضاً التعبير عن هذه الروابط باستعمال المصفوفات .

فمثلاً، يمكن التعبير عن المخططات غير الموزونة باستعمال

مصفوفة الجوار؛ وهي مصفوفة مربعة رتبته $n \times n$ ،

ومدخلاتها عدد الحافات التي تربط بين كل رأسين في

المخطط، إضافة إلى عدد الحافات التي تربط الرؤوس بنفسها

(الحلقات) . أما المخططات الموزونة فيمكن التعبير عنها

باستعمال مصفوفة الوزن؛ وهي مصفوفة مربعة رتبته

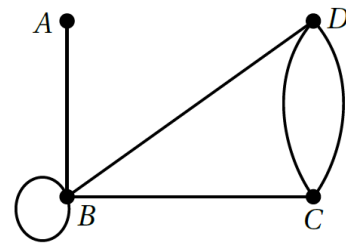
$n \times n$ ، ومدخلاتها أوزان الحافات التي تربط بين كل رأسين

في المخطط، إضافة إلى أوزان الحافات التي تربط الرؤوس

بنفسها (الحلقات) .

مثال 1 :

(1) أمثل المخطط المجاور بمصفوفة الجوار.



الحل:

بما أن المخطط يحوي 4 رؤوس، فإن رتبة المصفوفة هي 4×4

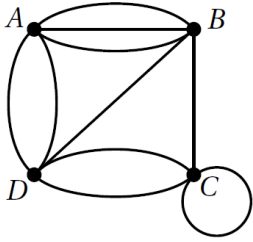
أكتب أسماء الرؤوس فوق الأعمدة وبجانب الصفوف لتسهيل

الحل، ثم أملأ مدخلات المصفوفة بعدد الحافات بين كل

رأسين من الصفوف والأعمدة .

	A	B	C	D
A	0	1	0	0
B	1	2	1	1
C	0	1	0	2
D	0	1	2	0

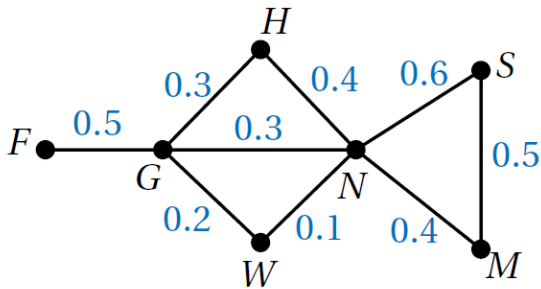
(2)

الحل:

	A	B	C	D
A	0	3	0	2
B	3	0	1	1
C	0	1	2	2
D	2	1	2	0

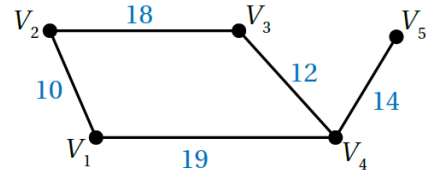
مثال 4: أمثل كل مخطط مما يأتي بمصفوفة الوزن:

(1)

الحل:

	F	G	H	M	N	S	W
F	—	0.5	—	—	—	—	—
G	0.5	—	0.3	—	0.3	—	0.2
H	—	0.3	—	—	0.4	—	—
M	—	—	—	—	0.4	0.5	—
N	—	0.3	0.4	0.4	—	0.6	0.1
S	—	—	—	0.5	0.6	—	—
W	—	0.2	—	—	0.1	—	—

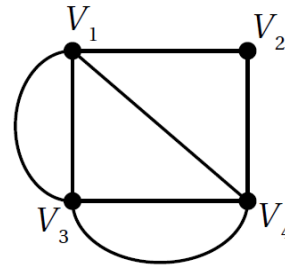
(2) أمثل المخطط الموزون المجاور بمصفوفة الوزن

الحل:

	V1	V2	V3	V4	V5
V1	—	10	—	19	—
V2	10	—	18	—	—
V3	—	18	—	12	—
V4	19	—	12	—	14
V5	—	—	—	14	—

مثال 3: أمثل كل مخطط مما يأتي بمصفوفة الجوار.

(1)

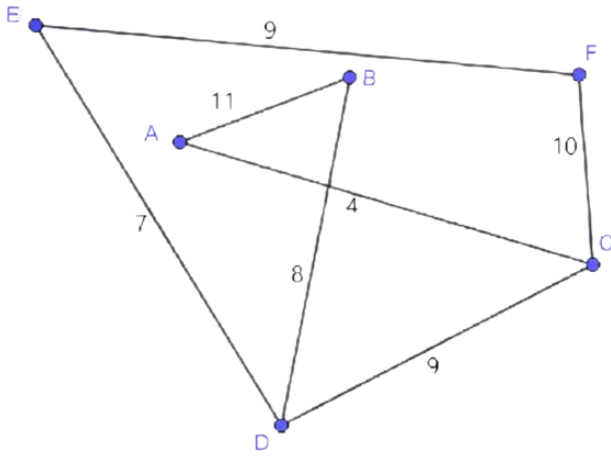
الحل:

	V1	V2	V3	V4
V1	0	1	2	1
V2	1	0	0	1
V3	2	0	0	2
V4	1	1	2	0

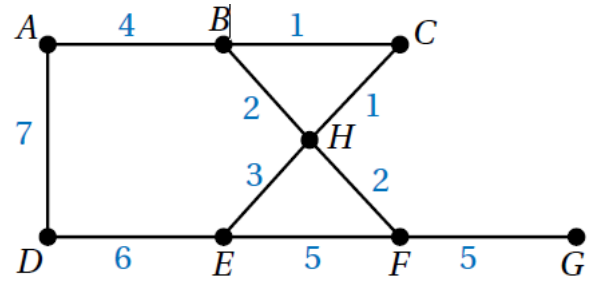
مثال 6: تُمثّل مصفوفة الوزن الآتية أطوال أنابيب المياه (بالمتر) التي تصل بين المرشّات في إحدى المزارع. أرسم المخطط الموزون الذي تُمثّله المصفوفة .

$$\begin{bmatrix} - & 11 & 4 & - & - & - \\ 11 & - & - & 8 & - & - \\ 4 & - & - & 9 & - & 10 \\ - & 8 & 9 & - & 7 & - \\ - & - & - & 7 & - & 9 \\ - & - & 10 & - & 9 & - \end{bmatrix}$$

الحل:



(2)



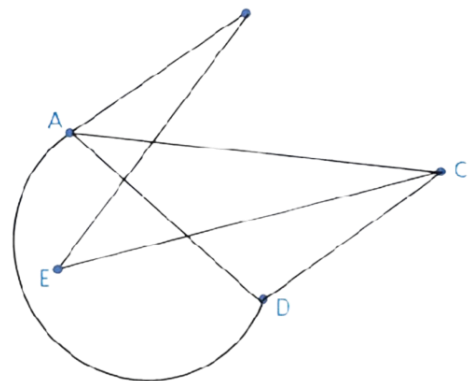
الحل:

	A	B	C	D	E	F	G	H
A	-	4	-	7	-	-	-	-
B	4	-	1	-	-	-	-	2
C	-	1	-	-	-	-	-	1
D	7	-	-	-	6	-	-	-
E	-	-	-	6	-	5	-	3
F	-	-	-	-	5	-	5	2
G	-	-	-	-	-	5	-	-
H	-	2	1	-	3	2	-	-

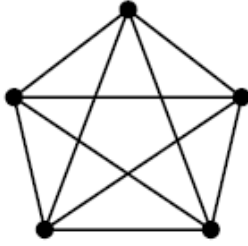
مثال 5: أرسم المخطط المُمثّل في مصفوفة الجوار الآتية

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

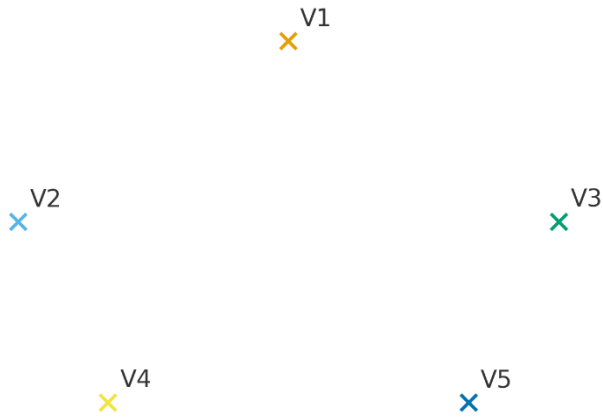
الحل:



مثال 8 : تبرير: أرسم المخطط المكمل للمخطط المجاور،
ثم أبرد إجابتي .



الحل:

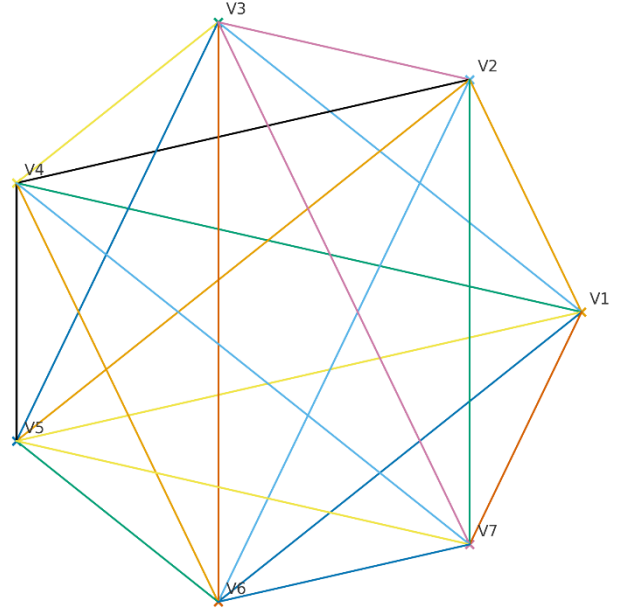


مهارات التفكير العليا

مثال 7 : مسألة مفتوحة: أرسم كلاً مما يأتي :

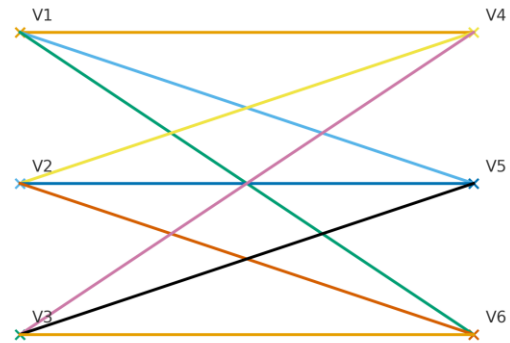
(1) مخطط كامل، عدد رؤوسه 7

الحل:



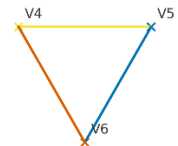
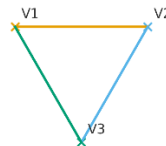
(2) مخطط متصل، عدد رؤوسه 6، ودرجة كل منها 3

الحل:

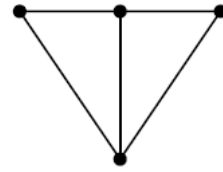


(3) مخطط بسيط، غير متصل، عدد رؤوسه 6، ودرجة كل منها 2 .

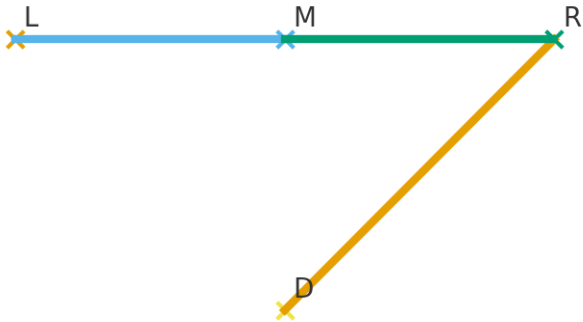
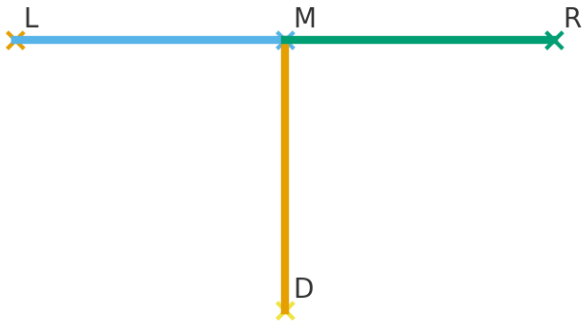
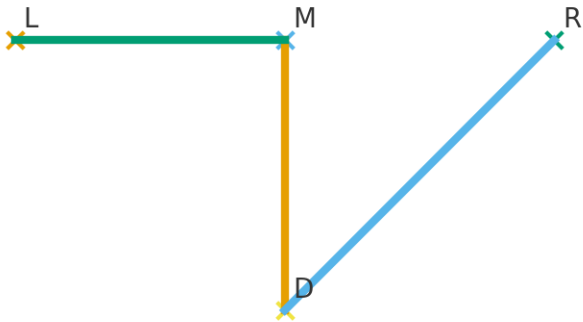
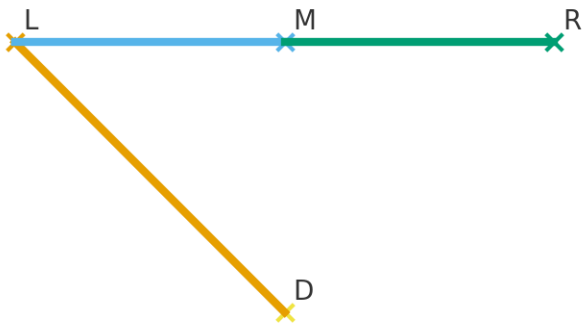
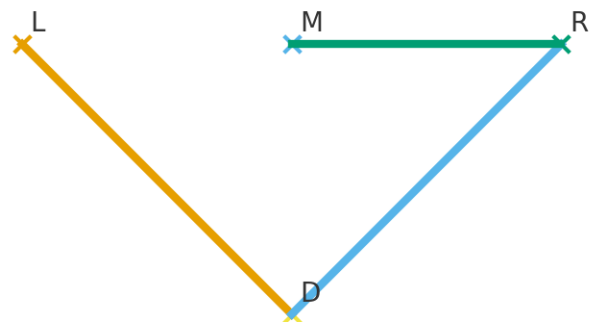
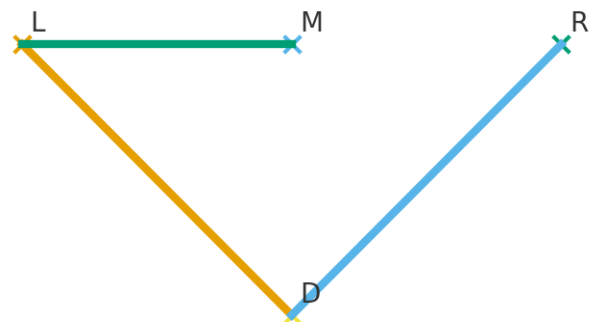
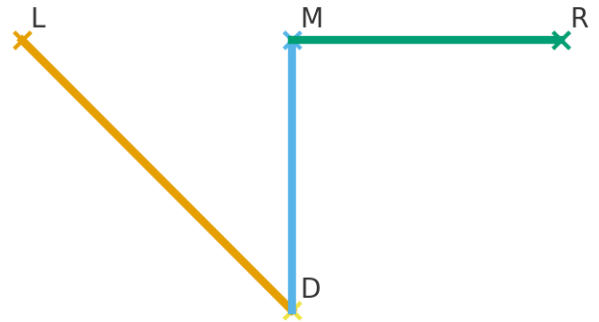
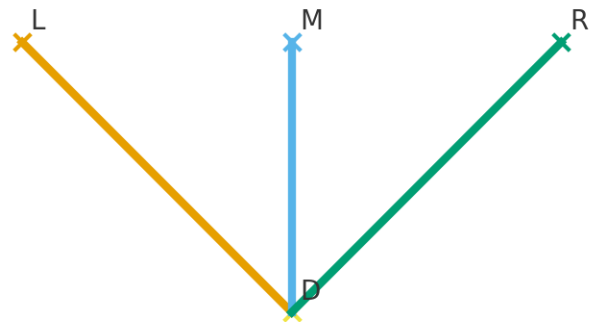
الحل:

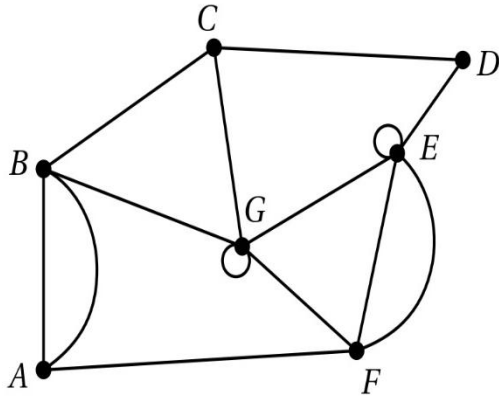


مثال 9: تحدّد: أرسم جميع الأشجار الشاملة التي يُمكن أن تنتج من المخطط الآتي :



الحل:





أتأمل المخطط المجاور، ثم أجيب عن كل مما يأتي:

1 هل المخطط بسيط؟ أبرر إجابتي.

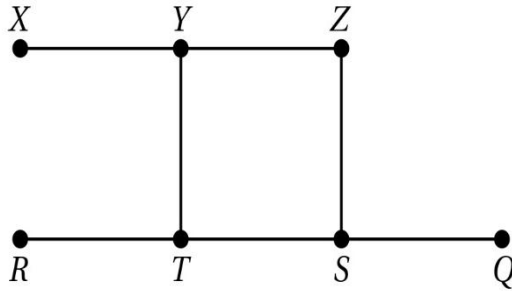
2 هل المخطط متصل؟ أبرر إجابتي.

3 أرسم مخططين جزئيين من المخطط.

4 أرسم شجرتين للمخطط.

5 أرسم شجرة شاملة للمخطط.

أتأمل المخطط المجاور، ثم أجيب عن كل مما يأتي:



6 هل المخطط بسيط؟ أبرر إجابتي.

7 هل المخطط متصل؟ أبرر إجابتي.

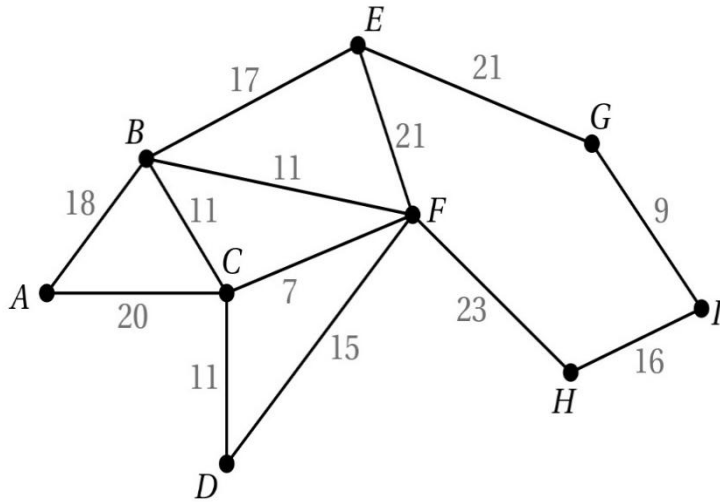
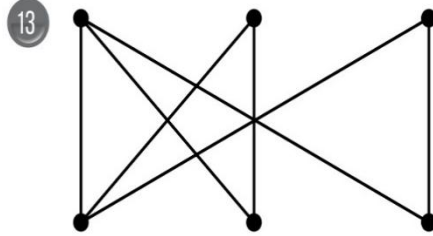
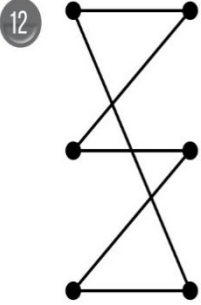
8 هل المخطط كامل؟ أبرر إجابتي.

9 أرسم مخططين جزئيين من المخطط.

10 أرسم شجرتين للمخطط.

11 أرسم شجرة شاملة للمخطط.

أرسم المخطط المُكْمَل لكل من المخططين الآتين:

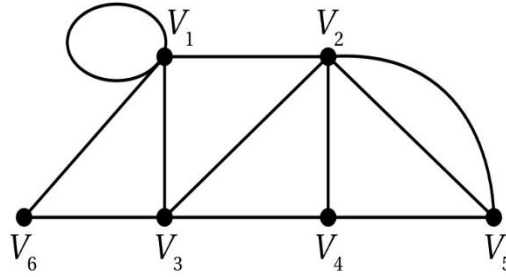


حدائق: يُبين الشكل المجاور مخططًا للممرات التي تصل بين المحطات الرئيسة في إحدى الحدائق، حيث يُمثل العدد على كل حافة طول الممر (بالمتر) بين كل محطتين رئيسيتين. أُجيب عن السؤالين الآتين تباعًا:

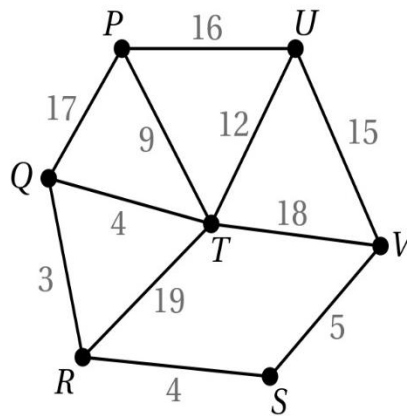
14 أستخدم خوارزمية برايم لإيجاد أصغر شجرة شاملة للمخطط، ثم أكتب الحافات التي أُضيفت إلى الشجرة بالترتيب.

15 أستخدم إجابة السؤال السابق لإيجاد أقل تكلفة تلزم لتبليط الممرات للربط بين جميع المحطات الرئيسة في الحديقة، علمًا بأن تكلفة تبليط المتر الطولي الواحد من الممر 25 JD.

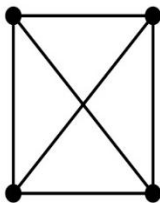
16 أمثل المخطط الآتي بمصفوفة الجوار.



17 أمثل المخطط الآتي بمصفوفة الوزن.



19 أرسم 6 أشجار شاملة للمخطط الآتي.

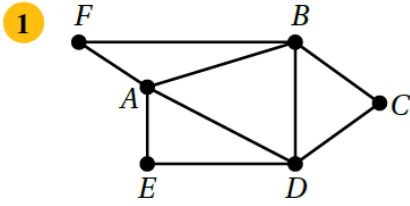


18 أرسم المخطط الممثل في مصفوفة الجوار الآتية.

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

[illegible]

مثال 1: أتاكمل كل مخطط مما يأتي، ثم أحدد إذا كان أويلريًا، أو شبه أويلري، أو غير ذلك .



الحل:

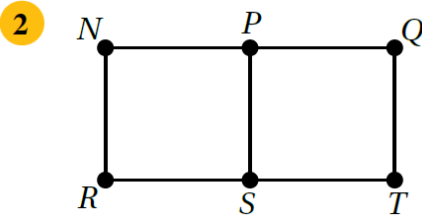
الخطوة 1: أحدد إذا كان المخطط متصلًا أم لا .

المخطط متصل، إذن يمكن البحث في نوعه (أويلري، أو شبه أويلري، أو غير ذلك) .

الخطوة 2: أحدد درجة كل رأس من رؤوس المخطط، ونوعها .

الرأس	الدرجة	نوع الدرجة
A	4	زوجية
B	4	زوجية
C	2	زوجية
D	4	زوجية
E	2	زوجية
F	2	زوجية

الخطوة 3: أحدد نوع المخطط استنادًا إلى درجات الرؤوس .
بما أن جميع درجات رؤوس المخطط زوجية، فإن المخطط أويلري .



الحل:

الخطوة 1: أحدد إذا كان المخطط متصلًا أم لا .

المخطط متصل، إذن يمكن البحث في نوعه (أويلري، أو شبه أويلري، أو غير ذلك) .

الدرس الخامس : مخططات أويلر

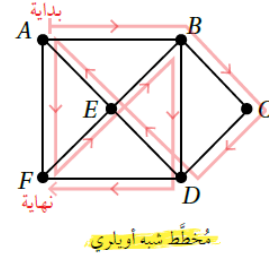
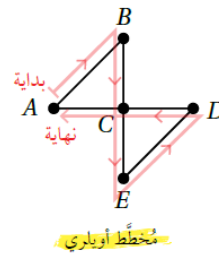
Euler Graphs

1. المخطط الأويلري، والمخطط شبه الأويلري .

تعرفتُ سابقًا أن دائرة أويلر ممرُّ رأس بدايته هو نفسه رأس نهايته، وأنه يشمل جميع حافات المخطط من دون تكرار المخطط الأويلري : هو المخطط المتصل الذي يحتوي على دائرة أويلر .

المخطط شبه الأويلري : هو المخطط المتصل الذي يحوي ممرًا يشمل جميع حافته من دون تكرار، ورأس بدايته مختلف عن رأس نهايته .

في ما يأتي مثال على مخطط أويلري، ومثال آخر على مخطط شبه أويلري .

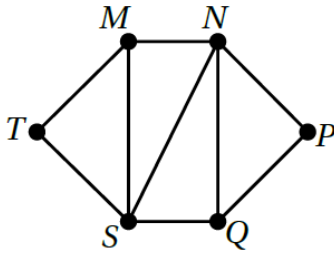


يصعب أحيانًا تمييز المخطط الأويلري من غيره عن طريق النظر إليه فقط. وفي هذه الحالة، يمكن الاستعانة بالنظرية الآتية :

نظرية (المخطط الأويلري) :

المخطط	الشروط
المخطط أويلريًا	المخطط متصلًا ودرجة كل رأس من رؤوسه زوجية
المخطط شبه أويلري	المخطط متصلًا ويحوي رأسين فقط، درجة كل منهما فردية
المخطط لا يكون أويلريًا ولا شبه أويلري	عدد الرؤوس ذات الدرجة الفردية في المخطط أكثر من رأسين أو إذا لم يكن المخطط متصلًا

2

**الحل:****الخطوة 1:** أحدد إذا كان المخطط متصلاً أم لا .

المخطط متصل، إذن يمكن البحث في نوعه

(أويلري، أو شبه أويلري، أو غير ذلك) .

الخطوة 2: أحدد درجة كل رأس من رؤوس المخطط، ونوعها .

نوع الدرجة	الدرجة	الرأس
زوجية	4	N
زوجية	2	P
فردية	3	Q
زوجية	2	T
زوجية	4	S
فردية	3	M

الخطوة 3: أحدد نوع المخطط استناداً إلى درجات الرؤوس .

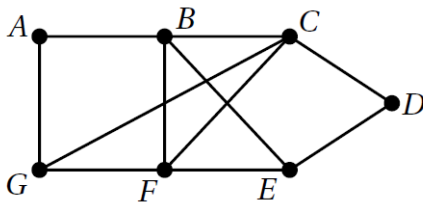
بما أنه يوجد رأسان فقط، درجة كل منهما فردية، فإن المخطط

شبه أويلري .

مثال 3: أتأمل كل مخطط مما يأتي، ثم أحدد إذا كان

أويلرياً، أو شبه أويلري، أو غير ذلك .

1

**الحل:****الخطوة 1:** أحدد إذا كان المخطط متصلاً أم لا .

المخطط متصل، إذن يمكن البحث في نوعه

(أويلري، أو شبه أويلري، أو غير ذلك) .

الخطوة 2: أحدد درجة كل رأس من رؤوس المخطط، ونوعها .

نوع الدرجة	الدرجة	الرأس
زوجية	2	N
فردية	3	P
زوجية	2	Q
زوجية	2	R
فردية	3	S
زوجية	2	T

الخطوة 3: أحدد نوع المخطط استناداً إلى درجات الرؤوس .

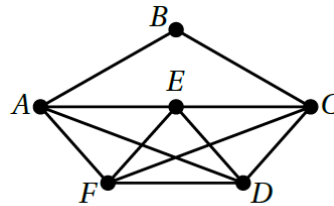
بما أنه يوجد رأسان فقط، درجة كل منهما فردية، فإن المخطط

شبه أويلري .

مثال 2: أتأمل كل مخطط مما يأتي، ثم أحدد إذا كان

أويلرياً، أو شبه أويلري، أو غير ذلك .

1

**الحل:****الخطوة 1:** أحدد إذا كان المخطط متصلاً أم لا .

المخطط متصل، إذن يمكن البحث في نوعه

(أويلري، أو شبه أويلري، أو غير ذلك) .

الخطوة 2: أحدد درجة كل رأس من رؤوس المخطط، ونوعها .

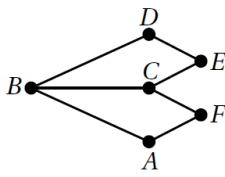
نوع الدرجة	الدرجة	الرأس
زوجية	4	A
زوجية	2	B
زوجية	4	C
زوجية	4	D
زوجية	4	E
زوجية	4	F

الخطوة 3: أحدد نوع المخطط استناداً إلى درجات الرؤوس .

بما أن جميع درجات رؤوس المخطط زوجية، فإن المخطط

أويلري .

3

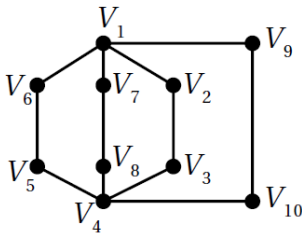


المُخَطَّط متصل

نوع الدرجة	الدرجة	الرأس
فردية	3	B
زوجية	2	D
فردية	3	C
زوجية	2	A
زوجية	2	E
زوجية	2	F

بما أنه يوجد رأسان فقط، درجة كلٍّ منهما فردية، فإنَّ المُخَطَّط شبه أويلري .

4



المُخَطَّط متصل

نوع الدرجة	الدرجة	الرأس
زوجية	4	V_1
زوجية	2	V_2
زوجية	2	V_3
زوجية	4	V_4
زوجية	2	V_5
زوجية	2	V_6
زوجية	2	V_7
زوجية	2	V_8
زوجية	2	V_9
زوجية	2	V_{10}

بما أنَّ جميع درجات رؤوس المخطَّط زوجية، فإنَّ المخطَّط
أويلري .

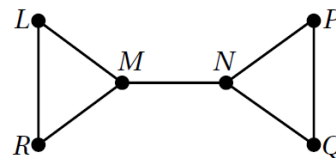
الخطوة 2: أضحّد درجة كل رأس من رؤوس المخطّط، ونوعها .

نوع الدرجة	الدرجة	الرأس
زوجية	2	A
زوجية	4	B
زوجية	4	C
زوجية	2	D
فردية	3	E
زوجية	4	F
فردية	3	G

الخطوة 3: أضحّد نوع المخطط استنادًا إلى درجات الرؤوس .

بما أنّه يوجد رأسان فقط، درجة كلّ منهما فردية، فإنّ المخطط شبه أويلري .

2



الحل:

الخطوة 1: أُحَدِّدْ إِذَا كَانَ الْمُخَطَّطُ مُتَّصِلًا أَمْ لَا .

المُخَطَّط متصل، إذن يُمكن البحث في نوعه

(أويلري، أو شبه أويلري، أو غير ذلك) .

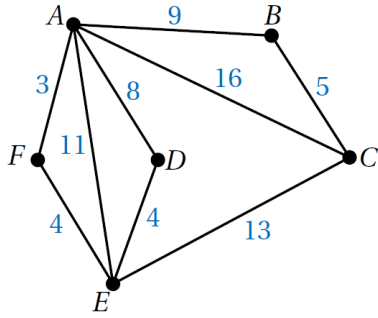
الخطوة 2: أٌحدّد درجة كل رأس من رؤوس المٌخطّط، ونوعها .

نوع الدرجة	الدرجة	الرأس
فردية	3	N
زوجية	2	P
زوجية	2	Q
زوجية	2	R
زوجية	2	L
فردية	3	M

الخطوة 3: أضحّد نوع المخطط استنادًا إلى درجات الرؤوس .

بما أنّه يوجد رأسان فقط، درجة كلّ منهما فردية، فإنّ المخطط شبه أويلري .

(2) أجد طول أقصر مسار أويلري في المخطط الموزون المجاور، يبدأ بالرأس E ، وينتهي به .

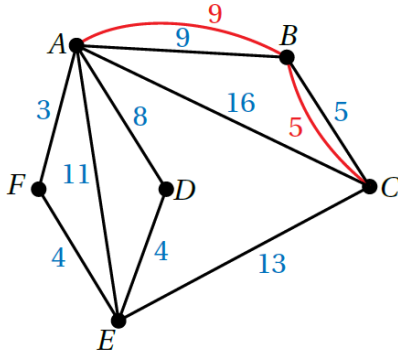


الحل:

ألاحظ من المخطط وجود رأسين فقط، درجة كل منهما فردية؛ ما يعني أن المخطط شبه أويلري .

الخطوة 1: أكرر أطوال حافات أقصر طريق بين الرأسين اللذين درجتهم فردية في المخطط .

الرأسان اللذان درجتهم فردية هما: A و C ، وأقصر طريق يصل بينهما هو: ABC ؛ لذا أكرر حافات هذا الطريق في المخطط كما في الشكل المجاور .



الخطوة 2: أجد الوزن الكلي للمخطط الناتج .

$$3 + 9 + 9 + 5 + 5 + 16 + 13 + 4 + 8 + 11 + 4 = 87$$

إذن، طول أقصر مسار أويلري في المخطط، يبدأ بالرأس E ، وينتهي به، هو: 87 وحدة .

2. إيجاد طول أقصر مسار في مخطط أويلري أو مخطط شبه أويلري .

المسار الأويلري: هو مسار في المخطط يشمل كل حافة في المخطط مرة واحدة على الأقل، ويبدأ بالرأس نفسه الذي ينتهي به .

ما الهدف من استعمال خوارزمية فحص المسار الأويلري ؟ لإيجاد طول أقصر مسار أويلري في مخطط متصل موزون .

☒ إذا كان المخطط أويلريًا، فإن أقصر مسار أويلري فيه

يكون دائرة أويلر، وهو مسار يتضمن جميع حافات

المخطط، ويبدأ بالرأس نفسه الذي ينتهي به

طول أقصر مسار أويلري = الوزن الكلي للمخطط .

☒ إذا كان المخطط شبه أويلري، فإن:

طول أقصر مسار أويلري فيه = الوزن الكلي للمخطط، مضافاً

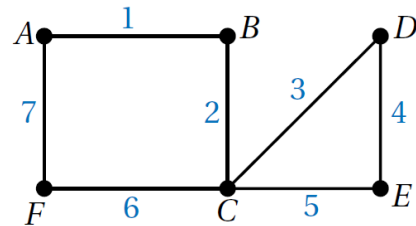
إليه مجموع أطوال حافات أقصر طريق بين الرأسين اللذين

درجتهم فردية

وذلك لضمان البدء بنفس الرأس والانتهاء به .

مثال 2

(1) أجد طول أقصر مسار أويلري في المخطط الموزون المجاور، يبدأ بالرأس F ، وينتهي به .



الحل:

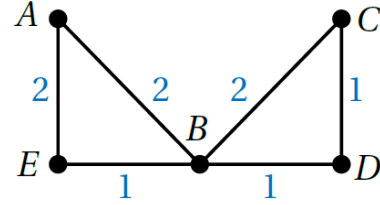
ألاحظ من المخطط أن درجة كل رأس من رؤوسه زوجية؛ ما يعني أن المخطط أويلري. ومنه، فإن طول أقصر مسار أويلري في المخطط يساوي الوزن الكلي للمخطط .

$$7 + 1 + 2 + 6 + 3 + 4 + 5 = 28$$

إذن، طول أقصر مسار أويلري في المخطط، يبدأ بالرأس F ، وينتهي به، هو: 28 وحدة .

مثال 3

(1) أجد طول أقصر مسار أويلري في المخطط الموزون المجاور، يبدأ بالرأس D ، وينتهي به، ويشمل كل حافة من حافته.



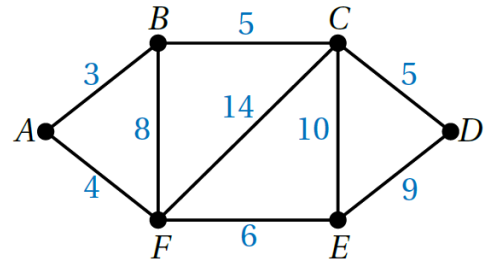
المخطط أويلري. ومنه، فإن طول أقصر مسار أويلري في المخطط يساوي الوزن الكلي للمخطط.

$$2 + 2 + 1 + 2 + 1 + 1 = 9$$

إذن، طول أقصر مسار أويلري في المخطط، يبدأ بالرأس D ، وينتهي به، هو: 9 وحدات.

(2) أجد طول أقصر مسار أويلري في المخطط الموزون

المجاور، يبدأ بالرأس F ، وينتهي به، ويشمل كل حافة من حافته.



ألاحظ من المخطط وجود رأسين فقط، درجة كل منهما فردية؛ ما يعني أن المخطط شبه أويلري.

الخطوة 1: أكرر أطوال حافات أقصر طريق بين الرأسين اللذين درجتهم فردية في المخطط.

الرأسان اللذان درجتهم فردية هما: B و E ، وأقصر طريق يصل بينهما هو: BFE ؛ لذا أكرر حافات هذا الطريق.

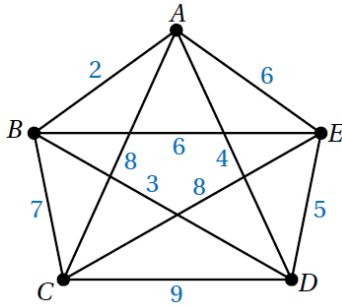
الخطوة 2: أجد الوزن الكلي للمخطط الناتج.

$$3 + 8 + 8 + 4 + 5 + 10 + 14 + 6 + 6 + 5 + 9 = 78$$

إذن، طول أقصر مسار أويلري في المخطط، يبدأ بالرأس E ، وينتهي به، هو: 78 وحدة.

مثال 4: أجد طول أقصر مسار أويلري في المخطط

الموزون المجاور، يبدأ بالرأس A ، وينتهي به.



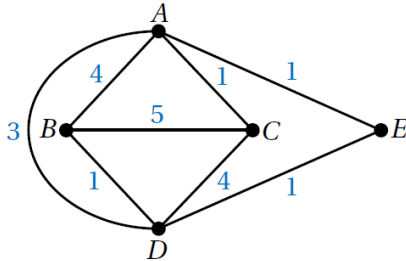
المخطط أويلري (لأن كل رأس درجته زوجية). ومنه، فإن طول أقصر مسار أويلري في المخطط يساوي الوزن الكلي للمخطط.

$$2 + 7 + 9 + 5 + 6 + 6 + 4 + 8 + 3 + 8 = 128$$

إذن، طول أقصر مسار أويلري في المخطط، يبدأ بالرأس D ، وينتهي به، هو: 128 وحدة.

مثال 5: أجد طول أقصر مسار أويلري في المخطط

الموزون المجاور، يبدأ بالرأس B ، وينتهي به.



ألاحظ من المخطط وجود رأسين فقط، درجة كل منهما فردية؛ ما يعني أن المخطط شبه أويلري.

الخطوة 1: أكرر أطوال حافات أقصر طريق بين الرأسين اللذين درجتهم فردية في المخطط.

الرأسان اللذان درجتهم فردية هما: B و C ، وأقصر طريق يصل بينهما هو: BC ؛ لذا أكرر حافات هذا الطريق.

الخطوة 2: أجد الوزن الكلي للمخطط الناتج.

$$3 + 4 + 1 + 1 + 4 + 5 + 5 + 1 + 1 = 27$$

إذن، طول أقصر مسار أويلري في المخطط، يبدأ بالرأس B ، وينتهي به، هو: 27 وحدة.

3. إيجاد طول أقصر مسار أويلري في مُخطّط متصل غير أويلري ولا شبه أويلري .

تعلّمتُ في الأمثلة السابقة استعمال خوارزمية فحص المسار الأويلري لإيجاد طول أقصر مسار أويلري في مُخطّط أويلري أو مُخطّط شبه أويلري . والآن سأتعلم كيف يُمكن إيجاد طول أقصر مسار أويلري في مُخطّط غير أويلري ولا شبه أويلري .

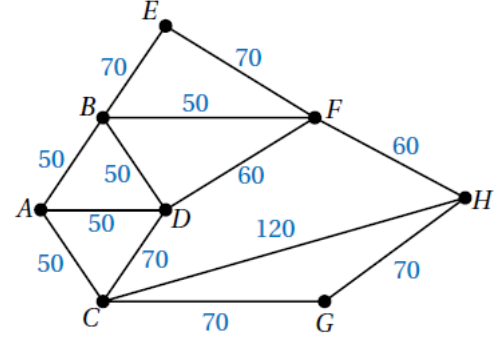
خوارزمية فحص المسار الأويلري للمُخطّطات غير الأويلرية ولا شبه الأويلرية

يُمكن إيجاد طول أقصر مسار أويلري في مُخطّط متصل غير أويلري ولا شبه أويلري باستعمال خوارزمية فحص المسار، وذلك باتّباع الخطوات الآتية :

- (1) تحديد الرؤوس ذات الدرجات الفردية في المُخطّط .
- (2) تحديد الطرائق المختلفة لإضافة حافات بين الرؤوس ذات الدرجات الفردية (حتّى تصبح درجات جميع الرؤوس زوجية) ، ثمّ إيجاد مجموع أوزان الحافات المضافة في كل طريقة .
- (3) اختيار الطريقة التي أُضيفت فيها حافات إلى المُخطّط وزنها أقل ما يُمكن، ثمّ إضافة هذه الحافات إلى المُخطّط .
- (4) إيجاد الوزن الكلي للمُخطّط الناتج الذي يساوي طول أقصر مسار أويلري في المُخطّط .

مثال 6 : طرق : يُبيّن الشكل التالي مُخطّطًا للطرق الرئيسية

بين مجموعة من المدن. وفيه يُمثّل العدد على كل حافة المسافة (بالكيلومتر) بين كل مدينتين. أجد طول أقصر مسار أويلري يبدأ بالمدينة A، وينتهي بها



ألاحظ من المُخطّط وجود رأسين فقط ، درجة كلّ منهما فردية؛ ما يعني أنّ المُخطّط شبه أويلري .

الخطوة 1: أكرّر أطوال حافات أقصر طريق بين الرأسين اللذين درجتهم فردية في المُخطّط .

الرأسان اللذان درجتهم فردية هما : A و H، وأقصر طريق يصل بينهما هو : ACH ؛ لذا أكرّر حافات هذا الطريق .

الخطوة 2: أجد الوزن الكلي للمُخطّط الناتج .

$$70 + 70 + 50 + 50 + 50 + 50 + 50 + 50 + 70 + 60 + 60 + 120 + 120 + 70 + 70 = 270$$

إذن، طول أقصر مسار أويلري في المُخطّط، يبدأ بالرأس A، وينتهي به، هو : 1010 وحدة .

الخطوة 2: أحدد الطرائق المختلفة لإضافة حافات بين الرؤوس

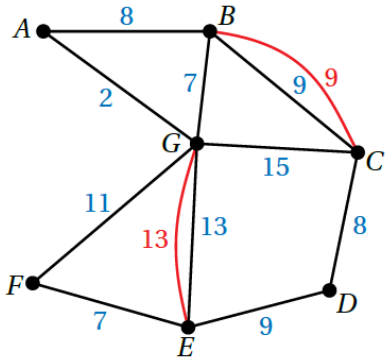
ذات الدرجات الفردية لتصبح جميع الرؤوس ذات درجات زوجية، ثم أجد مجموع أوزان الحافات المضافة في كل طريقة.

مجموع أوزان الحافات المضافة	الحافات المضافة	الطريقة الأولى
$9 + 13 = 22$	BC, GE	الطريقة الأولى
$7 + 17 = 24$	BG, CE	الطريقة الثانية
$20 + 15 = 35$	BE, CG	الطريقة الثالثة

ملحوظة: طول الحافة CE المضافة في الطريقة الثانية يساوي مجموع طولي الحافتين CD و DE بحيث يكون طول المسارين هذين الرأسين أقصر ما يمكن، وطول الحافة BE المضافة في الطريقة الثالثة يساوي مجموع طولي الحافتين GE و BG .

الخطوة 3: أختار الطريقة التي أضيفت فيها حافات إلى المخطط وزنها أقل ما يمكن، ثم أضيف هذه الحافات إلى المخطط.

الطريقة التي أضيفت فيها حافات إلى المخطط وزنها أقل ما يمكن هي الطريقة الأولى؛ لذا أكرر حافات هذه الطريقة في المخطط كما في الشكل المجاور.



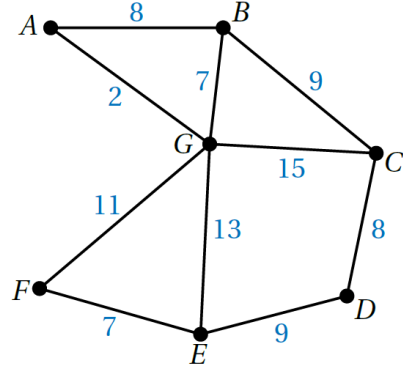
الخطوة 4: أجد الوزن الكلي للمخطط الناتج.

$$8 + 9 + 9 + 8 + 9 + 7 + 11 + 2 + 7 + 15 + 13 + 13 = 111$$

إذن، أقل طول من الخرطوم يلزم لتنظيف جميع الأنابيب الكبيرة في المزرعة هو: 111 m

مثال 1: أنابيب ري: يبين الشكل المجاور مخططاً لأنابيب

كبيرة تصل بين النقاط الرئيسية في إحدى المزارع. وفيه يمثل العدد على كل حافة طول الأنبوب (بالمتر) بين كل نقطتين. يُراد تنظيف الأنابيب من الداخل بآلة تحوي خرطومًا رفيعًا مرناً في مقدّمته أداة لضخ الماء بضغط عالٍ في اتجاه الجدران الداخلية للأنابيب الكبيرة لتنظيفها من الداخل. إذا علمت أنه يمكن إدخال الخرطوم في النقطة B وإخراجه منها فقط، فأجد أقل طول من الخرطوم يلزم لتنظيف جميع الأنابيب الكبيرة في المزرعة.



الحل:

بما أنه لا يمكن إدخال الخرطوم إلا في الرأس B وإخراجه من هذا الرأس فقط، وبما أنه يجب تنظيف جميع الأنابيب؛ فإنه يمكن استعمال خوارزمية فحص المسار الأويلري لإيجاد أقصر طول لازم من الخرطوم (أقصر مسار يحوي جميع حافات المخطط).

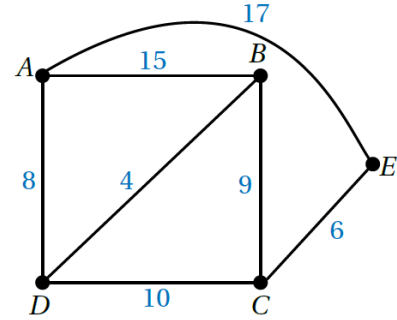
ألاحظ من المخطط وجود أكثر من رأسين، درجة كل منها فردية؛ ما يعني أن المخطط ليس أويلرياً ولا شبه أويلري.

الخطوة 1: أحدد الرؤوس ذات الدرجات الفردية في المخطط.

الرؤوس ذات الدرجات الفردية في المخطط هي: B, C, E, G

مثال 2 : طرق: يُبيّن الشكل المجاور مُخطّطًا للطرق

الرئيسية بين مجموعة من المناطق. وفيه يُمثّل العدد على كل حافة المسافة (بالكيلومتر) بين كل منطقتين. أجد طول أقصر مسار يبدأ بالمنطقة A، وينتهي بها، ويشمل كل حافة في المُخطّط.



الحل:

ألاحظ من المُخطّط وجود أكثر من رأسين، درجة كلّ منها فردية؛ ما يعني أنّ المُخطّط ليس أويلريًا ولا شبه أويلري.

الخطوة 1: أحدّد الرؤوس ذات الدرجات الفردية في المُخطّط.

الرؤوس ذات الدرجات الفردية في المُخطّط هي: A, B, C, D.

الخطوة 2: أحدّد الطرائق المختلفة لإضافة حافات بين الرؤوس

ذات الدرجات الفردية لتصبح جميع الرؤوس ذات درجات زوجية، ثمّ أجد مجموع أوزان الحافات المضافة في كل طريقة.

مجموع أوزان الحافات المضافة	الحافات المضافة	
الطريقة الأولى	AB, DC	$15 + 10 = 25$
الطريقة الثانية	AD, BC	$8 + 9 = 17$
الطريقة الثالثة	AC, BD	$18 + 4 = 22$

الخطوة 3: أختار الطريقة التي أضيفت فيها حافات إلى

المُخطّط وزنها أقل ما يُمكن، ثمّ أضيف هذه الحافات إلى المُخطّط.

الطريقة التي أضيفت فيها حافات إلى المُخطّط وزنها أقل ما يُمكن هي الطريقة الثانية؛ لذا أكرّر حافات هذه الطريقة في المُخطّط

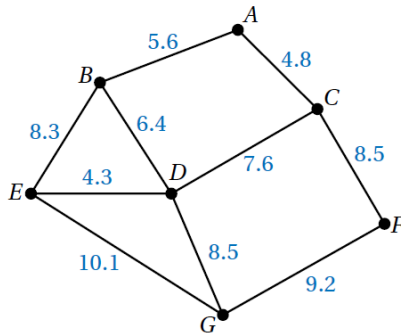
الخطوة 4: أجد الوزن الكلي للمُخطّط الناتج.

$$8 + 8 + 4 + 4 + 9 + 15 + 10 + 17 + 6 = 86$$

إذن: 86 km

مثال 3 : أنفاق: يُبيّن الشكل المجاور مُخطّطًا لأنفاق

تصريف مياه الأمطار في إحدى المدن. وفيه يُمثّل العدد على كل حافة طول النفق بالكيلومتر. إذا علمت أنّ الفريق الهندسي المسؤول عن صيانة الأنفاق يرغب في فحصها قبل حلول فصل الشتاء للتحقق من عدم انسدادها، وأنّه يتعيّن على الفريق المرور بكل نفق مرّة واحدة على الأقل، وأنّه سيبدأ مهمته من الرأس A، وينتهي به؛ فأجد طول أقصر مسار يُمكن أن يمرّ به الفريق لإنجاز مهمته.



الحل:

ألاحظ من المُخطّط وجود أكثر من رأسين، درجة كلّ منها فردية؛ ما يعني أنّ المُخطّط ليس أويلريًا ولا شبه أويلري.

الرؤوس ذات الدرجات الفردية في المُخطّط هي: B, C, E, G.

مجموع أوزان الحافات المضافة	الحافات المضافة	
الطريقة الأولى	BE, CG	$8.3 + 16.1 = 24.4$
الطريقة الثانية	EG, BC	$10.1 + 10.4 = 20.5$

الطريقة التي أضيفت فيها حافات إلى المُخطّط وزنها أقل ما يُمكن هي الطريقة الثانية؛ لذا أكرّر حافات هذه الطريقة في المُخطّط

أجد الوزن الكلي للمُخطّط الناتج.

$$8.3 + 5.6 + 5.6 + 4.8 + 4.8 + 8.5 + 9.2 + 10.1 + 10.1 + 4.3 + 6.4 + 7.6 + 8.5 = 93.8$$

(2) هل المخطط أويلري، أو شبه أويلري، أو غير

ذلك؟ أبرر إجابتي .

إرشاد: أستعين بالمصفوفة لكتابة مجموعة درجات رؤوس

المخطط

الحل:

من مجاميع الصفوف (درجات الرؤوس)

$$\deg A = 3, \deg B = 3, \deg C = 2$$

$$\deg D = 2, \deg E = 4$$

المخطط متصل وفيه رأسان فرديا الدرجة فقط $(A, B) \Rightarrow$

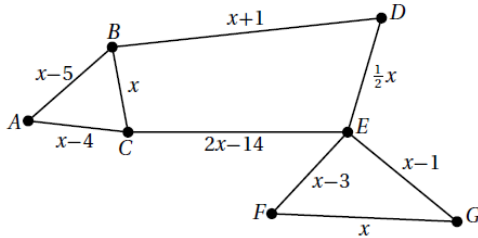
اذن المخطط شبه أويلري (يملك مسار أويلري يبدأ بأحد A, B وينتهي بالآخر) وليس أويلريًا مغلقًا .

مثال 6: تحدّد: يبيّن الشكل التالي مخططًا موزونًا يمثّل

المسافات بين مجموعة من المناطق بالكيلومتر. إذا كان

طول أقصر مسار في المخطط باستعمال خوارزمية فحص

المسار هو 100 km ، فأجد قيمة الثابت الحقيقي x .



مهارات التفكير العليا

مثال 4: اكتشف الخطأ: قالت سلمى: إن أي مخطط

كامل K_n ، حيث: $n > 2$ ، هو مخطط أويلري .

اكتشف الخطأ في قول سلمى، ثم أصحّحه .

الحل:

الخطأ: التعميم غير صحيح .

في K_n درجة كل رأس هي: $n - 1$ ليكون المخطط أويلريًا

(يملك دورة أويلر) يجب أن تكون درجات جميع الرؤوس زوجية .

• إذا كان n فرديًا فإن: $n - 1$ زوجي لكل الرؤوس .

اذن K_n أويلري .

• إذا كان n زوجيًا فإن: $n - 1$ فردي لكل الرؤوس

اذن K_n ليس أويلريًا ولا حتى شبه أويلري لأنه

ليس فيه رأسان فقط بدرجة فردية بل جميع

الرؤوس .

إذا التصحيح K_n يكون أويلريًا فقط عندما يكون n فرديًا

وليس لكل $n > 2$.

مثال 5: تبرير: أتأمل مصفوفة الجوار المجاورة التي تمثّل

مخططًا غير موزون، ثم أجيب عن السؤالين الآتيين تبعًا

من دون رسم المخطط :

	A	B	C	D	E
A	0	1	0	1	1
B	1	0	1	0	1
C	0	1	0	0	1
D	1	0	0	0	1
E	1	1	1	1	0

(1) هل المخطط متصل؟ أبرر إجابتي .

نعم، المخطط متصل؛ فالمصفوفة تظهر أن E متصل بكل

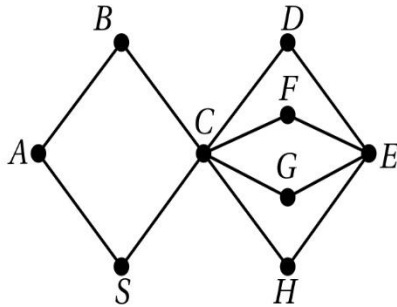
من A, B, C, D (عمود / صف E كلّ 1 عدا القطر) ،

وبالتالي توجد مسارات بين أي زوج من الرؤوس .

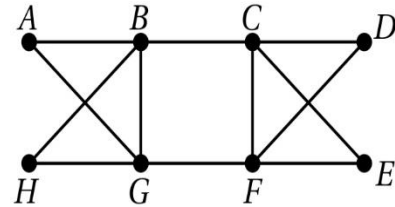
[illegible]

أتأمل كل مُخطَّط ممَّا يأتي، ثمَّ أُحدِّد إذا كان أويلريًّا، أو شبه أويلري، أو غير ذلك.

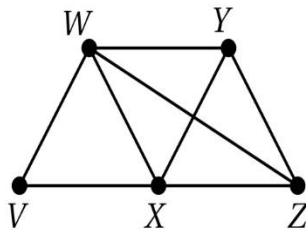
1



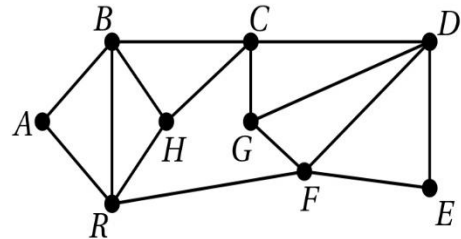
2



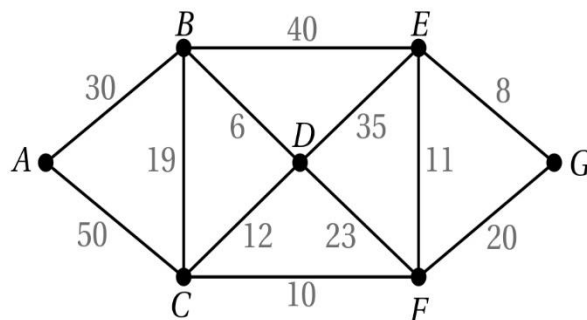
3

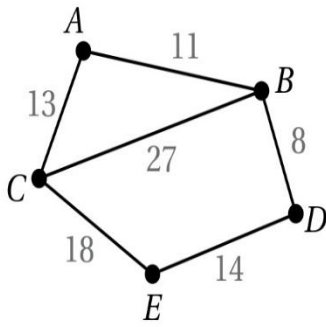


4



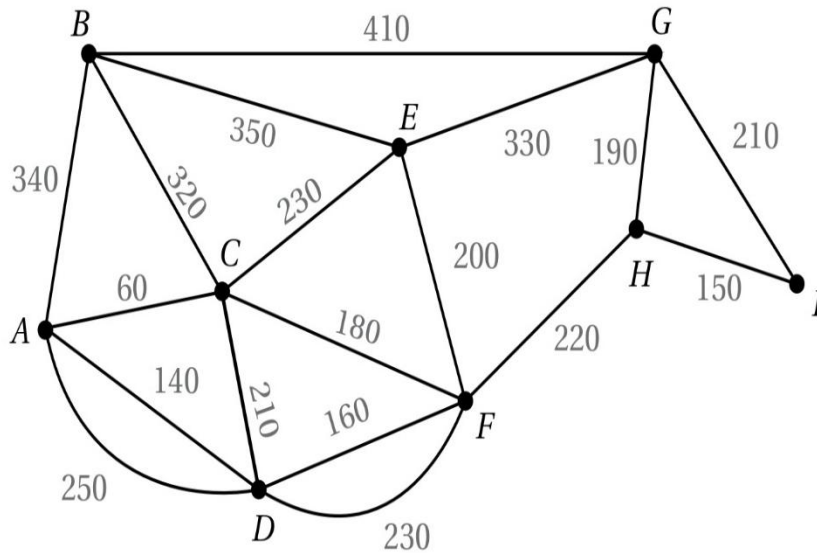
5 أجد طول أقصر مسار أويلري في المُخطَّط الموزون الآتي، يبدأ بالرأس G، وينتهي به.





6 أجد طول أقصر مسار أويلري في المخطط الموزون المجاور، يبدأ بالرأس C ، وينتهي به.

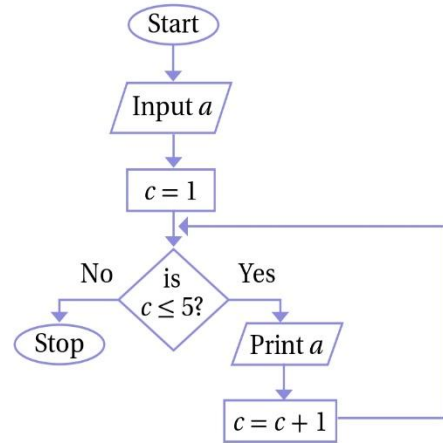
7 حدائق: يُبين الشكل التالي مخططاً للمسارات في إحدى الحدائق العامة. وفيه يُمثل العدد على كل حافة طول المسار بالمتري. تريد المهندسة الزراعية في الحديقة أن تسير على كل مسار فيها مرة واحدة على الأقل يومياً، بدءاً بالنقطة A ، وانتهاءً بها؛ لتفقد المزروعات. أجد طول أقصر مسار أويلري يُمكن أن تمرّ به المهندسة لإنجاز مهمتها.



اختبار نهاية الوحدة

أختار رمز الإجابة الصحيحة في كل مما يأتي:

1 إحدى التالية تُمثل وصفاً لمُخرجات الخوارزمية الآتية:



(a) الأعداد من 1 إلى 5

(b) العدد a مُكرَّرًا 5 مرّات.

(c) الأعداد من 1 إلى 4

(d) العدد a مُكرَّرًا 4 مرّات.

2 يُراد تعبئة العُلب (المُعطى ارتفاعاتها في ما يلي) في صناديق، ارتفاع كل منها 19 وحدة طول. إذا علِمْتُ أنَّ للعلب والصناديق المقطع العرضي نفسه، فإنَّ عدد الصناديق اللازمة لتعبئة العُلب باستعمال خوارزمية الملاءمة الأولى هو:

11 2 15 5 6 17 7 12

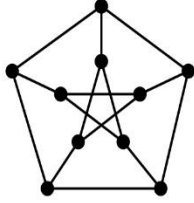
(a) 3

(b) 4

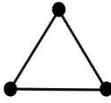
(c) 5

(d) 6

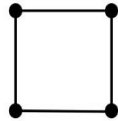
3 الذي يُمثل مُخطَّطًا جزئيًّا من المُخطَّط المجاور هو:



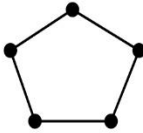
a)



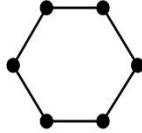
b)



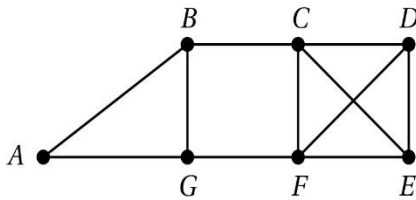
c)



d)



4 الذي يُمثل مرًّا في المُخطَّط الآتي هو:



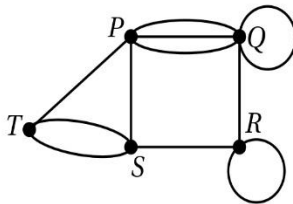
a) ABCDCB

b) ABCDFCB

c) ABCFGA

d) ABCDECB

5 مجموع درجات رؤوس المُخطَّط الآتي يساوي:



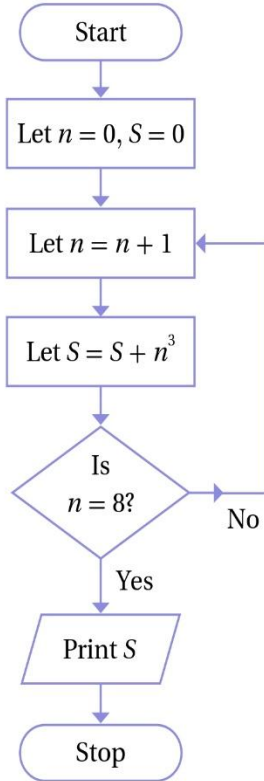
a) 18

b) 20

c) 22

d) 24

اختبار نهاية الوحدة



أَتأمل الخوارزمية المجاورة
المُمَثَّلَة بِمُخَطَّط سَيْرِ
العمليات، ثُمَّ أَجيب عن كُلِّ
مِمَّا يَأْتِي:

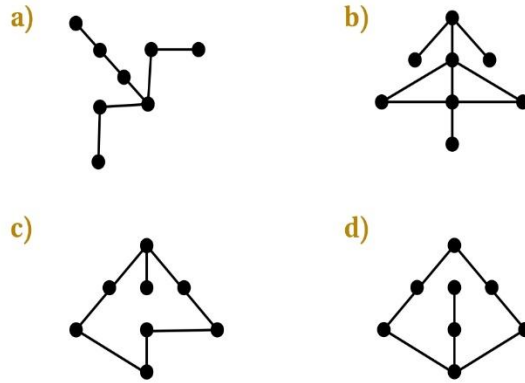
9 أَطَبِّق الخوارزمية
بِاسْتِعْمَالِ جَدُول التَّبَعِ
لِإِيجَادِ مُخْرَجِهَا.

10 أَصِف مُخْرَجَ
الخوارزمية.

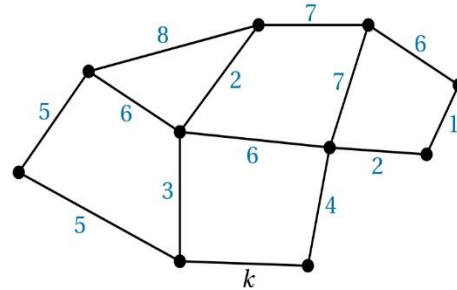
11 أَطَبِّق الخوارزمية الآتية بِاسْتِعْمَالِ جَدُول التَّبَعِ لِإِيجَادِ
مُخْرَجَاتِهَا عِنْدَمَا $P = 400$, $R = 5$, $T = 3$.

1. Input P, R, T
2. Let $A = P, K = 0$
3. Let $K = K + 1$
4. Let $I = (A \times R) / 100$
5. Let $A = A + I$
6. If $K < T$, go to step 3
7. Let $M = A / (12 \times T)$
8. Print M
9. Stop

6 الذي يُمَثِّل شَجَرَة فِي مَا يَأْتِي هُوَ:

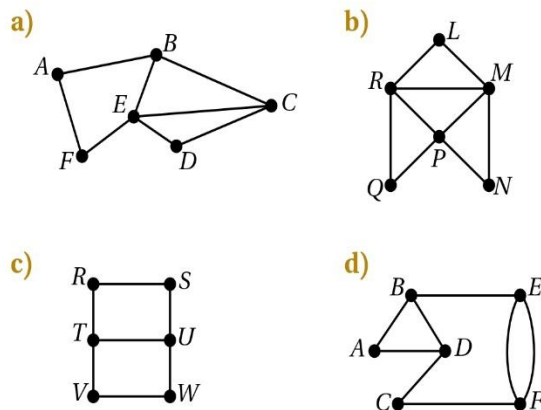


7 إذا كَانَ وَزْن أَصْغَر شَجَرَة شَامِلَة لِلْمُخَطَّطِ الْآتِي،
تَمَرُّ بِالْحَافَةِ الَّتِي وَزْنُهَا k ، هُوَ 33، فَإِنَّ قِيَمَةَ الثَّابِتِ k
تَسَاوِي:



- a) 1 b) 2 c) 4 d) 5

8 الْمُخَطَّطُ الْأَوَّلِيُّ مِنَ الْمُخَطَّطَاتِ الْآتِيَةِ هُوَ:



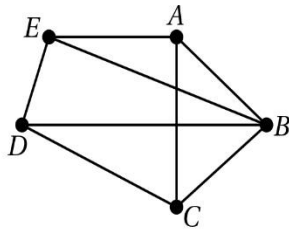
اختبار نهاية الوحدة

17 أستمعل خوارزمية الملاءمة الأولى المتناقصة لتعبئة العُلب في الصناديق، ثمَّ أحدد عدد الصناديق اللازمة لذلك، ثمَّ أجد مقدار الارتفاع المهدور من الصناديق جميعها.

18 أستمعل خوارزمية الصندوق الكامل لتعبئة العُلب في الصناديق، ثمَّ أحدد عدد الصناديق اللازمة لذلك، ثمَّ أجد مقدار الارتفاع المهدور من الصناديق جميعها.

19 أيُّ الخوارزميات توصَّلتُ بها إلى الحلِّ الأمثل؟ أبرِّر إجابتي.

أنأمل المخطط الآتي، ثمَّ أجيب عن كلِّ ممَّا يلي:



20 أحدد مجموعة الرؤوس ومجموعة الحافات.

21 أحدد درجة كل رأس، ونوعها.

22 أحدد مجموعة الدرجات للمخطط.

23 أرسم مخططين جزئيين من المخطط.

24 أحدد من المخطط ممشًى لا يُمثِّل ممراً، وممراً لا يُمثِّل

طريقاً، وطريقاً، ودائرة، ودائرة هاملتون تبدأ بالرأس A، ودائرة أويلر (إن وجدت).

25 هل المخطط متصل؟ أبرِّر إجابتي.

26 هل المخطط بسيط؟ أبرِّر إجابتي.

شحن: في ما يأتي كتل 10 صناديق (بالكيلوغرام) يُراد نقلها في شاحنات، ويُمكن لكلِّ منها أن تحمل كتلة إجمالية أقصاها 300 kg:

175 135 210 105 100 150 60 20 70 125

12 أحدد كيف تُوزَّع الصناديق على الشاحنات باستعمال خوارزمية الملاءمة الأولى، ثمَّ أحدد عدد الشاحنات اللازمة لذلك باستعمال هذه الخوارزمية.

13 أحدد كيف تُوزَّع الصناديق على الشاحنات باستعمال خوارزمية الملاءمة الأولى المتناقصة، ثمَّ أحدد عدد الشاحنات اللازمة لذلك باستعمال هذه الخوارزمية.

14 أحدد كيف تُوزَّع الصناديق على الشاحنات باستعمال خوارزمية الصندوق الكامل، ثمَّ أحدد عدد الشاحنات اللازمة لذلك باستعمال هذه الخوارزمية.

15 أيُّ الخوارزميات توصَّلتُ بها إلى الحلِّ الأمثل؟ أبرِّر إجابتي.

يُراد تعبئة العُلب (المُعطى ارتفاعاتها في ما يلي) في صناديق، ارتفاع كلِّ منها 5 وحدات طول. إذا علمتُ أنَّ للعُلب والصناديق المقطع العرضي نفسه، فأجيب عن الأسئلة التالية تباعاً:

2.6 0.8 2.1 1.2 0.9 1.7 2.3 0.3 1.8 2.7

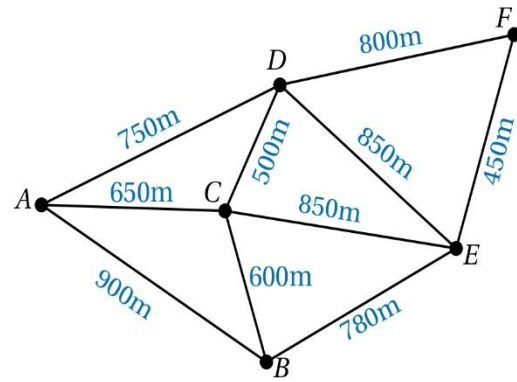
16 أستمعل خوارزمية الملاءمة الأولى لتعبئة العُلب في الصناديق، ثمَّ أحدد عدد الصناديق اللازمة لذلك، ثمَّ أجد مقدار الارتفاع المهدور من الصناديق جميعها.

اختبار نهاية الوحدة

27 أرسم شجرتين للمُخطَّط.

28 أرسم شجرتين شاملتين للمُخطَّط.

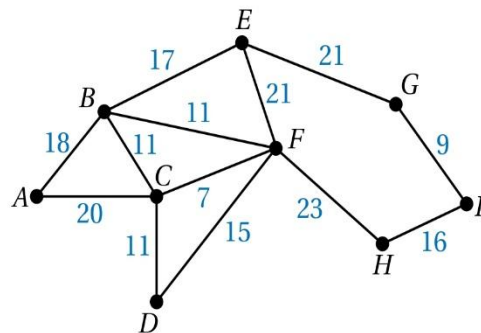
يُبيِّن الشكل الآتي مُخطَّطاً لـ 6 منازل في إحدى القرى. وفيه يُمثِّل العدد على كل حافة المسافة (بالمتر) بين كل منزلين:



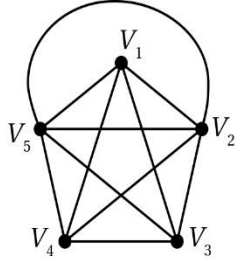
29 أجد طول المسار المباشر بين المنزل E والمنزل D.

30 أجد طول أقصر مسار بين المنزل B والمنزل D، والمسار الذي اتخذه لذلك.

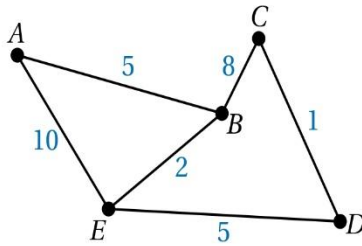
31 يُبيِّن المُخطَّط الموزون التالي أطوال الطرق التي تصل بين مجموعة من المناطق في إحدى المدن بالكيلومتر. أستعمل خوارزمية برايم لإيجاد أصغر شجرة شاملة للمُخطَّط، ثم أكتب الحافات التي أُضيفت إلى الشجرة بالترتيب.



32 أمثِّل المُخطَّط الآتي بمصفوفة الجوار.



33 أمثِّل المُخطَّط الآتي بمصفوفة الوزن.



34 يُبيِّن المُخطَّط الموزون التالي أطوال الطرق التي تصل بين مجموعة من المناطق في إحدى المدن بالكيلومتر. أجد طول أقصر مسار أوليري يبدأ بالمنطقة A، وينتهي بها.

