الدرس الأول : الخوارزميات

Algorithm

1. الخوارزميات المكتوبة بالكلمات

الخوارزمية : هي مجموعة من التعليمات أو الخطوات المُنظَّمة التي تُحدِّد كيفية حلِّ مشكلة مُعيَّنة .

أمثلة على الخوارزميات :

(1) ضرب عددين يتكوَّن كلٌّ منهما من منزلتين

(2) جمع كسرين غير مُتشابِهين

(3) إيجاد الوسيط لمجموعة من البيانات.

طرائق كتابة الخوارزمية :

طريقة الكلمات (وهي وصف للخوارزمية بجمل (خطوات) مُتسلسِلة من دون استعمال أيِّ رموز في هذه الجمل) .

مثال 1 : تُستعمَل الخوارزمية الآتية لتحديد إذا كان العدد يقبل القسمة على 11 أم لا :

1. أجمع الأرقام التي في المواضع الفردية من العدد.
2. أجمع الأرقام التي في المواضع الزوجية من العدد.
3. أجد الفرق المُطلَق بين المجموعين في الخطوتين السابقتين.
4. إذا كان الفرق المُطلَق 0 أو يقبل القسمة على 11 ، فإنَّ العدد يقبل القسمة على 11 ، وإلّا فإنَّه لا يقبل القسمة على 11

أُطبِّق الخوارزمية السابقة لبيان إذا كان كل عدد ممّا يأتي يقبل القسمة على 11 أم لا :

(1) 86416

الحل:

1. $6 + 4 + 8 = 18$
2. $1 + 6 = 7$
3. $18 - 7 = 11$

يقبل العدد 86416 القسمة على 11 ؛ لأنَّ العدد 11 (الفرق المُطلَق بين المجموعين) يقبل القسمة على 11

(2) 78532

الحل:

1. $2 + 5 + 7 = 14$
2. $3 + 8 = 11$
3. $14 - 11 = 3$

العدد 78532 لا يقبل القسمة على 11 ؛ لأنَّ العدد 3 (الفرق المُطلَق بين المجموعين) لا يقبل القسمة على 11

---

(3) 9768

الحل:

1. $8 + 7 = 15$
2. $6 + 9 = 15$
3. $15 - 15 = 0$

يقبل العدد 9768 القسمة على 11 ؛ لأنَّ (الفرق المُطلَق بين المجموعين) هو العدد 0

---

(4) 734852

الحل:

1. $2 + 8 + 3 = 13$
2. $5 + 4 + 7 = 16$
3. $16 - 13 = 3$

العدد 734852 لا يقبل القسمة على 11 ؛ لأنَّ العدد 3 (الفرق المُطلَق بين المجموعين) لا يقبل القسمة على 11

مثال 2 : تُستعمَل الخوارزمية الآتية لتحديد إذا كان العدد يقبل القسمة على 12 أم لا :

1. أجمع أرقام العدد.
2. إذا كان المجموع في الخطوة الأولى يقبل القسمة على 3 ، فإنَّني أنتقل إلى الخطوة الثالثة، وإلّا فإنَّ العدد لا يقبل القسمة على 12
3. إذا كان العدد المُكوَّن من أوَّل رقمين في العدد (آحاد العدد وعشراته) يقبل القسمة على 4 ، فإنَّ العدد يقبل القسمة على 12 ، وإلّا فإنَّه لا يقبل القسمة على 12

أُطبِّق الخوارزمية السابقة لبيان إذا كان كل عدد ممّا يأتي يقبل القسمة على 12 أم لا :

(1) 7104

الحـــــل:

1. $7 + 1 + 0 + 4 = 12$

2. العدد 12 يقبل القسمة على 3 . إذن نكمل الى الخطوة الثالثة

3. يقبل العدد 7104 القسمة على 12 ؛ لأنَّ العدد 04 يقبل القسمة على 4

(2) 3248940

الحـــــل:

$3 + 2 + 4 + 8 + 9 + 4 + 0 = 30$

العدد 30 يقبل القسمة على 3 . إذن نكمل الى الخطوة الثالثة

العدد 3248940 يقبل القسمة على 12 . لأن العدد 40 يقبل القسمة على 4 .

---

(3) 5762

الحـــــل:

$5 + 7 + 6 + 2 = 20$

العدد 20 لا يقبل القسمة على 3 . إذن تتوقف والحكم هو أن العدد 5762 لا يقبل القسمة على 12

---

(4) 81456

الحـــــل:

$8 + 1 + 4 + 5 + 6 = 24$

العدد 24 يقبل القسمة على 3 . إذن نكمل الى الخطوة الثالثة يقبل العدد 81456 القسمة على 12 ؛ لأنَّ العدد 56 يقبل القسمة على 4

مثال 3 : تُستعمَل الخوارزمية الآتية لتحديد إذا كان العدد الكلي سعيداً أم لا :

1. أجد مُربَّعات أرقام العدد.
2. أجد مجموع مُربَّعات أرقام العدد.
3. أضع مجموع مُربَّعات أرقام العدد بدلًا من العدد نفسه.
4. أستمِرُّ في تكرار الخطوة الأولى والخطوة الثانية لكل ناتج حتّى أحصل على مجموع من منزلة واحدة؛ فإذا كان هذا المجموع 1، كان العدد سعيدًا في هذه الحالة، وإذا كان هذا المجموع 4، فيكون العدد وقتئِذ غيرسعيد.

أُطبِّق الخوارزمية السابقة لبيان إذا كان كل عدد ممّا يأتي سعيدًا أم لا :

(1) 19

المرحلة الأولى : $1^2 + 9^2 = 1 + 81 = 82$

المرحلة الثانية : $8^2 + 2^2 = 64 + 4 = 68$

المرحلة الثالثة : $6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$

المرحلة الرابعة : $1^2 + 0^2 + 0^2 = 1 + 0 + 0 = 1$

النتيجة: العدد 19 سعيد ✅

---

(2) 42

المرحلة الأولى : $4^2 + 2^2 = 16 + 4 = 20$

المرحلة الثانية : $2^2 + 0^2 = 4 + 0 = 4$

النتيجة: العدد 42 غيرسعيد ❌

---

(3) 49

المرحلة الأولى : $4^2 + 9^2 = 16 + 81 = 97$

المرحلة الثانية : $9^2 + 7^2 = 81 + 49 = 130$

المرحلة الثالثة : $1^2 + 3^2 + 0^2 = 1 + 9 + 0 = 10$

المرحلة الرابعة : $1^2 + 0^2 = 1 + 0 = 1$

النتيجة: العدد 49 سعيد ✅

---

(4) 25

المرحلة الأولى : $2^2 + 5^2 = 4 + 25 = 29$

المرحلة الثانية : $2^2 + 9^2 = 4 + 81 = 85$

المرحلة الثالثة : $8^2 + 5^2 = 64 + 25 = 89$

المرحلة الرابعة : $8^2 + 9^2 = 64 + 81 = 145$

المرحلة الخامسة : $1^2 + 4^2 + 5^2 = 1 + 16 + 25 = 42$

المرحلة السادسة : $4^2 + 2^2 = 16 + 4 = 20$

المرحلة السابعة : $2^2 + 0^2 = 4 + 0 = 4$

النتيجة: العدد 25 غيرسعيد ❌

2. الخوارزميات المكتوبة بطريقة شبه رمزية

تُكتَب الخوارزمية أيضًا باستعمال الطريقة شبه الرمزية ، وفيها توصَف الخوارزمية بخطوات مُتسلسِلة مُرقَّمة تتضمَّن العديد من الرموز. غيرأنَّ تتبُّع الخوارزمية المكتوبة بهذه الطريقة يكون صعبًا في بعض الأحيان، ويحتاج إلى تنظيم؛ لذا يُمكِن استعمال جدول التتبُّع لتدوين القيمة الناتجة من كل خطوة أثناء تطبيق الخوارزمية .

مثال 1 : أتأمَّل الخوارزمية الآتية المكتوبة بالطريقة شبه الرمزية ، ثمَّ أُجيب عن كلٍّ ممّا يأتي :

1. Let $n = 1, A = 1$
2. Print A
3. Let $B = A + 2$
4. Print B
5. Let $n = n + 1, A = B$
6. If $n < 4$, go to step 3
7. If $n = 4$, Stop

(1) أُطبِّق الخوارزمية باستعمال جدول التتبُّع لإيجاد مُخرَجاتها .

step	n	A	B	Print
1	1	1		
2				1
3			3	
4				3
5	2	3		
6→3			5	
4				5
5	3	5		
6→3			7	
4				7
5	4	7		
6→7	Stop			

مُخرَجات الخوارزمية هي : 7 , 5 , 3 , 1

(2) أصف مخرجات الخوارزمية .

تُمثِّل مُخرَجات الخوارزمية الأعداد الفردية الموجبة التي تقلُّ عن العدد 9 .

مثال 2 : أتأمَّل الخوارزمية الآتية المكتوبة بالطريقة شبه الرمزية ، ثمَّ أُجيب عن كلٍّ ممّا يأتي :

1. Let $n = 1, A=1, B=n+A$
2. Print B
3. Let $C = B + 2$
4. Print C
5. Let $n = n + 1, B = C$
6. If $n < 5$, go to step 3
7. If $n = 5$, Stop

(1) أُطبِّق الخوارزمية باستعمال جدول التتبُّع لإيجاد مُخرَجاتها .

Step	n	A	B	C	Print
1	1	1	2		
2					2
3				4	
4					4
5	2		4		
6→3				6	
4					6
5	3		6		
6→7	Stop				

مُخرَجات الخوارزمية هي : 6 , 4 , 2

---

(2) أصف مخرجات الخوارزمية .

تُمثِّل مُخرَجات الخوارزمية الأعداد الزوجية الموجبة التي تقلُّ عن العدد 5 .

مثال 3 : أتأمَّل الخوارزمية الآتية المكتوبة بالطريقة شبه الرمزية ، ثمَّ أُجيب عن كلٍّ ممّا يأتي :

1. Let $n = 0, x = 0, y = 1$
2. Let $x = x + 1, y = yx$
3. Print y
4. Let $n = n + 1$
5. If $n < 4$, go to step 2
6. If $n = 4$, Stop

(1) أُطبِّق الخوارزمية باستعمال جدول التتبُّع لإيجاد مُخرَجاتها .

Step	n	x	y	Print
1	0	0	1	
2		1	1	
3				1
4	1			
$5 \to 2$		2	2	
3				2
4	2			
$5 \to 2$		3	6	
3				6
4	3			
$5 \to 2$		4	24	
3				24
4	4			
$5 \to 6$	Stop			

مُخرَجات الخوارزمية هي : 1 , 2 , 6 , 24

(2) أصف مخرجات الخوارزمية .

3. الخوارزميات الممثلة بمخططات سير العمليات .

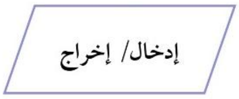
يُمكِن أيضًا تمثيل الخوارزمية باستعمال مُخطَّط سَيْر العمليات وهو مُخطَّط يتكوَّن من أشكال هندسية مُرتبِطة بأسهم وخطوط تَصِف خطوات الخوارزمية وسَيْر العمليات فيها .

بوجه عام، تُستعمَل الأشكال (الصناديق) الآتية للدلالة على خطوات مُحدَّدة في الخوارزمية :

1. صندوق القرار

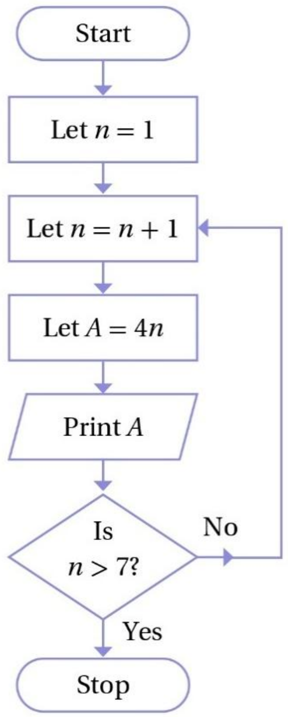
2. صندوق التعليمات

3. صندوق إدخال أو إخراج



4. صندوق البداية أو النهاية

مثال 1 : أتأمَّل الخوارزمية الآتية المُمثَّلة بمُخطَّط سَيْر العمليات، ثمَّ أُجيب عن كلٍّ ممّا يأتي :



(1) أُطبِّق الخوارزمية باستعمال جدول التتبُّع لإيجاد مُخرَجاتها .

n	A	Print A	Is $n > 7$?
1			
2	8	8	No
3	12	12	no
4	16	16	no
5	20	20	no
6	24	24	no
7	28	28	no
8	32	32	yes

مُخرَجات الخوارزمية هي :

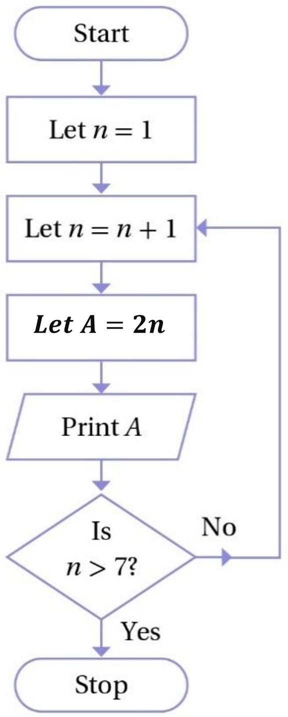
8 , 12 , 16 , 20 , 24 , 28 , 32

---

(2) أصف مخرجات الخوارزمية .

تُمثِّل مُخرَجات الخوارزمية مضاعفات العدد 4 ، التي تزيد على أو تساوي 8 ، و تقل عن 36 .

مثال 2 : أتأمَّل الخوارزمية الآتية المُمثَّلة بمُخطَّط سَيْر العمليات، ثمَّ أُجيب عن كلٍّ ممّا يأتي :



(1) أُطبِّق الخوارزمية باستعمال جدول التتبُّع لإيجاد مُخرَجاتها .

n	A	Print A	Is $n > 7$?
1			
2	4	4	No
3	6	6	no
4	8	8	no
5	10	10	no
6	12	12	no
7	14	14	no
8	16	16	yes

مُخرَجات الخوارزمية هي :

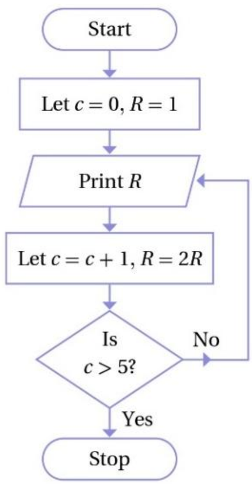
4 , 6 , 8 , 10 , 12 , 14 , 16

---

(2) أصف مخرجات الخوارزمية .

تُمثِّل مُخرَجات الخوارزمية مضاعفات العدد 2 ، التي تزيد على أو تساوي 4 ، و تقل عن 18 .

مثال 3 : أتأمّل الخوارزمية الآتية المُمثّلة بمُخطّط سَيْر العمليات، ثمَّ أُجيب عن كلٍّ ممّا يأتي :



(1) أُطبِّق الخوارزمية باستعمال جدول التتبُّع لإيجاد مُخرَجاتها .

c	R	Print R	Is $c > 5$?
0	1		
		1	
1	2		No
		2	
2	4		No
		4	
3	8		No
		8	
4	16		No
		16	
5	32		No
		32	
6	64		Yes
Stop			

مُخرَجات الخوارزمية هي :

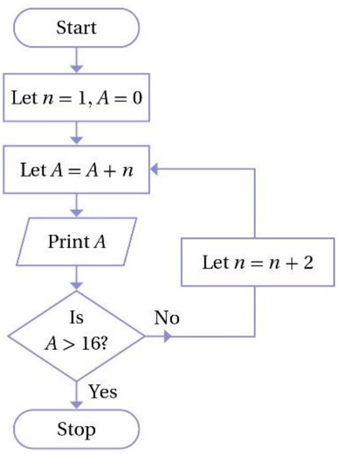
1 , 2 , 4 , 8 , 16 , 32

---

(2) أصف مخرجات الخوارزمية .

تُمثِّل مُخرَجات الخوارزمية تعويض قيمة x بـ 0 و 1 و 2 و .. إلخ في الاقتران الآتي : $f(x) = 2^x$

مثال 4 : أتأمّل الخوارزمية الآتية المُمثّلة بمُخطّط سَيْر العمليات، ثمَّ أُجيب عن كلٍّ ممّا يأتي :



(1) أُطبِّق الخوارزمية باستعمال جدول التتبُّع لإيجاد مُخرَجاتها .

n	A	A = A + n	Print	Is $A > 16$?
0	1	1	1	No
2		3	3	No
4		7	7	No
6		13	13	No
8		21	21	Yes
Stop				

مُخرَجات الخوارزمية هي :

1 , 3 , 7 , 13 , 21

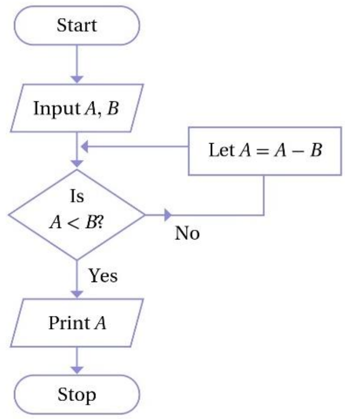
---

(2) أصف مخرجات الخوارزمية .

المخرجات: 1 , 3 , 7 , 13 , 21 . القاعدة:

$$a_n = n^2 - n + 1$$

مثال 5 : أتأمّل الخوارزمية الآتية المُمثَّلة بمُخطَّط سَيْر العمليات، ثمَّ أُجيب عن كلٍّ ممّا يأتي :



(3) أُطبِّق الخوارزمية باستعمال جدول التتبُّع عندما :

$A = 27 \quad , \quad B = 4$

A	B	Is $A < B$?	$A = A - B$	Print
27	4	No	23	
		No	19	
		No	15	
		No	11	
		No	7	
		No	3	
		Yes		3

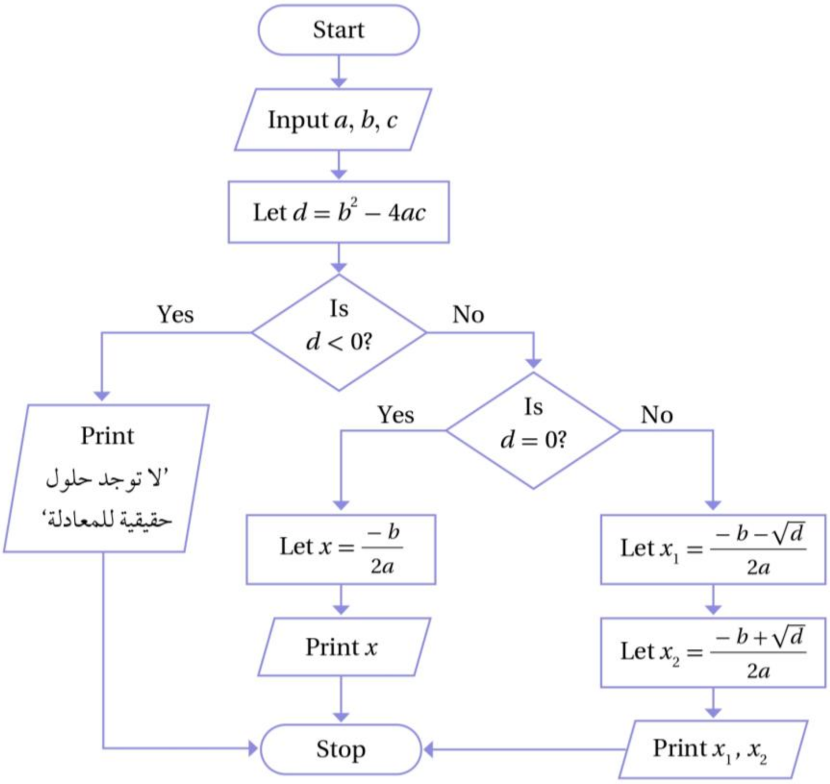
---

(4) أصف ما يتحقق من تطبيق هذه الخوارزمية .

الخوارزمية تنفذ طرحًا متكررًا لـِ B من A حتى : $A < B$

توجد استعمالات رياضية للخوارزميات أكثر تعقيدًا من تلك التي نوقِشت في المثال السابق ، مثل: تحديد إذا كان لمعادلة تربيعية حلول حقيقية أم لا، وإيجاد هذه الحلول .

مثال 1 : تُستعمَل الخوارزمية الآتية لإيجاد الجذور الحقيقية للمعادلة التربيعية : $ax^2 + bx + c = 0$. أُطبِّق الخوارزمية، ثمَّ أُحدِّد المُخرَج لكلٍّ من المعادلات التربيعية التالية :



أتعلّم

تُستعمَل كلمة (Input) للدلالة على أمر إدخال المعطيات.

أتذكّر

القانون العام لحل المعادلة التربيعية: $ax^2+bx+c=0$، حيث $a \neq 0$، هو: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

وتختلف طبيعة الناتج؛ لأنَّ المُميِّز $\Delta = b^2-4ac$ قد يكون عددًا موجبًا، أو عددًا سالبًا، أو صفرًا.

(1) $x^2 + 7x + 15 = 0$

a	b	c	d	Is $d < 0$?
1	7	15	-11	Yes

المُخرَج : لا توجد حلول حقيقية للمعادلة.

(2) $2x^2 + 20x + 32 = 0$

a	b	c	d	Is $d < 0$?	Is $d = 0$?	x_1	x_2
2	20	32	144	No	No	-8	-2

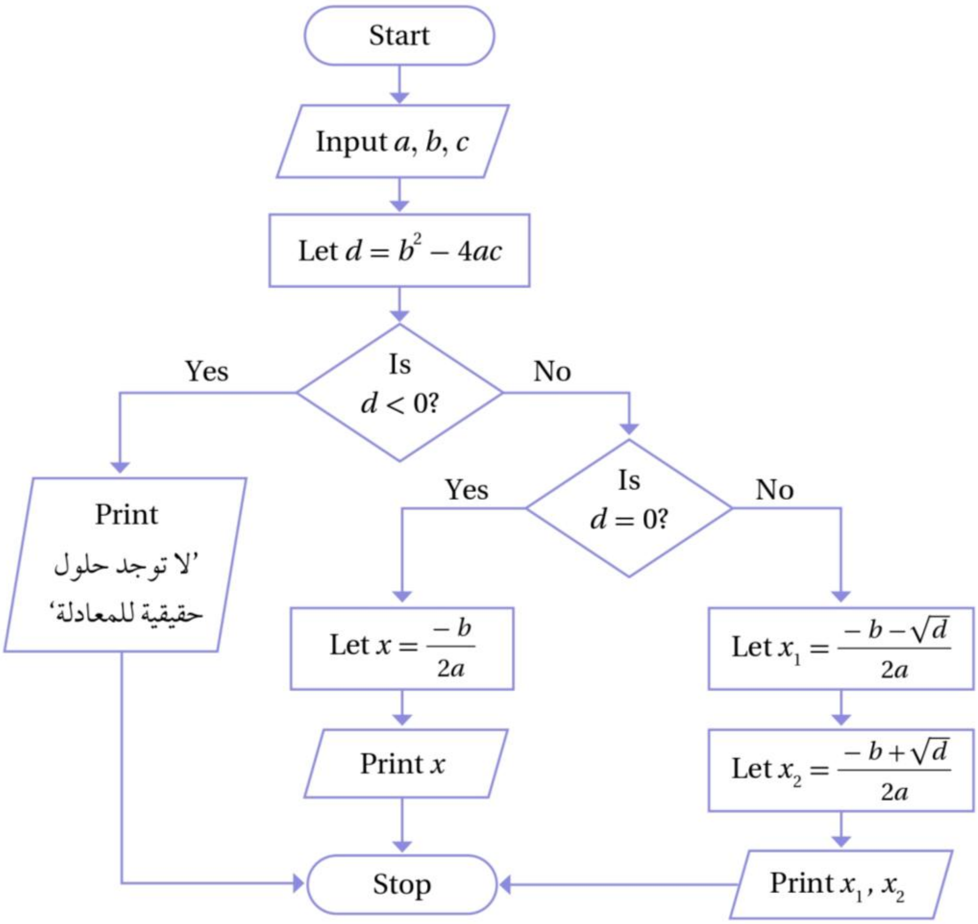
المُخرَج : $x_1 = -8 \;\; , \;\; x_2 = -2$

(3) $4x^2 - 16x + 16 = 0$

a	b	c	d	Is $d < 0$?	Is $d = 0$?	x
4	-16	16	0	No	Yes	2

المُخرَج : $x = 2$

مثال 2 : تُستعمَل الخوارزمية الآتية لإيجاد الجذور الحقيقية للمعادلة التربيعية : $ax^2 + bx + c = 0$. أُطبِّق الخوارزمية، ثمَّ أُحدِّد المُخرَج لكلٍّ من المعادلات التربيعية التالية :



(1) $x^2 + 4x - 12 = 0$

a	b	c	d	Is $d < 0$?	Is $d = 0$?	x_1	x_2
1	4	-12	64	No	No	-6	2

المُخرَج : $x_1 = -6$, $x_2 = 2$

(2) $3x^2 + 8x + 15 = 0$

a	b	c	d	Is $d < 0$?
3	8	15	-116	Yes

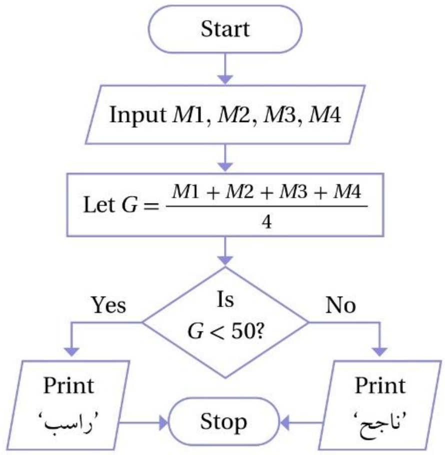
المُخرَج : لا توجد حلول حقيقية للمعادلة.

(3) $2x^2 + 12x + 18 = 0$

a	b	c	d	Is $d < 0$?	Is $d = 0$?	x
2	12	18	0	No	Yes	-3

المُخرَج : $x = -3$

مثال 3 : أتأمَّل الخوارزمية المجاورة المُمثَّلة بمُخطَّط سَيْر العمليات، ثمَّ أُجيب عن السؤالين الآتيين :



(1) أَصِف الاستعمال الرياضي لهذه الخوارزمية.

الحـــل:

تُستعمَل الخوارزمية الآتية لتحديد ما اذا كان الطالب ناجح أو راسب معتمداً على المتوسط الحسابي للعلامات .

---

(2) أُطبِّق الخوارزمية على الأعداد الآتية باستعمال جدول التتبُّع لإيجاد مُخرَج كلٍّ منها :

a) $M1 = 48 \quad , \quad M2 = 52 \quad , \quad M3 = 46$
$M4 = 49$

الحـــل:

M1	M2	M3	M4	G	$G > 50$?	Print
48	52	46	49	48.75	No	"راسب"

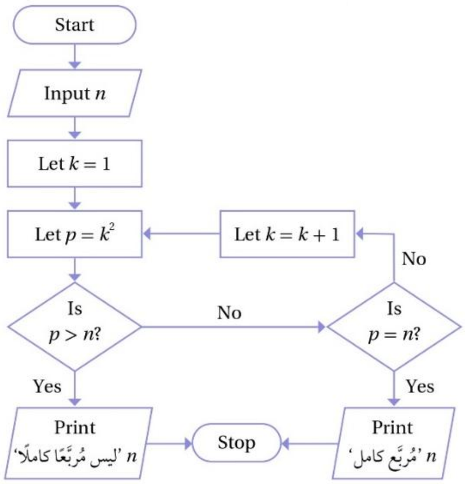
---

b) $M1 = 71 \quad , \quad M2 = 85 \quad , \quad M3 = 62$
$M4 = 45$

الحـــل:

M1	M2	M3	M4	G	$G > 50$?	Print
71	85	62	45	65.75	Yes	"ناجح"

مثال 4 : أتأمَّل الخوارزمية المجاورة المُمثَّلة بمُخطَّط سَيْر العمليات، ثمَّ أُجيب عن السؤالين الآتيين :



(1) أَصِف الاستعمال الرياضي لهذه الخوارزمية.

الحـــل:

تُستعمَل الخوارزمية الآتية لتحديد ما اذا كان العدد n مربع كامل أو لا

---

(2) أُطبِّق الخوارزمية على العددين الآتيين باستعمال جدول التتبُّع لإيجاد مُخرَج كلٍّ منها :

a) $n = 24$

الحـــل:

n	k	p	$p > n$?	$p = n$?	Print
24	1	1	No	No	
	2	4	No	No	
	3	9	No	No	
	4	16	No	No	
	5	25	Yes		"ليس مربع كامل"

---

b) $n = 16$

n	k	p	$p > n$?	$p = n$?	Print
16	1	1	No	No	
	2	4	No	No	
	3	9	No	No	
	4	16	No	Yes	" مربع كامل"

يُمكِن إيجاد الجذر التربيعي لأيِّ عدد حقيقي موجب مُقرَّبًا إلى أقرب منزلتين عشريتين باستعمال الخوارزمية الآتية:

1. أُدخِل العدد N.
2. أجد: $S = \frac{N}{2}$.
3. أجد: $T = \frac{\frac{N}{S} + S}{2}$ مُقرَّبةً إلى أقرب منزلتين عشريتين.
4. إذا كانت $S = T$ بعد تقريب قيمة T إلى أقرب منزلتين عشريتين، فإنَّني أنتقل إلى الخطوة السابعة.
5. أضع قيمة T بدلًا من قيمة S.
6. أعود إلى الخطوة الثالثة.
7. أطبع قِيَم S مُقرَّبةً إلى أقرب منزلتين عشريتين.

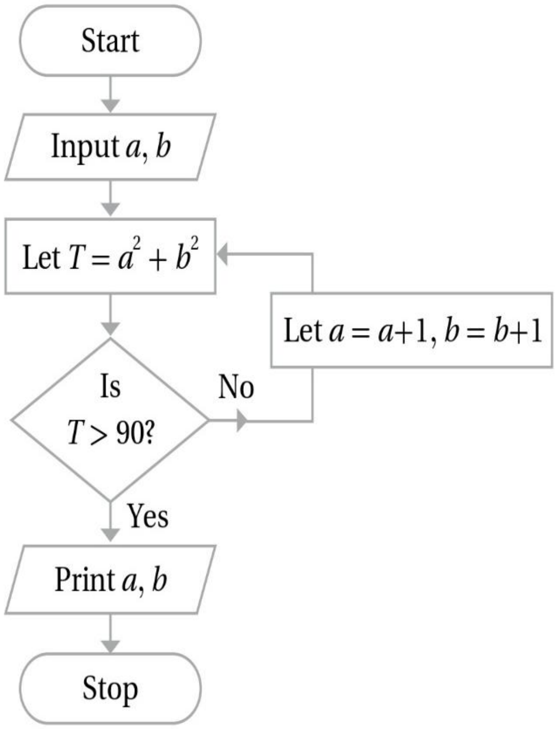
أُطبِّق الخوارزمية السابقة لإيجاد الجذر التربيعي لكل عدد ممّا يأتي مُقرَّبًا إلى أقرب منزلتين عشريتين:

1) 7 2) 3 3) 11

4) أُطبِّق الخوارزمية الآتية لإيجاد مُخرَجها عندما $P = 600, R = 4, T = 5$.

1. Input P, R, T
2. Let $I = (P \times R \times T)/100$
3. Let $A = P + I$
4. Let $M = A/(T \times 12)$
5. Print M
6. Stop

5 أُطبِّق الخوارزمية الآتية لإيجاد مُخرَجاتها عندما $a = 3, b = 1$.

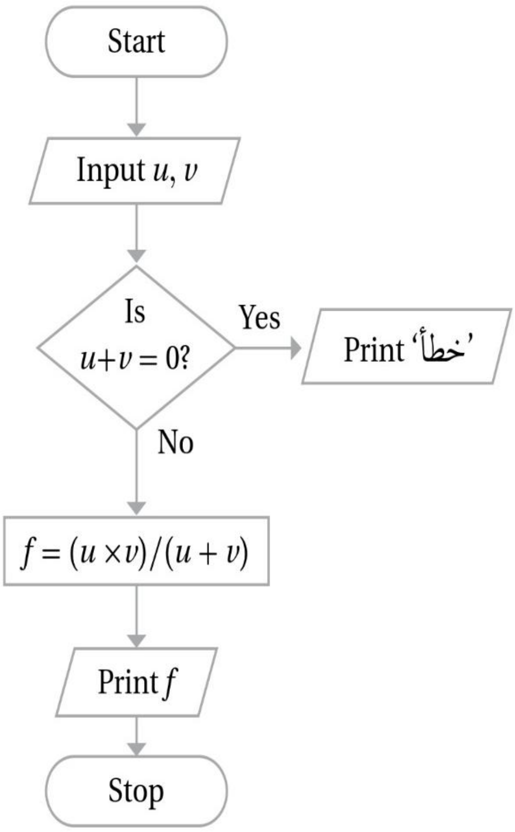


أتأمَّل الخوارزمية المجاورة المُمثَّلة بمُخطَّط سَيْر العمليات، ثمَّ أُطبِّق الخوارزمية على كلٍّ من قيمة u وقيمة v المُعطاة في ما يأتي لإيجاد المُخرَج:

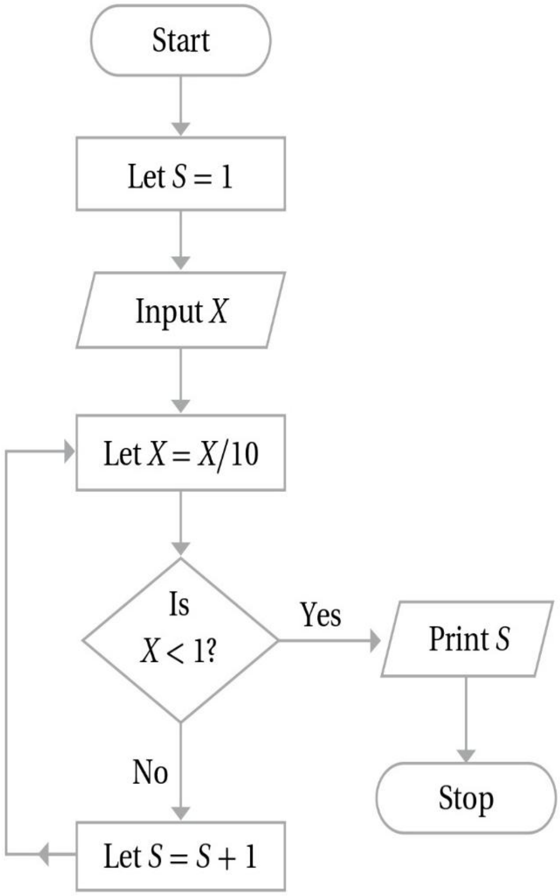
6 $u = 8, v = 8$

7 $u = 7, v = -7$

8 $u = 12, v = 4$



أتأمَّل الخوارزمية الآتية المُمثَّلة بمُخطَّط سَيْر العمليات، ثمَّ أُطبِّق الخوارزمية على قيمة X المُعطاة في ما يأتي لإيجاد المُخرَج:



9) $X = 48$

10) $X = 9170$

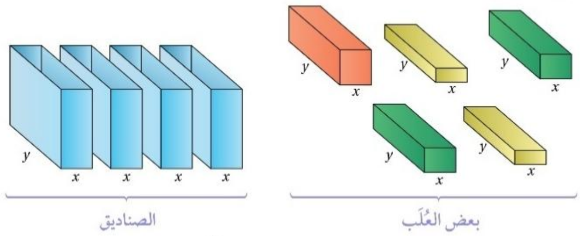
11) $X = -800$

الدرس الثاني : خوارزميات تعبئة الصندوق

Bin – Packing Algorithms

1. الخوارزميات المكتوبة بالكلمات

إذا كان لديَّ n من العُلَب التي لها المقطع العرضي نفسه (مستطيل عرضه x، وطوله y) ، لكنَّ ارتفاعاتها مُتفاوِتة كما يظهر في الشكل التالي، وأردت تعبئتها في صناديق، عرض كلٍّ منها x ، وطول كلٍّ منها y ، وارتفاعاتها مُتساوِية، فكيف يُمكِنني فعل ذلك باستعمال أقل عدد مُمكِن من الصناديق ؟



تُسمّى المسألة السابقة مسألة تعبئة الصندوق، ويُمكِن حلُّها باستعمال ما يُسمّى **خوارزميات تعبئة الصناديق**

يُستعمَل هذا النوع من الخوارزميات في حلِّ كثيرمن المسائل الحياتية التي تنطوي على المبدأ نفسه، مثل :

(1) تنظيم صناديق البضائع وترتيبها داخل حاويات الشحن

(2) تحميل البضائع في شاحنات عليها قيود في الكتلة

(3) تخزين ملفات بيانات مختلفة الحجوم في عدد من الأقراص المُدمَجة .

تتمثَّل الخطوة الأولى لحلِّ مسألة تعبئة الصندوق في إيجاد الحدِّ الأدنى من عدد الصناديق اللازمة كما هو مُبيَّن في المثال الآتي .

أمثلة على الخوارزميات :

(4) ضرب عددين يتكوَّن كلٌّ منهما من منزلتين

مثال 1 : يُراد تعبئة العُلَب (المُعطى ارتفاعاتها في ما يلي) في صناديق، ارتفاع كلٍّ منها 10 وحدات طول، علمًا بأنَّ للعُلَب والصناديق المقطع العرضي نفسه. أجد الحدَّ الأدنى من عدد الصناديق اللازمة لتعبئة العُلَب .

5 7 3 5 6 2 4 4 7 4

الحــــل:

الخطوة 1 : أجد مجموع ارتفاعات العُلَب .

$$5 + 7 + 3 + 5 + 6 + 2 + 4 + 4 + 7 + 4 = 47$$

الخطوة 2 : أَقسِم مجموع ارتفاعات العُلَب على ارتفاع الصندوق الواحد .

$$\frac{47}{10} = 4.7 \approx 5$$

إذن، الحدُّ الأدنى من عدد الصناديق اللازمة لتعبئة العُلَب هو 5 صناديق .

مثال 2 : يُراد تعبئة العُلَب (المُعطى ارتفاعاتها في ما يلي) في صناديق، ارتفاع كلٍّ منها وحدة طول واحدة ، علمًا بأنَّ للعُلَب والصناديق المقطع العرضي نفسه. أجد الحدَّ الأدنى من عدد الصناديق اللازمة لتعبئة العُلَب .

0.5 0.7 0.5 0.2 0.4 0.2 0.5
0.1 0.6

الحــــل:

الخطوة 1 : أجد مجموع ارتفاعات العُلَب .

$$0.5 + 0.7 + 0.5 + 0.2 + 0.4 + 0.2 + 0.5 + 0.1 + 0.6 = 3.7$$

الخطوة 2 : أَقسِم مجموع ارتفاعات العُلَب على ارتفاع الصندوق الواحد .

$$\frac{3.7}{1} = 3.7 \approx 4$$

إذن، الحدُّ الأدنى من عدد الصناديق اللازمة لتعبئة العُلَب هو 4 صناديق .

2. خوارزمية الملاءمة الأولى

توجد خوارزميات عديدة لحلِّ مسألة تعبئة الصندوق، منها **خوارزمية المُلاءَمة الأولى** في ما يأتي بيان لخطوات هذه الخوارزمية .

خوارزمية المُلاءَمة الأولى

يُمكِن حلُّ مسائل تعبئة الصندوق باستعمال خوارزمية المُلاءَمة الأولى، وذلك باتِّباع الخطوات الآتية:

1. إيجاد الحدِّ الأدنى من عدد الصناديق اللازمة .
2. اتِّباع ترتيب العناصر (العُلَب) المُعطى في المسألة.
3. وضع كل عنصر في أوَّل صندوق مُتوافِر يَتَّسِع له، بَدْءًا بالصندوق الأوَّل في كل مَرَّة .
4. في حال لم يَتَّسِع أيُّ صندوق للعنصر الذي يُراد وضعه، فإنَّه يجب إضافة صندوق آخر

ملاحظة: إذا كان عدد الصناديق المُتوافِرة (التي حصلْتُ عليها) مُساويًا للحدِّ الأدنى من عدد الصناديق اللازمة، فهذا يعني أنَّني توصَّلْتُ إلى الحلِّ الأمثل .

مثال 1: يُراد تعبئة العُلَب (المُعطى ارتفاعاتها في ما يلي) في صناديق، ارتفاع كلٍّ منها 1.5 وحدة طول ، اذا علمت أنَّ للعُلَب والصناديق المقطع العرضي نفسه. فأجيب عن الاسئلة تباعاً

0.8 0.6 0.5 0.7 0.9 0.4 0.3 0.6 0.5 0.6

(1) أستعمل خوارزمية المُلاءَمة الأولى لتعبئة العُلَب في الصناديق، ثمَّ أُحدِّد عدد الصناديق اللازمة لذلك .

الحــل:

الخطوة 1: أجد الحد الأدنى من عدد الصناديق اللازمة لتعبئة العُلَب .

$$0.8 + 0.6 + 0.5 + 0.7 + 0.9 + 0.4 + 0.3 + 0.6 + 0.5 + 0.6 = 5.9$$

$$\frac{5.9}{1.5} = 3.933333.. \approx 4$$

إذن، الحدُّ الأدنى من عدد الصناديق اللازمة لتعبئة العُلَب هو 4 صناديق .

الخطوة 2: أضع كل عُلْبة في أوَّل صندوق مُتوافِر يَتَّسِع لها، بَدْءًا بالصندوق الأوَّل في كل مَرَّة ، وألتزِم ترتيب العناصر في المسألة .

عُلب الصندوق الأول	B1 : 0.8 , 0.6
عُلب الصندوق الثاني	B2 : 0.5 , 0.7 , 0.3
عُلب الصندوق الثالث	B3 : 0.9 , 0.4
عُلب الصندوق الرابع	B4 : 0.6 , 0.5
عُلب الصندوق الخامس	B5 : 0.6

إذن، عدد الصناديق اللازمة لتعبئة العُلَب باستعمال المُلاءَمة الأولى هو 5 صناديق .

---

(2) هل توصَّلْتُ إلى الحلِّ الأمثل لهذه المسألة؟ أُبرِّر إجابتي .

الحــل:

لا؛ لأنَّ عدد الصناديق المُستعمَلة في هذا الحلِّ يزيد على الحدِّ الأدنى من عدد الصناديق اللازمة .

---

(3) أجد الارتفاع المهدور في الصناديق جميعها.

الحــل:

لإيجاد الارتفاع المهدور في الصناديق جميعها، أُحدِّد أوَّلًا الارتفاع المهدور في كل صندوق ، ثمَّ أجمع قِيَم الارتفاعات المهدورة جميعها :

$$0.1 + 0.2 + 0.4 + 0.9 = 1.6$$

إذن، هُدِر 1.6 وحدة طول في الصناديق جميعها

مثال 2 : يُراد تعبئة العُلَب (المُعطى ارتفاعاتها في ما يلي) في صناديق، ارتفاع كلٍّ منها 20 وحدة طول ، اذا علمت أنَّ للعُلَب والصناديق المقطع العرضي نفسه. فأجيب عن الاسئلة تباعاً

11 2 15 5 6 17 7

(1) أستعمل خوارزمية المُلاءَمة الأولى لتعبئة العُلَب في الصناديق، ثمَّ أُحدِّد عدد الصناديق اللازمة لذلك .

الحـــل:

الخطوة 1 : أجد الحد الأدنى من عدد الصناديق اللازمة لتعبئة العُلَب .

$$11+2+15+5+6+17+7=63$$

$$\frac{63}{20}=3.15\approx 4$$

إذن، الحدُّ الأدنى من عدد الصناديق اللازمة لتعبئة العُلَب هو 4 صناديق .

الخطوة 2 : أضع كل عُلْبة في أوَّل صندوق مُتوافِرٍ يَتَّسِع لها، بَدْءًا بالصندوق الأوَّل في كل مَرَّة ، وأَلتزِم ترتيب العناصر في المسألة .

B1 : 11 , 2 عُلب الصندوق الأول

B2 : 15 , 5 عُلب الصندوق الثاني

B3 : 6 عُلب الصندوق الثالث

B4 : 17 عُلب الصندوق الرابع

B5 : 7 عُلب الصندوق الخامس

إذن، عدد الصناديق اللازمة لتعبئة العُلَب باستعمال المُلاءَمة الأولى هو 5 صناديق .

---

(2) هل توصَّلْتُ إلى الحلِّ الأمثل لهذه المسألة؟ أُبرِّر إجابتي .

الحـــل:

لا؛ لأنَّ عدد الصناديق المُستعمَلة في هذا الحلِّ يزيد على الحدِّ الأدنى من عدد الصناديق اللازمة .

---

(3) أجد الارتفاع المهدور في الصناديق جميعها.

الحـــل:

لإيجاد الارتفاع المهدور في الصناديق جميعها، أُحدِّد أوَّلًا الارتفاع المهدور في كل صندوق ، ثمَّ أجمع قِيَم الارتفاعات المهدورة جميعها :

$$7+14+3+13=37$$

مثال 3 : يُراد تعبئة العُلَب (المُعطى ارتفاعاتها في ما يلي) في صناديق، ارتفاع كلٍّ منها 5 وحدات طول ، اذا علمت أنَّ للعُلَب والصناديق المقطع العرضي نفسه. فأجيب عن الاسئلة تباعاً

1.8 1.4 2.6 1.6 2.8 0.9 3.1
0.8 1.2 2.4 0.6

(1) أستعمل خوارزمية المُلاءَمة الأولى لتعبئة العُلَب في الصناديق، ثمَّ أُحدِّد عدد الصناديق اللازمة لذلك .

الحـــل:

الخطوة 1 : أجد الحد الأدنى من عدد الصناديق اللازمة لتعبئة العُلَب .

$$1.8+1.4+2.6+1.6+2.8+0.9+3.1+0.8+1.2+2.4+0.6=19.2$$

$$\frac{19.2}{5}=3.84\approx 4$$

إذن، الحدُّ الأدنى من عدد الصناديق اللازمة لتعبئة العُلَب هو 4 صناديق .

الخطوة 2 : أضع كل عُلْبة في أوَّل صندوق مُتوافِرٍ يَتَّسِع لها، بَدْءًا بالصندوق الأوَّل في كل مَرَّة ، وأَلتزِم ترتيب العناصر في المسألة .

B1 : 1.8 , 1.4 عُلب الصندوق الأول

B2 : 2.6 , 1.6 عُلب الصندوق الثاني

B3 : 2.8 , 0.9 عُلب الصندوق الثالث

B4 : 3.1 , 0.8 عُلب الصندوق الرابع

B5 : 1.2 , 2.4 , 0.6 عُلب الصندوق الخامس

إذن، عدد الصناديق اللازمة لتعبئة العُلَب باستعمال المُلاءَمة الأولى هو 5 صناديق .

---

(2) هل توصَّلْتُ إلى الحلِّ الأمثل لهذه المسألة؟ أُبرِّر إجابتي .

لا؛ لأنَّ عدد الصناديق المُستعمَلة في هذا الحلِّ يزيد على الحدِّ الأدنى من عدد الصناديق اللازمة .

---

(3) أجد الارتفاع المهدور في الصناديق جميعها.

لإيجاد الارتفاع المهدور في الصناديق جميعها، أُحدِّد أوَّلًا الارتفاع المهدور في كل صندوق ، ثمَّ أجمع قِيَم الارتفاعات المهدورة جميعها :

$$1.8+0.8+1.3+1.1+0.8=5.8$$

3. **خوارزمية الملاءمة الأولى المتناقصة**

توجد خوارزمية أُخرى يُمكِن استعمالها لحلِّ هذه المسألة، هي **خوارزمية المُلاءَمة الأولى المُتناقِصة**، التي تبدأ بترتيب مقاسات العناصر المُعطاة (ارتفاعات العُلَب مثلًا) ترتيبًا تنازليًّا، ثمَّ تطبيق خوارزمية المُلاءَمة الأولى لتعبئة العناصر في الصناديق كما هو مُبيَّن أدناه .

خوارزمية المُلاءَمة الأولى المتناقصة

يُمكِن حلُّ مسائل تعبئة الصندوق باستعمال خوارزمية المُلاءَمة الأولى المتناقصة ، وذلك باتِّباع الخطوتين الآتيتين :

1. ترتيب مقاسات العناصر تنازلياً
2. تطبيق خوارزمية المُلاءَمة الأولى على العناصر التي أُعيد ترتيب مقاساتها .

مثال 1 : يُراد تعبئة العُلَب (المُعطى ارتفاعاتها في ما يلي) في صناديق، ارتفاع كلٍّ منها وحدتان ، اذا علمت أنَّ للعُلَب والصناديق المقطع العرضي نفسه. فأجيب عن الاسئلة تباعاً

0.6   1.5   1.6   0.2   0.4   0.5   0.7
0.1   0.9   0.3

(1) أستعمل خوارزمية المُلاءَمة الأولى المتناقصة لتعبئة العُلَب في الصناديق، ثمَّ أُحدِّد عدد الصناديق اللازمة لذلك .

الحـــــل:

الخطوة 1 : أجد الحد الأدنى من عدد الصناديق اللازمة لتعبئة العُلَب .

$$0.6 + 1.5 + 1.6 + 0.2 + 0.4 + 0.5 + 0.7 + 0.1 + 0.9 + 0.3 = 6.8$$

$$\frac{6.8}{2} = 3.4 \approx 4$$

الخطوة 2 : أرتب ارتفاعات العلب ترتيباً تنازلياً .

1.6 , 1.5 , 0.9 , 0.7 , 0.6 , 0.5 , 0.4 , 0.3 , 0.2 , 0.1

الخطوة 3 : أُطبِّق خوارزمية المُلاءَمة الأولى على ارتفاعات العُلَب التي أُعيد ترتيب مقاساتها .

عُلب الصندوق الأول B1 : 1.6 , 0.4

عُلب الصندوق الثاني B2 : 1.5 , 0.5

الصندوق الثالث B3 : 0.9 , 0.7 , 0.3 , 0.1

عُلب الصندوق الرابع B4 : 0.6 , 0.2

إذن، عدد الصناديق اللازمة لتعبئة العُلَب باستعمال المُلاءَمة الأولى المتناقصة هو 4 صناديق .

---

(2) هل توصَّلْتُ إلى الحلِّ الأمثل لهذه المسألة؟ أبرِّر إجابتي .

الحـــــل:

نعم ؛ لأنَّ عدد الصناديق المُستعمَلة في هذا الحلِّ مساوٍ للحدِّ الأدنى من عدد الصناديق اللازمة .

---

(3) أجد الارتفاع المهدور في الصناديق جميعها.

الحـــــل:

ألاحِظ عدم وجود ارتفاعات مهدورة إلّا في الصندوق الأخير، وهو ارتفاع يساوي 1.2 وحدة طول .

مثال 2 : يُراد تعبئة العُلَب (المُعطى ارتفاعاتها في ما يلي) في صناديق، ارتفاع كلٍّ منها 1.5 وحدة طول ، اذا علمت أنَّ للعُلَب والصناديق المقطع العرضي نفسه. فأجيب عن الاسئلة تباعاً .

0.8 0.6 0.5 0.7 0.9 0.4 0.3
0.6 0.5 0.6

(1) أستعمل خوارزمية المُلاءَمة الأولى المتناقصة لتعبئة العُلَب في الصناديق، ثمَّ أُحدِّد عدد الصناديق اللازمة لذلك .

الحـــل:

الخطوة 1 : أجد الحد الأدنى من عدد الصناديق اللازمة لتعبئة العُلَب .

$$0.8+0.6+0.5+0.7+0.9+0.4+0.3+0.6+0.5+0.6=5.9$$

$$\frac{5.9}{1.5}=3.933333..\approx 4$$

إذن، الحدُّ الأدنى من عدد الصناديق اللازمة لتعبئة العُلَب هو 4 صناديق .

الخطوة 2 : أرتب ارتفاعات العلب ترتيباً تنازلياً .

0.9 , 0.8 , 0.7 , 0.6 , 0.6 , 0.6 , 0.5 , 0.5 , 0.4 , 0.3

الخطوة 3 : أُطبِّق خوارزمية المُلاءَمة الأولى على ارتفاعات العُلَب التي أُعيد ترتيب ميقاساتها .

B1 : 0.9 عُلب الصندوق الأول
B2 : 0.8 , 0.7 عُلب الصندوق الثاني
B3 : 0.6 , 0.6 عُلب الصندوق الثالث
B4 : 0.6 , 0.5 , 0.4 عُلب الصندوق الرابع
B5 : 0.3 عُلب الصندوق الخامس

إذن، عدد الصناديق اللازمة لتعبئة العُلَب باستعمال المُلاءَمة الأولى المتناقصة هو 5 صناديق .

---

(2) هل توصَّلتُ إلى الحلِّ الأمثل لهذه المسألة؟ أُبرِّر إجابتي .

لا؛ لأنَّ عدد الصناديق المُستعمَلة في هذا الحلِّ يزيد على الحدِّ الأدنى من عدد الصناديق اللازمة .

---

(3) أجد الارتفاع المهدور في الصناديق جميعها.

$$0.6+0.3+1.2=2.1$$

مثال 3 : يُراد تعبئة العُلَب (المُعطى ارتفاعاتها في ما يلي) في صناديق، ارتفاع كلٍّ منها 60 وحدة طول ، اذا علمت أنَّ للعُلَب والصناديق المقطع العرضي نفسه. فأجيب عن الاسئلة تباعاً .

31 10 38 45 19 47 35 28 12

(1) أستعمل خوارزمية المُلاءَمة الأولى المتناقصة لتعبئة العُلَب في الصناديق، ثمَّ أُحدِّد عدد الصناديق اللازمة لذلك .

الحـــل:

الخطوة 1 : أجد الحد الأدنى من عدد الصناديق اللازمة لتعبئة العُلَب .

$$31+10+38+45+19+47+35+28+12=265$$

$$\frac{265}{60}=4.416666667...\approx 5$$

إذن، الحدُّ الأدنى من عدد الصناديق اللازمة لتعبئة العُلَب هو 5 صناديق .

الخطوة 2 : أرتب ارتفاعات العلب ترتيباً تنازلياً .

47 , 45 , 38 , 35 , 31 , 28 , 19 , 12 , 10

الخطوة 3 : أُطبِّق خوارزمية المُلاءَمة الأولى على ارتفاعات العُلَب التي أُعيد ترتيب ميقاساتها .

B1 : 47 عُلب الصندوق الأول
B2 : 45 عُلب الصندوق الثاني
B3 : 38 عُلب الصندوق الثالث
B4 : 35 عُلب الصندوق الرابع
B5 : 31 , 28 عُلب الصندوق الخامس
B6 : 19 , 12 , 10 عُلب الصندوق السادس

إذن، عدد الصناديق اللازمة لتعبئة العُلَب باستعمال المُلاءَمة الأولى المتناقصة هو 6 صناديق .

---

(2) هل توصَّلتُ إلى الحلِّ الأمثل لهذه المسألة؟ أُبرِّر إجابتي .

لا؛ لأنَّ عدد الصناديق المُستعمَلة في هذا الحلِّ يزيد على الحدِّ الأدنى من عدد الصناديق اللازمة .

---

(3) أجد الارتفاع المهدور في الصناديق جميعها.

$$13+15+22+25+1+19=95$$

إذن، هُدِر 95 وحدة طول في الصناديق جميعها

4. خوارزمية الصندوق الكامل

ألاحِظ أنَّ الخوارزميتين اللتين تعلَّمْتُهما في المثالين السابقين لحلِّ مسائل تعبئة الصندوق تشترطان التزام الترتيب المُعطى أو الترتيب التنازلي لمقاسات العناصر. ولكنْ ثمَّةَ خوارزمية ثالثة يُمكِن استعمالها لحلِّ مسائل تعبئة الصندوق من دون الالتزام بأيِّ ترتيب لمقاسات العناصر، وهي :

خوارزمية الصندوق الكامل

تبدأ هذه الخوارزمية باختيار العناصر التي يُمكِن دمجها معًا لِمَلْءِ الصندوق كاملًا بصرف النظر عن ترتيب مقاساتها، ثمَّ تعبئة العناصر المُتبقِّية باستعمال خوارزمية المُلاءَمة الأولى.

خوارزمية الصندوق الكامل

يُمكِن حلُّ مسائل تعبئة الصندوق باستعمال خوارزمية الصندوق الكامل ، وذلك باتِّباع الخطوات الآتية :

1. إيجاد الحد الأدنى من عدد الصناديق اللازمة .
2. البحث عن العناصر التي يمكن أن تملأ صندوقاً كاملاً ، ثم تعبئتها أولاً .
3. تطبيق خوارزمية المُلاءَمة الأولى على العناصر المتبقية .

مثال 1 : يُراد تعبئة العُلَب (المُعطى ارتفاعاتها في ما يلي) في صناديق، ارتفاع كلٍّ منها 17 ، اذا علمت أنَّ للعُلَب والصناديق المقطع العرضي نفسه. فأجيب عن الاسئلة تباعاً

3 4 5.2 4.4 4.3 5.6 4.6
4.7 3.2 4.8 5.3 4.1

(1) أستعمل خوارزمية الصندوق الكامل لتعبئة العُلَب في الصناديق، ثمَّ أُحدِّد عدد الصناديق اللازمة لذلك .

الحـــل:

الخطوة 1 : أجد الحد الأدنى من عدد الصناديق اللازمة لتعبئة العُلَب .

$$3 + 3 + 5.2 + 4.4 + 4.3 + 5.6 + 4.6 + 4.7 + 3.2 + 4.8 + 5.3 + 4.1 = 53.2$$

$$\frac{53.2}{17} = 3.129 \approx 4$$

إذن، الحدُّ الأدنى من عدد الصناديق اللازمة لتعبئة العُلَب هو 4 صناديق .

الخطوة 2 : أُطبِّق خوارزمية الصندوق الكامل .

عُلب الصندوق الأول B1 : 3 , 4 , 4.7 , 5.3

عُلب الصندوق الثاني B2 : 4.4 , 4.6 , 3.2 , 4.8

عُلب الصندوق الثالث B3 : 5.2 , 4.3 , 5.6

عُلب الصندوق الرابع B4 : 4.1

---

(2) هل توصَّلْتُ إلى الحلِّ الأمثل لهذه المسألة؟ أُبرِّر إجابتي .

نعم ؛ لأنَّ عدد الصناديق المُستعمَلة في هذا الحلِّ مساوٍ للحدِّ الأدنى من عدد الصناديق اللازمة .

مثال 2 : يُراد تعبئة العُلَب (المُعطى ارتفاعاتها في ما يلي) في صناديق، ارتفاع كلٍّ منها وحدتان ، اذا علمت أنَّ للعُلَب والصناديق المقطع العرضي نفسه. فأجيب عن الاسئلة تباعاً

0.6 1.5 1.6 0.2 0.4 0.5 0.7
0.1 0.9 0.3

(1) أستعمل خوارزمية الصندوق الكامل لتعبئة العُلَب في الصناديق، ثمَّ أُحدِّد عدد الصناديق اللازمة لذلك .

الحـــل:

$$0.6 + 1.5 + 1.6 + 0.2 + 0.4 + 0.5 + 0.7 + 0.1 + 0.9 + 0.3 = 6.8$$

$$\frac{6.8}{2} = 3.4 \approx 4$$

عُلب الصندوق الأول B1 : 1.5 , 0.5

عُلب الصندوق الثاني B2 : 1.6 , 0.4

عُلب الصندوق الثالث B3 : 0.9 , 0.6 , 0.2 , 0.3

عُلب الصندوق الرابع B4 : 0.7 , 0.1

إذن، عدد الصناديق اللازمة لتعبئة العُلَب باستعمال الصندوق الكامل هو 4 صناديق .

---

(2) هل توصَّلْتُ إلى الحلِّ الأمثل لهذه المسألة؟ أُبرِّر إجابتي .

الحـــل:

نعم ؛ لأنَّ عدد الصناديق المُستعمَلة في هذا الحلِّ مساوٍ للحدِّ الأدنى من عدد الصناديق اللازمة .

مثال 3 : يُراد تعبئة العُلَب (المُعطى ارتفاعاتها في ما يلي) في صناديق، ارتفاع كلٍّ منها 65 ، اذا علمت أنَّ للعُلَب والصناديق المقطع العرضي نفسه. فأجيب عن الاسئلة تباعاً :

42 21 15 16 35
10 31 11 27 39

(1) أستعمل خوارزمية الصندوق الكامل لتعبئة العُلَب في الصناديق، ثمَّ أُحدِّد عدد الصناديق اللازمة لذلك .

الحـــــل:

الخطوة 1 : أجد الحد الأدنى من عدد الصناديق اللازمة لتعبئة العُلَب .

$$42+21+15+16+35+10+31+11+27+39=247$$

$$\frac{247}{65}=3.8\approx 4$$

إذن، الحدُّ الأدنى من عدد الصناديق اللازمة لتعبئة العُلَب هو 4 صناديق .

الخطوة 2 : أُطبِّق خوارزمية الصندوق الكامل .

عُلب الصندوق الأول B1 : 39 , 16 , 10
عُلب الصندوق الثاني B2 : 42 + 21
عُلب الصندوق الثالث B3 : 15 , 35 , 11
عُلب الصندوق الرابع B4 : 31 , 27

---

(2) هل توصَّلتُ إلى الحلِّ الأمثل لهذه المسألة؟ أبرِّر إجابتي .

نعم ؛ لأنَّ عدد الصناديق المُستعمَلة في هذا الحلِّ مساوٍ للحدِّ الأدنى من عدد الصناديق اللازمة .

---

(3) أجد الارتفاع المهدور في الصناديق جميعها .

$$0+2+4+7=13$$

إذن، هُدِر 13 وحدة طول في الصناديق جميعها

أسئلة متنوعة

سوف نستخدم في هذه الأسئلة جميع الخوارزميات (الملاءمة الأولى و الملاءمة الأولى المتناقصة و الصندوق الكامل)

مثال 1 : قماش: في ما يأتي أطوال 10 قطع قُماش بالمتر، يرغب تاجر في قَصِّها من لفّات قُماش كبيرة، طول كلٍّ منها 60 m

32 45 17 23 38 28 16
9 12 10

(1) أجد الحدَّ الأدنى من عدد لفّات القُماش الكبيرة اللازمة لقَصِّ قطع القُماش .

الحـــــل:

$$32+45+17+23+38+28+16+9+12+10=230$$

$$\frac{230}{60}=3.833333\ldots\approx 4$$

إذن، الحدُّ الأدنى من عدد الصناديق اللازمة لتعبئة العُلَب هو 4 صناديق .

---

(2) أُحدِّد كيف تُقَصُّ قطع القُماش باستعمال خوارزمية المُلاءَمة الأولى، ثمَّ أُحدِّد عدد اللفّات اللازمة لذلك باستعمال هذه الخوارزمية، ثمَّ أجد طول الجزء المهدور من القُماش .

اللفة الأولى B1 : 32 , 17 , 9
اللفة الثانية B2 : 45 , 12
اللفة الثالثة B3 : 23 , 28
اللفة الرابعة B4 : 38 , 16
اللفة الخامسة B5 : 10

إذن، عدد اللفّات اللازمة لقَصِّ قطع القُماش ذات الأطوال المُعطاة باستعمال خوارزمية المُلاءَمة الأولى هو 5 لفّات قُماش كبيرة .

لإيجاد طول الجزء المهدور من القُماش، أُحدِّد أوَّلًا طول الجزء المهدور من كل لفَّة كبيرة، ثمَّ أجمع أطوال الأجزاء المهدورة :

$$1+3+9+6+50=70$$

إذن، طول الجزء المهدور من القُماش هو : 70 m

(3) أُحدِّد كيف تُقَصُّ قطع القُماش باستعمال خوارزمية الصندوق الكامل، ثمَّ أُحدِّد عدد اللفّات اللازمة لذلك باستعمال هذه الخوارزمية، ثمَّ أجد طول الجزء المهدور من القُماش .

اللفة الأولى	B1 : 32 , 28
اللفة الثانية	B2 : 38 , 12 , 10
اللفة الثالثة	B3 : 45 , 9
اللفة الرابعة	B4 : 17 , 23 , 16

إذن، عدد اللفّات اللازمة لقَصِّ قطع القُماش ذات الأطوال المُعطاة باستعمال خوارزمية الصندوق الكامل هو 4 لفّات قُماش كبيرة .

لإيجاد طول الجزء المهدور من القُماش، أُحدِّد أوَّلاً طول الجزء المهدور من كل لفَّة كبيرة ، ثمَّ أجمع أطوال الأجزاء المهدورة :

$$6 + 4 = 10$$

إذن، طول الجزء المهدور من القُماش هو : $10\ m$

---

(4) أيُّ الخوارزميات توصَّلْتُ بها إلى الحلِّ الأمثل؟ أُبرِّر إجابتي.

توصَّلْتُ إلى الحلِّ الأمثل باستعمال خوارزمية الصندوق الكامل؛ لأنَّ عدد لفّات القماش الذي حصرْتُه من تطبيقها مُساوٍ للحدِّ الأدنى من عدد اللفّات اللازمة .

مثال 2 : تخزين البيانات: في ما يأتي سعات 9 ملفات حاسوبية (بالجيجابايت) يُراد حفظها في أقراص تخزين، سعة كلٍّ منها 100 جيجابايت :

29 52 73 87 74 47 38 61 41

(1) أجد الحدَّ الأدنى من عدد أقراص التخزين اللازمة لحفظ الملفات .

الحـــــل:

$$29 + 52 + 73 + 87 + 74 + 47 + 38 + 61 + 41 = 502$$

$$\frac{502}{100} = 5.02 \approx 6$$

إذن، الحدُّ الأدنى من عدد الصناديق اللازمة لتعبئة العُلَب هو 6 صناديق .

(2) أُحدِّد كيف تُحفَظ الملفات في الأقراص باستعمال خوارزمية المُلاءَمة الأولى، ثمَّ أُحدِّد عدد الأقراص اللازمة لذلك باستعمال هذه الخوارزمية، ثمَّ أجد مساحة التخزين المهدورة في الأقراص .

B1 : 29 , 52
B2 : 73
B3 : 87
B4 : 74
B5 : 47 , 38
B6 : 61
B7 : 41

الجزء المهدور:

$$19 + 27 + 13 + 26 + 15 + 39 + 59 = 198$$

---

(3) أُحدِّد كيف تُحفَظ الملفات في الأقراص باستعمال خوارزمية الصندوق الكامل، ثمَّ أُحدِّد عدد الأقراص اللازمة لذلك باستعمال هذه الخوارزمية، ثمَّ أجد مساحة التخزين المهدورة في الأقراص.

B1 : 29 , 61
B2 : 52 , 47
B3 : 73
B4 : 87
B5 : 38
B6 : 74
B7 : 41

طول الجزء المهدور:

$$10 + 1 + 27 + 13 + 62 + 26 + 59 = 198$$

---

(4) أيُّ الخوارزميات توصَّلْتُ بها إلى الحلِّ الأمثل؟ أُبرِّر إجابتي.

كلا الخوارزميتين أعطيا نفس العدد من الأقراص (7)، وهو أكبر من الحد الأدنى النظري. إذاً لا توجد أفضلية واضحة بينهما في هذا المثال.

مثال 2 : شحن: في ما يأتي كتل 7 أجهزة (بالكيلوغرام) يُراد شحنها في صناديق؛ على ألّا تتجاوز كتلة الصندوق الواحد 60 kg

41 28 42 31 36 32 29

(1) أجد الحدَّ الأدنى من عدد الصناديق اللازمة لشحن الأجهزة .

الحــــل:

$$41 + 28 + 42 + 31 + 36 + 32 + 29 = 239$$

$$\frac{239}{60} = 3.9833333 \ldots \approx 4$$

إذن، الحدُّ الأدنى من عدد الصناديق اللازمة لتعبئة العُلَب هو 4 صناديق .

---

(2) أحدِّد كيف تُوزَّع الأجهزة على الصناديق باستعمال خوارزمية المُلاءَمة الأولى، ثمَّ أُحدِّد عدد الصناديق اللازمة لذلك باستعمال هذه الخوارزمية .

عُلب الصندوق الأول	B1 : 41
عُلب الصندوق الثاني	B2 : 28 , 42
عُلب الصندوق الثالث	B3 : 31
عُلب الصندوق الرابع	B4 : 36
عُلب الصندوق الخامس	B5 : 32
عُلب الصندوق السادس	B6 : 29

---

(3) أحدِّد كيف تُوزَّع الأجهزة على الصناديق باستعمال خوارزمية المُلاءَمة الأولى المُتناقِصة، ثمَّ أُحدِّد عدد الصناديق اللازمة لذلك باستعمال هذه الخوارزمية.

ارتب ترتيباً تنازلياً :

42 41 36 32 32 29 28

عُلب الصندوق الأول	B1 : 42
عُلب الصندوق الثاني	B2 : 41
عُلب الصندوق الثالث	B3 : 36
عُلب الصندوق الرابع	B4 : 32
عُلب الصندوق الخامس	B5 : 32
عُلب الصندوق السادس	B6 : 29 , 28

(4) أحدِّد كيف تُوزَّع الأجهزة على الصناديق باستعمال خوارزمية الصندوق الكامل، ثمَّ أُحدِّد عدد الصناديق اللازمة لذلك باستعمال هذه الخوارزمية.

عُلب الصندوق الأول	B1 : 41
عُلب الصندوق الثاني	B2 : 28 , 32
عُلب الصندوق الثالث	B3 : 42
عُلب الصندوق الرابع	B4 : 29 , 31
عُلب الصندوق الخامس	B5 : 36

---

(5) أيُّ الخوارزميات توصَّلْتُ بها إلى الحلِّ الأمثل؟ أُبرِّر إجابتي.

خوارزمية الملاءمة الأولى : 6 صناديق

خوارزمية الملاءمة الأولى المتناقصة : 6 صناديق

خوارزمية الصندوق الكامل : 5 صناديق (الأمثل)

مثال 2 : أسلاك نحاسية: في ما يأتي أطوالٌ (بالسنتيمتر) لـ 10 قطع يُراد قَصُّها من أسلاك نحاسية، طول كلٍّ منها 1 m :

58 45 18 55 47

12 63 30 19 41

(1) أحدِّد كيف تُقَصُّ القطع باستعمال خوارزمية المُلاءَمة الأولى، ثمَّ أُحدِّد عدد الأسلاك اللازمة لذلك باستعمال هذه الخوارزمية، ثمَّ أجد طول الجزء المهدور من الأسلاك جميعها.

$$58 + 45 + 18 + 55 + 47 + 12 + 36 + 30 + 19 + 41 = 361$$

$$1\text{ m} = 100\text{ cm}$$

$$\frac{361}{100} = 3.61 \approx 4$$

الحدُّ الأدنى من عدد الصناديق اللازمة لتعبئة العُلَب هو 4

عُلب الصندوق الأول	B1 : 58
عُلب الصندوق الثاني	B2 : 45 , 18
عُلب الصندوق الثالث	B3 : 55
عُلب الصندوق الرابع	B4 : 47 , 12
عُلب الصندوق الخامس	B5 : 63
عُلب الصندوق السادس	B6 : 30 , 19 , 42

طول الجزء المهدور :

$$42 + 37 + 45 + 41 + 37 + 9 = 211$$

(2) أحدِّد كيف تُقَصُّ القطع باستعمال خوارزمية المُلاءَمة الأولى المتناقصة ، ثمَّ أُحدِّد عدد الأسلاك اللازمة لذلك باستعمال هذه الخوارزمية، ثمَّ أجد طول الجزء المهدور من الأسلاك جميعها.

ترتيب تنازلي :

$63 \quad 58 \quad 55 \quad 47 \quad 45 \quad 42 \quad 30 \quad 19 \quad 18 \quad 12$

عُلب الصندوق الأول	$B1 : 63$
عُلب الصندوق الثاني	$B2 : 58$
عُلب الصندوق الثالث	$B3 : 55$
عُلب الصندوق الرابع	$B4 : 47, 45$
عُلب الصندوق الخامس	$B5 : 42, 30, 19$
عُلب الصندوق السادس	$B6 : 18, 12$

طول الجزء المهدور :

$$37 + 42 + 45 + 8 + 9 + 70 = 211$$

---

(3) أحدِّد كيف تُقَصُّ القطع باستعمال خوارزمية الصندوق الكامل ، ثمَّ أُحدِّد عدد الأسلاك اللازمة لذلك باستعمال هذه الخوارزمية، ثمَّ أجد طول الجزء المهدور من الأسلاك جميعها.

عُلب الصندوق الأول	$B1 : 58, 42$
عُلب الصندوق الثاني	$B2 : 45, 55$
عُلب الصندوق الثالث	$B3 : 63, 18, 19$
عُلب الصندوق الرابع	$B4 : 47, 12, 30$

طول الجزء المهدور : 11

---

(4) أيُّ الخوارزميات توصَّلْتُ بها إلى الحلِّ الأمثل؟ أُبرِّر إجابتي

خوارزمية الملاءمة الأولى : 6 صناديق

خوارزمية الملاءمة الأولى المتناقصة : 6 صناديق

خوارزمية الصندوق الكامل : 4 صناديق (الأمثل)

مثال 3 : يرغب مُدرِّب في صالة رياضية أنْ يُرتِّب على رفوفٍ الأثقالَ المُبيَّنة كتلها (بالكيلوغرام) في ما يلي، علمًا بأنَّه يُمكِن لكل رَفٍّ منها أنْ يحمل 40 kg في الحدِّ الأقصى. كيف يُمكِن للمُدرِّب أنْ يُرتِّب الأثقال باستعمال أقل عدد من الرفوف؟

18 16 24 16 20 10 12 8

16 12 10 4 12 6 13

(1) أحدِّد كيف تُرتَّب الأثقال على الرفوف باستعمال خوارزمية المُلاءَمة الأولى، ثمَّ أُحدِّد عدد الرفوف اللازمة لذلك باستعمال هذه الخوارزمية.

$$18 + 16 + 24 + 16 + 20 + 10 + 12 + 8 + 16 + 12 + 10 + 4 + 12 + 6 + 13 = 197$$

$$\frac{197}{40} = 4.925 \approx 5$$

إذن، الحدُّ الأدنى من عدد الصناديق اللازمة لتعبئة العُلَب هو 5 صناديق .

عُلب الصندوق الأول	$B1 : 18, 16$
عُلب الصندوق الثاني	$B2 : 24, 16$
عُلب الصندوق الثالث	$B3 : 20, 10$
عُلب الصندوق الرابع	$B4 : 12, 8, 16$
عُلب الصندوق الخامس	$B5 : 12, 10, 4, 12$
عُلب الصندوق السادس	$B6 : 6, 13$

---

(2) أحدِّد كيف تُرتَّب الأثقال على الرفوف باستعمال خوارزمية الصندوق الكامل، ثمَّ أُحدِّد عدد الرفوف اللازمة لذلك باستعمال هذه الخوارزمية.

عُلب الصندوق الأول	$B1 : 18, 10, 12$
عُلب الصندوق الثاني	$B2 : 16, 24$
عُلب الصندوق الثالث	$B3 : 16, 20, 4$
عُلب الصندوق الرابع	$B4 : 16, 12, 12$
عُلب الصندوق الخامس	$B5 : 10, 13, 6, 8$

مهارات التفكير العليا

مثال 1 : في ما يأتي أطوال 8 قطع خشبية (بالسنتيمتر) تَلزم لصنع خزانة صغيرة، ويُراد قَصُّها من ألواح خشبية :

20 35 50 60 20 70 75 20

(1) تتوافر ألواح خشبية، طول كلٍّ منها 1 m ، وسعرها 3 JD أستعمل خوارزمية المُلاءَمة الأولى المُتناقِصة لتحديد كيف تُقَصُّ القطع الخشبية من الألواح، ثمَّ أجد التكلفة الكلية لصنع الخزانة باستعمال هذه الخوارزمية، ثمَّ أحسُب الكمية المهدورة من الخشب.

ترتيب تنازلي :

75 70 60 50 35 20 20 20

$$75 + 70 + 60 + 50 + 35 + 20 + 20 + 20 = 350$$

$$\frac{350}{100} = 3.5 \approx 4$$

إذن، الحدُّ الأدنى من عدد الصناديق اللازمة لتعبئة العُلَب هو 4 صناديق .

B1 : 75
B2 : 70
B3 : 60
B4 : 50 , 35
B5 : 20 , 20 , 20

العدد هو : 5 ألواح ، اذن التكلفة تساوي :

$$5 \times 3 = 15 \text{ JD}$$

الفاقد هو :

$$25 + 30 + 40 + 15 + 40 = 150 \text{ cm} = 1.5 \text{ m}$$

---

(2) تتوافر ألواح خشبية، طول كلٍّ منها 1.5 m ، وسعرها 4 JD أستعمل خوارزمية المُلاءَمة الأولى المُتناقِصة لتحديد كيف تُقَصُّ القطع الخشبية من الألواح، ثمَّ أجد التكلفة الكلية لصنع الخزانة باستعمال هذه الخوارزمية، ثمَّ أحسُب الكمية المهدورة من الخشب.

ترتيب تنازلي :

75 70 60 50 35 20 20 20

$$75 + 70 + 60 + 50 + 35 + 20 + 20 + 20 = 350$$

$$\frac{350}{150} = 2.3 \approx 3$$

إذن، الحدُّ الأدنى من عدد الصناديق اللازمة لتعبئة العُلَب هو 3 صناديق .

B1 : 75 , 70
B2 : 60 , 50 , 35
B3 : 20 , 20 , 20

العدد هو : 3 ألواح ، اذن التكلفة تساوي :

$$3 \times 4 = 12 \text{ JD}$$

الفاقد هو : $5 + 5 + 90 = 100 \text{ cm} = 1 \text{ m}$

---

(3) أيُّ الخوارزميتين يُمكِن استعمالها لصنع الخزانة بتكلفة أقل ؟ أُبرِّر إجابتي.

الحالة (2) أقل كلفة 12 دينار بدل 15 دينار.

---

(4) ما أقل تكلفة لصنع الخزانة إذا أمكن استعمال الألواح التي طولها 1 m والألواح التي طولها 1.5 m معًا ؟ أُبرِّر إجابتي .

يمكن التقطيع في لوحين 1.5 m ولوح 1 m

(سعة 100 cm , 150 cm , 150 cm) مثلًا:

- لوح 1.5 m : (70 cm + 75 cm)
- لوح 1.5 m : (60 cm + 50 cm + 20 cm)
- لوح 1 m : (35 cm + 20 cm + 20 cm)

الكلفة: $3 + 4 + 4 = 11$ (الحدّ الأدنى) .

الفاقد: $25 + 20 + 5 = 50 \text{ cm} = 0.5 \text{ m}$

مثال 1 : تحدٍّ: في ما يأتي كتل 9 حقائب سفر (بالكيلوغرام) يُراد نقلها في حاويات، ويُمكِن لكلٍّ منها أنْ تحمل كتلة إجمالية أقصاها $50\ kg$:

24 14 8 x 19 25 6 17 9

إذا علمْتُ أنَّ كتلة إحدى الحقائب لم تُقَسْ قياسًا دقيقًا، ولتكن x كيلوغرامًا، حيث : $19 < x \le 23$ ، فأُجيب عن الأسئلة الآتية تباعًا :

(1) أُحدِّد كيف تُوزَّع الحقائب على الحاويات باستعمال خوارزمية المُلاءَمة الأولى .

$$24+14+8+x+9+25+6+17+9 = 112+x$$

$$\frac{112+x}{50} = \frac{112}{50}+\frac{x}{50} = 2.24+\frac{x}{50} \approx 3$$

$$19 < x \le 23$$

$$\frac{19}{50} < \frac{x}{50} \le \frac{23}{50}$$

$$0.38 < \frac{x}{50} \le 0.46$$

إذن، الحدُّ الأدنى من عدد الصناديق اللازمة لتعبئة العُلَب هو 3 صناديق .

B1 : 24 , 14 , 8
B2 : x , 19
B3 : 25 , 6 , 17
B4 : 9

---

(2) أُحدِّد الطريقتين المُمكِنتين لتوزيع الحقائب على الحاويات باستعمال خوارزمية المُلاءَمة الأولى المُتناقِصة .

الحالة (1) : اذا كانت قيمة x تساوي 23 :

ترتيب تنازلي :

25 24 x 19 17 14 9 8 6

$$24+14+8+x+9+25+6+17+9 = 135$$

$$\frac{135}{50} = 2.7 \approx 3$$

B1 : 25 , 24
B2 : x , 19
B3 : 17 , 14 , 9 , 8 , 6

الحالة (2) : اذا كانت : $19 < x < 23$:

ترتيب تنازلي :

25 24 x 19 17 14 9 8 6

$$24+14+8+x+9+25+6+17+9 = 112+x$$

$$\frac{112+x}{50} = \frac{112}{50}+\frac{x}{50} = 2.24+\frac{x}{50} \approx 3$$

$$19 < x < 23$$

$$\frac{19}{50} < \frac{x}{50} < \frac{23}{50}$$

$$0.38 < \frac{x}{50} < 0.46$$

B1 : 25 , 24
B2 : x , 19
B3 : 17 , 14 , 9 , 8 , 6

في كلتا الحالتين نحتاج ثلاث حاويات.

---

(3) أُحدِّد القيمة (القِيَم) المُمكِنة للمُتغيِّر x في كلٍّ من الطريقتين المُشار إليهما في السؤال السابق بعد توزيع الحقائب باستعمال خوارزمية المُلاءَمة الأولى المُتناقِص

للتوزيع (الحالة 1) :

B1 : 25 , 24
B2 : x , 19
B3 : 17 , 14 , 9 , 8 , 6

قيم المكنة x هي فقط 23

للتوزيع (الحالة 2) :

B1 : 25 , 24
B2 : x , 19
B3 : 17 , 14 , 9 , 8 , 6

قيم المكنة x هي : 23 , 21 , 20

يُـراد تعبئة العُلَب (المُعطى ارتفاعاتها في ما يلي) في صناديق، ارتفاع كلٍّ منها **45** وحدة طول. إذا علمْتُ أنَّ للعُلَب والصناديق المقطع العرضي نفسه، فأُجيب عن الأسئلة التالية:

11 6 13 17 5 35 20 4 9 18 23 16

1. أستعمل خوارزمية المُلاءَمة الأولى لتعبئة العُلَب في الصناديق، ثمَّ أُحدِّد عدد الصناديق اللازمة لذلك، ثمَّ أجد الارتفاع المهدور في الصناديق جميعها.
2. أستعمل خوارزمية المُلاءَمة الأولى المُتناقِصة لتعبئة العُلَب في الصناديق، ثمَّ أُحدِّد عدد الصناديق اللازمة لذلك، ثمَّ أجد الارتفاع المهدور في الصناديق جميعها.
3. أيُّ الخوارزميتين توصَّلْتُ بها إلى الحلِّ الأمثل؟ أُبرِّر إجابتي.

يُـراد تعبئة العُلَب (المُعطى ارتفاعاتها في ما يلي) في صناديق، ارتفاع كلٍّ منها **20** وحدة طول. إذا علمْتُ أنَّ للعُلَب والصناديق المقطع العرضي نفسه، فأُجيب عن الأسئلة التالية:

10 12 15 2 8 5 16 13 8 1 5

4. أستعمل خوارزمية المُلاءَمة الأولى لتعبئة العُلَب في الصناديق، ثمَّ أُحدِّد عدد الصناديق اللازمة لذلك، ثمَّ أجد الارتفاع المهدور في الصناديق جميعها.
5. أستعمل خوارزمية المُلاءَمة الأولى المُتناقِصة لتعبئة العُلَب في الصناديق، ثمَّ أُحدِّد عدد الصناديق اللازمة لذلك، ثمَّ أجد الارتفاع المهدور في الصناديق جميعها.
6. أستعمل خوارزمية الصندوق الكامل لتعبئة العُلَب في الصناديق، ثمَّ أُحدِّد عدد الصناديق اللازمة لذلك، ثمَّ أجد الارتفاع المهدور في الصناديق جميعها.
7. أيُّ الخوارزميات توصَّلْتُ بها إلى الحلِّ الأمثل؟ أُبرِّر إجابتي.

تخزيـن بيانات: في ما يأتي سـعات 8 ملفات حاسـوبية (بالميجابايت) يُـراد حفظها في أقراص تخزين، سـعة كلٍّ منها 50 ميجابايت:

17 35 14 10 34 11 29 23

8 أُحدِّد كيف تُحفَظ الملفات في الأقراص باسـتعمال خوارزمية المُلاءَمة الأولـى، ثمَّ أُحدِّد عدد الأقراص اللازمة لذلك باستعمال هذه الخوارزمية، ثمَّ أجد مساحة التخزين المهدورة في الأقراص.

9 أُحدِّد كيف تُحفَظ الملفات في الأقراص باسـتعمال خوارزمية الصندوق الكامل، ثمَّ أُحدِّد عدد الأقراص اللازمة لذلك باستعمال هذه الخوارزمية، ثمَّ أجد مساحة التخزين المهدورة في الأقراص.

10 أيُّ الخوارزميتين توصَّلْتُ بها إلى الحلِّ الأمثل؟ أُبرِّر إجابتي.

خشب: في ما يأتي أطوال 10 قطع خشبية (بالمليمتر)، يرادُ قَصُّها من ألواح خشبية كبيرة تُباع بطول 1 m:

452 550 290 710 134 455 643 245 431 650

11 أُحدِّد كيف تُقَصُّ القطع الخشـبية من الألواح باستعمال خوارزمية المُلاءَمة الأولى، ثمَّ أُحدِّد عدد الألواح اللازمة لذلك باستعمال هذه الخوارزمية، ثمَّ أجد طول الجزء المهدور في الخشب.

12 أُحدِّد كيف تُقَصُّ القطع الخشـبية من الألواح باسـتعمال خوارزمية المُلاءَمة الأولـى المُتناقِصة، ثمَّ أُحدِّد عدد الألواح اللازمة لذلك باستعمال هذه الخوارزمية، ثمَّ أجد طول الجزء المهدور في الخشب.

13 أيُّ الخوارزميتين توصَّلْتُ بها إلى الحلِّ الأمثل؟ أُبرِّر إجابتي.

شحن: في ما يأتي كتل 10 صناديق (بالكيلوغرام)، يُراد نقلها في شاحنات، تحمل كلٌّ منها كتلة إجمالية أقصاها 300 kg:

125 90 30 60 150 100 105 210 135 175

14 أُحدِّد كيف تُوزَّع الصناديق على الشاحنات باستعمال خوارزمية المُلاءَمة الأولى، ثمَّ أُحدِّد عدد الشاحنات اللازمة لذلك باستعمال هذه الخوارزمية.

15 أُحدِّد كيف تُوزَّع الصناديق على الشاحنات باستعمال خوارزمية المُلاءَمة الأولى المُتناقِصة، ثمَّ أُحدِّد عدد الشاحنات اللازمة لذلك باستعمال هذه الخوارزمية.

16 أيُّ الخوارزميتين توصَّلْتُ بها إلى الحلِّ الأمثل؟ أُبرِّر إجابتي.

أنابيب: في ما يأتي أطوال 8 قطع بلاستيكية (بالسنتيمتر)، يرادُ قَصُّها من أنابيب، طول كلٍّ منها 50 cm:

21 27 21 29 18 30 22 25

17 أُحدِّد كيف تُقَصُّ القطع من الأنابيب باستعمال خوارزمية المُلاءَمة الأولى المُتناقِصة، ثمَّ أُحدِّد عدد الأنابيب اللازمة لذلك باستعمال هذه الخوارزمية، ثمَّ أجد طول الجزء المهدور في الأنابيب.

18 أُحدِّد كيف تُقَصُّ القطع من الأنابيب باستعمال خوارزمية الصندوق الكامل، ثمَّ أُحدِّد عدد الأنابيب اللازمة لذلك باستعمال هذه الخوارزمية، ثمَّ أجد طول الجزء المهدور في الأنابيب.

19 أيُّ الخوارزميتين توصَّلْتُ بها إلى الحلِّ الأمثل؟ أُبرِّر إجابتي.

الدرس الثالث : المخططات

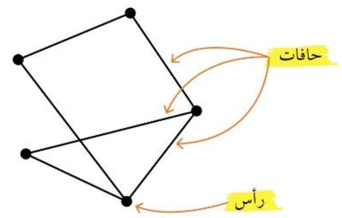
Graphs

1. المخططات .

تنطوي العديد من المواقف الحياتية على روابط بين أشخاص أو أماكن أو أشياء مختلفة . فمثلاً :

- ترتبط المدن بعضها ببعض عبر الطرق
- تتصل أجهزة الحاسوب بعضها ببعض عبر شبكات الإنترنت

ويُمكِن التعبير عن كلٍّ من هذه الروابط بتمثيل بياني يُسمّى **المُخطَّط**؛ وهو وسيلة تُظهِر كيف ترتبط الأشياء المختلفة بصريًّا، بحيث يُعبِّر عن هذه الأشياء بعُقَد تُسمّى **الرؤوس** ويُعبَّر عن الروابط بين **الرؤوس** (إنْ وُجِدت) بخطوط (أو منحنيات) متصلة تُسمّى **الحافات** كما يظهر في الشكل المجاور



نظرية المُخطَّطات : هي تسمية لفرع من فروع الرياضيات يُعْنى بدراسة المُخطَّطات .

مثال 1 : الباص السريع : أتأمَّل الشكل الآتي الذي يُبيِّن شبكة الباص السريع داخل مدينة عمّان، ثمَّ أُجيب عن الأسئلة التالية تباعًا :

(1) هل يُعَدُّ الشكل السابق مُخطَّطًا؟ أُبرِّر إجابتي.

الحــل:

نعم؛ لأنَّه يحتوي على رؤوس، وعلى حافات بين بعض هذه الرؤوس.

(2) أَصِف ما تُمثِّله كلٌّ من الرؤوس والحافات في المُخطَّط؟

الرؤوس : تمثل المَحطّات التي يتوقَّف عندها الباص السريع

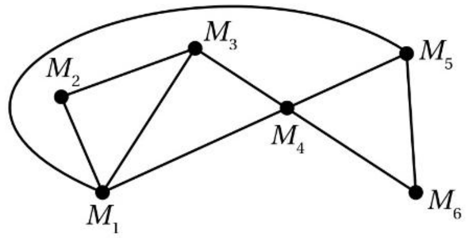
الحافات : تمثل مسارات الباص السريع بين المَحطّات .

----

(3) أُحدِّد المَحطّات التي سيمرُّ بها الباص في رحلة من مُجمَّع المَحطّة إلى حدائق الملك عبد الله .

المَحطّات التي سيمرُّ بها الباص أثناء الرحلة هي: مستشفى الأميرحمزة، وتقاطع طارق ، ومُجمَّع الشمال، ودوّار المدينة الرياضية .

مثال 2 : طيران: أتأمَّل الشكل المجاور الذي يُبيِّن المسارات الجوية التي تتبعها طائرات إحدى شركات الطيران ، ثمَّ أُجيب عن الأسئلة الآتية تباعًا :



(1) هل يُعَدُّ الشكل السابق مُخطَّطًا؟ أُبرِّر إجابتي.

نعم؛ لأنَّه يحتوي على رؤوس، وعلى حافات بين بعض هذه الرؤوس.

----

(2) أَصِف ما تُمثِّله كلٌّ من الرؤوس والحافات في المُخطَّط؟

الرؤوس : تمثل طائرات إحدى شركات الطيران .

الحافات : تمثل المسارات الجوية التي تتبعها تلك طائرات .

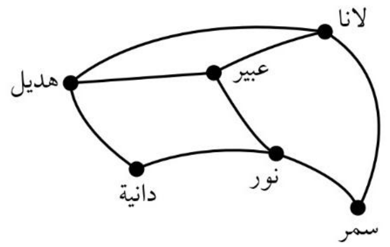
----

(3) أُحدِّد المَحطّات التي ستمرُّ بها إحدى الطائرات التابعة للشركة في رحلة من الرأس M_1 إلى الرأس M_6 (أذكر حلَّين مختلفين) .

الحل الأول : المَحطّات التي ستمر بها الطائرات أثناء الرحلة هي : M_4

الحل الثاني : المَحطّات التي ستمر بها الطائرات أثناء الرحلة هي : M_5 , M_4 , M_3 , M_2

مثال 3 : أتأمَّل الشكل المجاور الذي يُبيِّن علاقات الصداقة التي تربط بين مجموعة من الفتيات في أحد مواقع التواصل الاجتماعي، ثمَّ أُجيب عن كلٍّ ممّا يأتي :



(1) هل يُعَدُّ الشكل السابق مُخطَّطًا؟ أُبرِّر إجابتي.

نعم؛ لأنَّه يحتوي على رؤوس، وعلى حافات بين بعض هذه الرؤوس.

---

(2) أَصِف ما تُمثِّله كلٌّ من الرؤوس والحافات في المُخطَّط؟

الرؤوس : الفتيات في احد مواقع التواصل الاجتماعي .

الحافات : علاقة الصداقة التي تربط الفتيات .

---

(3) كم صديقة للانا في هذا الموقع ؟

عدد أصدقاء لانا هو عدد الرؤوس التي تربط بينها وبين لانا

اذن يوجد : هديل و عبير و سمر

اذن يوجد 3 صديقات للانا

---

(4) من الصديقات المشتركات بين عبير ودانية ؟

أصدقاء عبير: هديل و لانا و نور

أصدقاء دانية : نور و هديل

اذن الصديقات المشتركات بين عبير ودانية هم : هديل و نور

2. المخططات الموزونة .

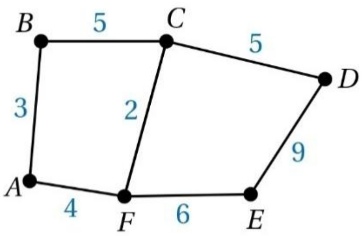
المُخطَّط الموزون : هو المُخطَّط الذي يحوي قيمة مُقترِنة بكل حافة من حافاته اسم ، وتُمثِّل هذه القِيَم مقاييس عديدة، مثل : المسافة، والتكلفة، والزمن .

يُمكِن استعمال المُخطَّطات الموزونة لحلِّ العديد من المسائل الحياتية والعلمية، مثل :

1. تحديد المسار الذي يُمكِن به الوصول من موقع إلى آخر في إحدى المدن عبر أقصر مسار مُمكِن ، أو بأقل تكلفة مُمكِنة

وبلغة المُخطَّطات، فإنَّ المسار من الرأس A إلى الرأس B هو مجموعة من الحافات ، تبدأ بالرأس A ، وتنتهي بالرأس B ، وقد يتكرَّر في المسار أيٌّ من الرؤوس والحافات .

مثال 1 : طرق: يُبيِّن الشكل المجاور مُخطَّطًا للطرق الرئيسة في إحدى المدن، ويُمثِّل العدد على كل حافةٍ المسافة (بالكيلومترات) بين كل منطقتين في المدينة :



(1) أجد طول المسار المباشر بين المنطقة F والمنطقة C .

طول المسار المباشر بين هاتين المنطقتين هو: 2 km

---

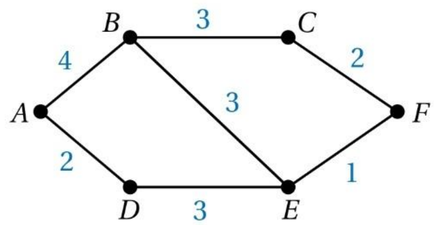
(2) أحدد أقصر مسار بين المنطقة A والمنطقة D .

لتحديد أقصر مسار بين هاتين المنطقتين، أُحدِّد أوَّلًا جميع المسارات التي تصل بينهما، وأجد طول كلٍّ منها، ثمَّ أُحدِّد أقصر مسار بين هذه المسارات :

المسار	طول المسار (بالكيلومترات)
$ABCD$	$3+5+5=13$ km
$AFED$	$4+6+9=19$ km
$AFCD$	$4+2+5=11$ km
$ABCFED$	$3+5+2+6+9$ $=25$ km

إذن، أقصر مسار بين المنطقة A والمنطقة D هو $AFCD$ ، وطوله 11 km

مثال 2 : طرق: يُبيِّن الشكل المجاور مُخطَّطًا للطرق الرئيسة بين مجموعة من المدن، ويُمثِّل العدد على كل حافةٍ الزمن (بالساعات) الذي تستغرقه سيّارة في قطع المسافة بين كل مدينتين :



(1) أُحدِّد الزمن الذي تستغرقه السيّارة في قطع المسار المباشر بين المدينة B والمدينة E .

طول المسار المباشر بين هاتين المنطقتين هو: 3 km

---

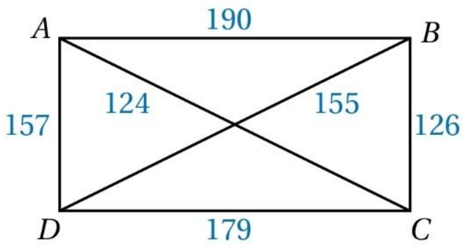
(2) أُحدِّد أقل زمن تستغرقه السيّارة في الوصول من المدينة A إلى المدينة F ، والمسار الذي تتبعه في هذه الرحلة .

لتحديد أقصر مسار بين هاتين المنطقتين، أُحدِّد أوَّلًا جميع المسارات التي تصل بينهما، وأجد طول كلٍّ منها، ثمَّ أُحدِّد أقصر مسار بين هذه المسارات :

المسار	طول المسار (بالكيلومترات)
$ABCF$	$4+3+2=9$ km
$ADEF$	$2+3+1=6$ km
$ABEF$	$4+3+1=8$ km
$ADEBCF$	$2+3+3+3+2$ $=13$ km

إذن، أقصر مسار بين المنطقة A والمنطقة F هو $ADEF$ ، وطوله 6 km

مثال 3 : مندوب مبيعات: يُبيِّن الشكل المجاور مُخطَّطًا لتكلفة تنقُّل مندوب مبيعات بين مجموعة من المحافظات الأردنية للترويج لمُنتَج جديد، حيث يُمثِّل العدد على كل حافةٍ التكلفة بالدينار للتنقُّل بين كل محافظتين :



(1) أجد تكلفة ذهاب مندوب المبيعات في مسار مباشر من المحافظة A إلى المحافظة B ، ثمَّ إلى المحافظة C .

التكلفة هي : $190\text{ JD}+126\text{ JD}=316\text{ JD}$

---

(2) أُحدِّد أقل تكلفة للذهاب من المحافظة B إلى المحافظة D ، ثمَّ أُحدِّد المسار الذي اتخذته لذلك.

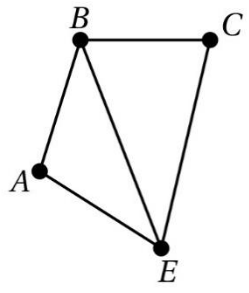
لتحديد أقل تكلفة بين هاتين المنطقتين، أُحدِّد أوَّلًا جميع المسارات التي تصل بينهما، وأجد طول كلٍّ منها، ثمَّ أُحدِّد أقصر مسار بين هذه المسارات :

المسار	طول المسار (بالكيلومترات)
BD	155 JD
BAD	$190+157=347$ km
BCD	$126+179=305$ km
$BACD$	$190+124+179$ $=493$ km
$BCAD$	$126+124+157$ $=407$ km

إذن، أقصر مسار بين المحافظة B والمحافظة D هو BD ، والتكلفة هي 155 JD

3. المخططات الموزونة .

في ما يأتي بعض التعريفات الأساسية الخاصة بنظرية المُخطَّطات :



المُخطَّط R

- **مجموعة الرؤوس** : مجموعة تحوي جميع رؤوس المُخطَّط فمثلاً ، مجموعة رؤوس المُخطَّط R المجاور هي :
(A, B, C, E)

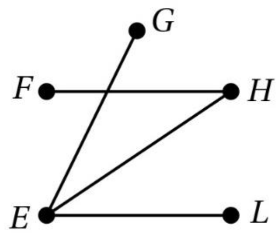
- **مجموعة الحافات** : مجموعة تحوي جميع حافات المُخطَّط فمثلاً ، مجموعة حافات المُخطَّط R المجاور هي :
(AB, AE, BC, BE, CE)
حيث يُعبِّر الرمز AB مثلًا عن الحافة بين الرأس A والرأس B

- **درجة الرأس** : عدد يُعبِّر عن عدد الحافات التي تلتقي عند الرأس . فمثلًا :
درجة الرأس A في المُخطَّط R أعلاه هي 2 (درجة زوجية)
درجة الرأس B في المُخطَّط نفسه هي 3 (درجة فردية)

- **مجموعة الدرجات** : مجموعة تحوي جميع درجات رؤوس المُخطَّط . فمثلاً ، مجموعة الدرجات للمُخطَّط R أعلاه هي :
$$deg\ R = (2, 2, 3, 3)$$

رموز رياضية : يُرمَز إلى مجموعة درجات المُخطَّط R أعلاه بالرمز deg R علمًا بأنَّ deg اختصار للكلمة الإنجليزية degree التي تعني الدرجة

مثال 1 : أتأمَّل المُخطَّط R المجاور، ثمَّ أُجيب عن كلٍّ ممّا يأتي :



المُخطَّط R

(1) أُحدِّد مجموعة الرؤوس ومجموعة الحافات .

مجموعة الرؤوس هي : (E, F, G, H, L)

مجموعة الحافات هي : (EL, EH, EG, FH)

---

(2) أُحدِّد درجة كل رأس، ونوعها .

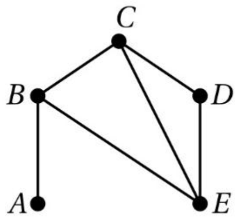
الرأس	الدرجة	نوع الدرجة
E	3	فردية
F	1	فردية
G	1	فردية
H	2	زوجية
L	1	فردية

---

(3) أُحدِّد مجموعة الدرجات للمُخطَّط.

$$\deg R = (1, 1, 1, 2, 3)$$

مثال 2 : أتأمَّل المُخطَّط G المجاور، ثمَّ أُجيب عن كلٍّ ممّا يأتي :



المُخطَّط G

(1) أُحدِّد مجموعة الرؤوس ومجموعة الحافات .

مجموعة الرؤوس هي : (A, B, C, D, E)

مجموعة الحافات هي : (AB, BC, CD, DE, BE, CE)

(2) أُحدِّد درجة كل رأس، ونوعها .

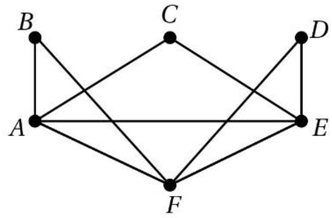
الرأس	الدرجة	نوع الدرجة
A	1	فردية
B	3	فردية
C	3	فردية
D	2	زوجية
E	3	فردية

---

(3) أُحدِّد مجموعة الدرجات للمُخطَّط .

$\deg G = (1, 2, 3, 3, 3)$

مثال 3 : أتأمَّل المُخطَّط المجاور، ثمَّ أُجيب عن كلٍّ ممّا يأتي :



(1) أُحدِّد مجموعة الرؤوس ومجموعة الحافات .

مجموعة الرؤوس هي : (A, B, C, D, E, F)

مجموعة الحافات هي :

$(AB, BF, FD, DE, AF, FE, AE, AC, CE)$

---

(2) أُحدِّد درجة كل رأس، ونوعها .

الرأس	الدرجة	نوع الدرجة
A	4	زوجية
B	2	زوجية
C	2	زوجية
D	2	زوجية
E	4	زوجية
F	4	زوجية

---

(3) أُحدِّد مجموعة الدرجات للمُخطَّط .

$\deg = (2, 2, 2, 4, 4, 4)$

4. مجموع درجات رؤوس المخطط .

يُمكِن أيضًا إيجاد مجموع درجات رؤوس أيِّ مُخطَّط إذا عُلِم عدد حافاته، وذلك بضرب عدد حافاته في 2 ؛ لأنَّ كل حافة ترتبط برأسين .

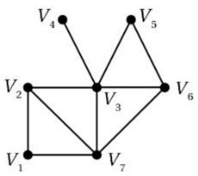
مفهوم أساسي : مجموع درجات رؤوس المخطط

إذا كان لمُخطَّطٍ n من الرؤوس، و E من الحافات، فإنَّه يُمكِن إيجاد مجموع درجات رؤوس هذا المُخطَّط باستعمال العلاقة الآتية :

$$\sum_{k=1}^{n} (\deg V_k) = 2E$$

حيث $\deg V_k$ درجة الرأس V_k .

مثال 1



(1) أجد مجموع درجات رؤوس المُخطَّط المجاور .

للمُخطَّط المجاور 10 حافات؛ لذا يُمكِن إيجاد مجموع درجات رؤوسه كالآتي :

$$\sum_{k=1}^{n} (\deg V_k) = 2E = 2(10) = 20$$

إذن ، مجموع درجات رؤوس المُخطَّط هو : 20

---

(2) مُخطَّط له 6 رؤوس و 9 حافات، ودرجات رؤوسه هي :

$x\ ,2x\ ,2x-1\ ,x+1\ ,x^2-1$

أجد قيمة المتغير x .

$$\sum_{k=1}^{n} (\deg V_k) = 2E$$

$x + 2x + 2x - 1 + x + 1 + x + 1 + x^2 - 1 = 2(9)$

$x^2 + 7x = 18$

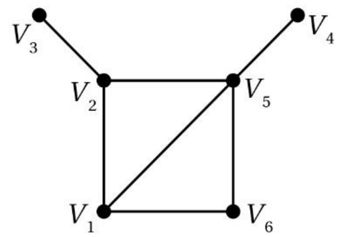
$x^2 + 7x - 18 = 0$

$(x+9)(x-2) = 0$

$x = -9 \quad or \quad x = 2$

من غير المُمكِن أنْ يكون x سالبًا. إذن : $x = 2$

مثال 2



(1) أجد مجموع درجات رؤوس المُخطَّط المجاور.

للمُخطَّط المجاور 7 حافات؛ لذا يُمكِن إيجاد مجموع درجات رؤوسه كالآتي:

$$\sum_{k=1}^{n}(\deg V_k) = 2E$$

$$\sum_{k=1}^{n}(\deg V_k) = 2(7) = 14$$

إذن، مجموع درجات رؤوس المُخطَّط هو: 14

---

(2) مُخطَّط له 5 رؤوس و 6 حافات، ودرجات رؤوسه هي:

$x\,,x^2+2\,,3x-1\,,3x\,,2x+1$

أجد قيمة المتغير x.

$$\sum_{k=1}^{n}(\deg V_k) = 2E$$

$$x + x^2 + 2 + 3x - 1 + 3x + 2x + 1 = 2(6)$$

$$x^2 + 9x + 2 = 12$$

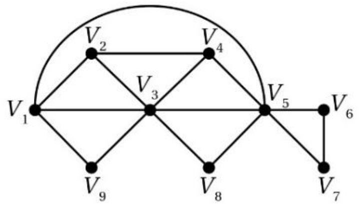
$$x^2 + 9x - 10 = 0$$

$$(x+10)(x-1) = 0$$

$$x = -10 \quad or \quad x = 1$$

من غير المُمكِن أنْ يكون x سالبًا. إذن: $x = 1$

مثال 2: أجد مجموع درجات رؤوس المُخطَّط المجاور.



$$\sum_{k=1}^{n}(\deg V_k) = 2E = 2(15) = 30$$

مثال 2: مُخطَّط له 5 رؤوس و 6 حافات، ودرجات رؤوسه هي

$x\,,2x\,,x^2+3\,,x+1\,,2x+1$

أجد قيمة المتغير x.

$$\sum_{k=1}^{n}(\deg V_k) = 2E$$

$$x + 2x + x^2 + 3 + x + 1 + 2x + 1 = 2(6)$$

$$x^2 + 6x + 5 = 12$$

$$x^2 + 6x - 7 = 0$$

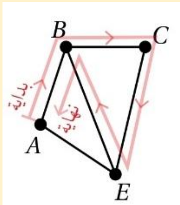
$$(x+7)(x-1) = 0$$

$$x = -7 \quad or \quad x = 1$$

من غير المُمكِن أنْ يكون x سالبًا. إذن: $x = 1$

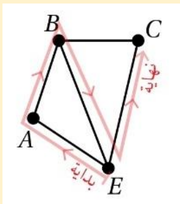
5. الممشى والممر والطريق والدارة والحلقة في المُخطَّط.

الممشى (walk)



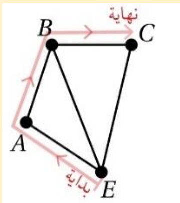
سلسلة من الحافات في المُخطَّط، تُمثِّل فيها نهاية كل حافةٍ بداية حافة أُخرى، ما عدا الحافة الأخيرة. فمثلًا :
ABCEBA : ممشى في المُخطَّط المجاور .

الممر (trail)



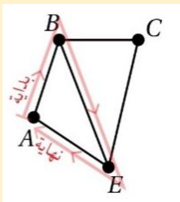
ممشى لا تتكرَّر فيه أيُّ حافة، ويُمكِن أنْ تتكرَّر فيه الرؤوس .
فمثلاً : *EABEC* ممر في المُخطَّط المجاور .

الطريق (path)



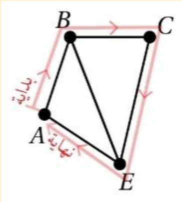
ممر لا يتكرَّر فيه أيُّ رأس . فمثلاً :
EABC : طريق في المُخطَّط المجاور .

الدارة (circuit)



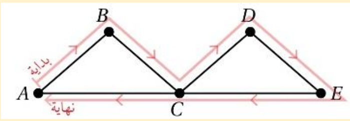
ممر رأس بدايته هو نفسه رأس نهايته، ولا يتكرَّر فيه أيُّ رأس، ما عدا رأس البداية ورأس النهاية. فمثلاً :
ABEA : دارة في المُخطَّط المجاور .

دارة هاملتون (Hamiltonian circuit)



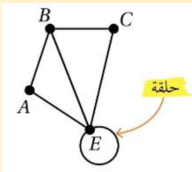
دارة تحوي جميع رؤوس المُخطَّط . فمثلاً :
ABCEA : دارة هاملتون في المُخطَّط المجاور .

دارة أويلر (Eulerian circuit)



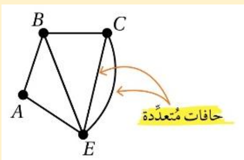
ممر رأس بدايته هو نفسه رأس نهايته، وهو يشمل جميع حافات المُخطَّط من دون تكرار . فمثلاً :
ABCDECA : دارة أويلر في المُخطَّط المجاور .

الحلقة (loop)



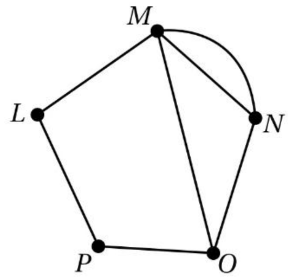
حافة تبدأ بالرأس نفسه ، وتنتهي به . فمثلاً :
EE : حلقة في المُخطَّط المجاور .

الحافات المتعددة (multiple edges)



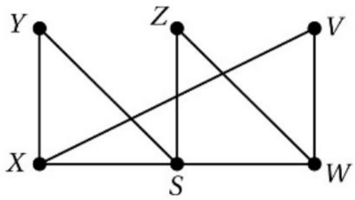
حافتان أو مجموعة من الحافات التي تربط زوجًا من الرؤوس.
فمثلًا، الحافات المُتعدِّدة في المُخطَّط المجاور تربط بين الرأس *E* والرأس C .

مثال 1 : أتأمَّل المُخطَّط المجاور، ثمَّ أُحدِّد فيه ممشًى لا يُمثِّل ممرًّا، وممرًّا لا يُمثِّل طريقًا، وطريقًا، ودارةً، ودارة هاملتون (إنْ وُجِدت)، ودارة أويلر (إنْ وُجِدت) .



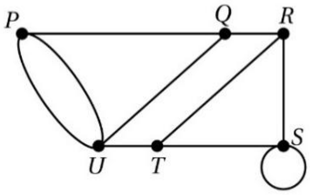
- ممشى لا يُمثِّل ممرًّا POMNOP .
- ممر لا يُمثِّل طريقًا MLPOMN .
- طريق MLPO .
- دارة LMOPL .
- دارة هاملتون LMNOPL .
- دارة أويلر : لا يُمكِن إيجاد دارة أويلر في هذا المُخطَّط .

مثال 2 : أتأمَّل المُخطَّط المجاور، ثمَّ أُحدِّد فيه ممشًى لا يُمثِّل ممرًّا، وممرًّا لا يُمثِّل طريقًا، وطريقًا، ودارةً، ودارة هاملتون (إنْ وُجِدت)، ودارة أويلر (إنْ وُجِدت) .



- ممشى لا يُمثِّل ممرًّا XS .
- ممر لا يُمثِّل طريقًا YZSXSW.
- طريق XYZV.
- دارة XYZSX.
- دارة هاملتون XYZVWSX .
- دارة أويلر : لا يُمكِن إيجاد دارة أويلر في هذا المُخطَّط .

مثال 3 : أتأمَّل المُخطَّط المجاور، ثمَّ أجيب عن كل مما يأتي :



(1) أحدد مجموعة الرؤوس و مجموعة الحافات .

مجموعة الرؤوس هي : (P, Q, R, S, T, U)

مجموعة الحافات هي :

$(PU, UP, PQ, QU, QR, UT, RT, RS, TS, SS)$

---

(2) أجد مجموع درجات رؤوس المخطط .

للمُخطَّط المجاور 10 حافات؛ لذا يُمكِن إيجاد مجموع درجات رؤوسه كالآتي :

$$\sum_{k=1}^{n}(\deg V_k) = 2E$$

$$\sum_{k=1}^{n}(\deg V_k) = 2(10) = 20$$

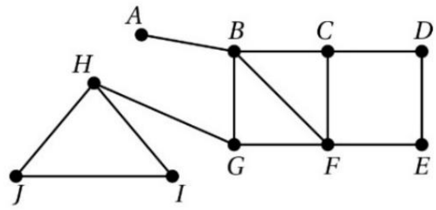
إذن ، مجموع درجات رؤوس المُخطَّط هو : 20

---

(3) أُحدِّد في المُخطَّط ممشًى لا يُمثِّل ممرًّا، وممرًّا لا يُمثِّل طريقًا ، وطريقًا، ودارةً، ودارة هاملتون (إنْ وُجِدت)، ودارة أويلر (إنْ وُجِدت) .

- ممشى لا يُمثِّل ممرًّا TSTS .
- ممر لا يُمثِّل طريقًا UTSRQPU .
- طريق PQRS .
- دارة PQRTUP .
- دارة هاملتون PQRSTUP .
- دارة أويلر : لا يُمكِن إيجاد دارة أويلر في هذا المُخطَّط .

مثال 4 : أتأمَّل المُخطَّط المجاور، ثمَّ أحدد فيه :



(1) ممشًى لا يُمثِّل ممرًّا : GHG

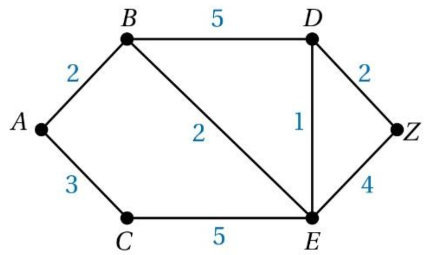
(2) ممرًّا لا يُمثِّل طريقًا : BFCB

(3) خمسة طرق من B إلى D

BCD , BFED , BFCD , BGFED , BGFCD

(4) دارة : CDEFC

مثال 5 : طرق: يُبيِّن الشكل المجاور مُخطَّطًا للطرق الرئيسة التي تصل بين مجموعة من المناطق في إحدى المدن، ويُمثِّل العدد على كل حافةٍ المسافة (بالكيلومتر) بين كل منطقتين :



(1) أُحدِّد طول أقصر مسار بين المنطقة A والمنطقة Z، ثمَّ أُحدِّد المسار الذي اتخذته لذلك .

الحـــــــل:

المسار ABEDZ وطولها :

$2 + 2 + 1 + 2 = 7$ km

وهو الأقصر

---

(2) أجد دارة تبدأ بالرأس B، وتنتهي به، ثمَّ أجد طولها بالكيلومتر.

الحـــــــل:

مثلًا : BDEB وطولها :

$5 + 1 + 2 = 8$ km

---

(3) أجد دارة هاملتون، ثمَّ أجد طولها بالكيلومتر.

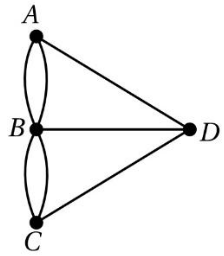
الحـــــــل:

ABDZECA وطولها :

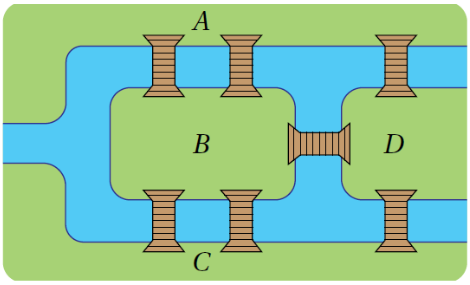
$2 + 5 + 2 + 4 + 5 + 3 = 21$ km

مثال 6 : جسور: يُبيِّن الشكل المجاور مُخطَّطًا للمسألة الواردة في بند (مسألة اليوم) .

أستعين بالمُخطَّط وما تعلَّمْتُه في هذا الدرس عن دارة أويلر للإجابة عن المسألة، ثمَّ أُبرِّر إجابتي .



يُبيِّن الشكل المجاور 4 مناطق في مدينة، يفصل بينها نهر مُتفرِّع، وقد أُنشِئت 7 جسور بين تلك المناطق. هل يُمكِن زيارة المناطق الأربع جميعها، بَدْءًا بإحداها؛ شرط عبور الجسور السبعة جميعها وعدم عبور أيِّ جسر منها مَرَّتين، ثمَّ العودة إلى نقطة البداية .



الحـــــــل:

لا يمكن ذلك .

نمثّل المناطق بالرؤوس A , B , C , D والجسور بالأضلاع .

درجات الرؤوس هي :

$$\deg(A) = 3 \quad , \quad \deg(B) = 5$$
$$\deg(C) = 3 \quad , \quad \deg(D) = 3$$

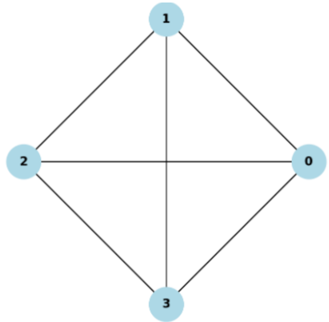
أي أن لدينا 4 رؤوس درجاتها فردية (وهذا غير ممكن في دارة اويلر لأنه في دارة اويلر رأس البداية والنهاية يجب ان يكون درجته زوجية)

فلا يمكن عبور الجسور السبعة مرة واحدة (ولا العودة لنقطة البداية). وبالتالي لا يمكن تنفيذ المطلوب .

مهارات التفكير العليا

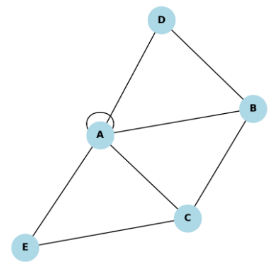
مثال 7 : مسألة مفتوحة: أرسم مُخطَّطًا يُحقِّق الوصف المُعطى في كلٍّ ممّا يأتي :

(1) يتضمَّن المُخطَّط 4 رؤوس، و 6 حافات .



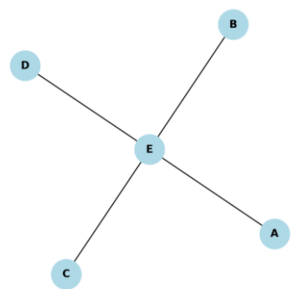
---

(2) يتضمَّن المُخطَّط 5 رؤوس، و 8 حافات، وحلقة واحدة .



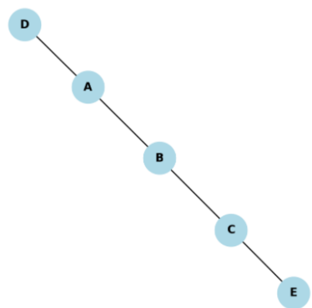
---

(3) يتضمَّن المُخطَّط 4 رؤوس درجاتها فردية، ورأسًا درجته زوجية .

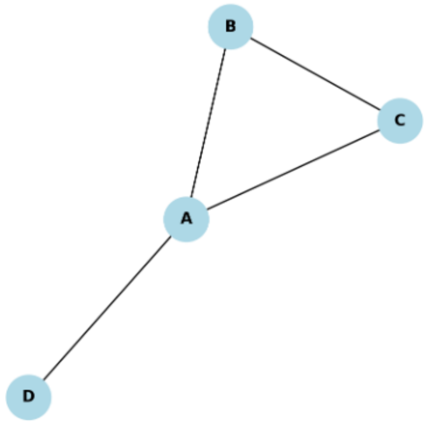


---

(4) يتضمَّن المُخطَّط 3 رؤوس درجة كلٍّ منها 2، ورأسين درجة كلٍّ منهما 1 .

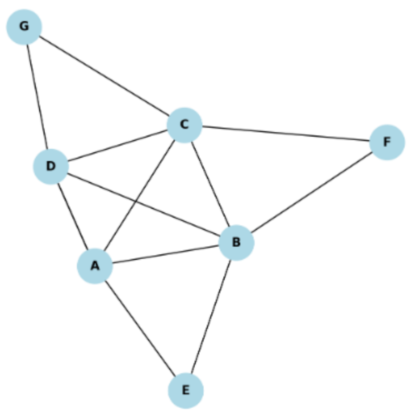


(5) يتضمَّن المُخطَّط رأسين درجة كلٍّ منهما 2، ورأسًا درجته 3 ورأسًا درجته 1 .

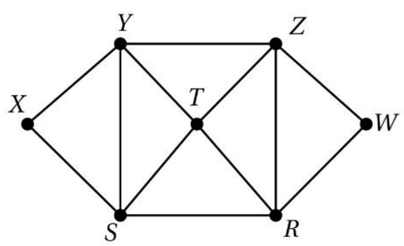


---

(6) يتضمَّن المُخطَّط 4 رؤوس درجة كلٍّ منها 5، و 3 رؤوس درجة كلٍّ منها 2 .



مثال 8 : تحدٍّ : أتأمَّل المُخطَّط المجاور، ثمَّ أُجيب عن السؤالين الآتيين :



(1) أُحدِّد دارة هاملتون في المُخطَّط .

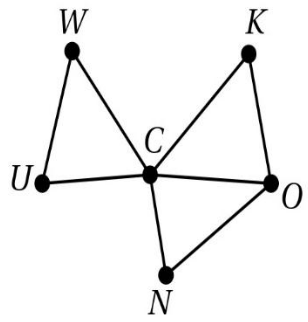
XYTZWRSX

---

(2) أُحدِّد دارة أويلر في المُخطَّط .

XYSTYZWRZTRSX

أتأمَّل الشــكل المجاور الذي يُبيِّن مُخطَّطًا للطرق الرئيسة بين مجموعة من المدن، ثمَّ أُجيب عن الأسئلة الآتية تباعًا:

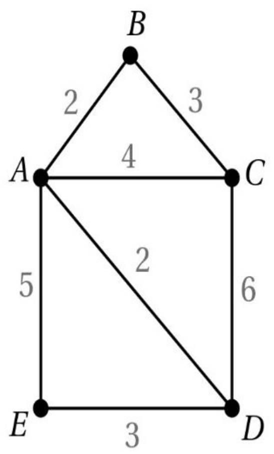


1 أَصِف ما تُمثِّله كلٌّ من الرؤوس والحافات في المُخطَّط؟

2 أَصِف مسارين مُحتمَلين يُمكِن بهما الوصول من المدينة W إلى المدينة O.

3 ما عدد المدن التي ترتبط بها المدينة C مباشرة؟

تكلفة: يُبيِّن الشكل المجاور مُخطَّطًا لتكلفة استعمال سيّارة رُكّاب صغيرة للتنقُّل بين مناطق عِدَّة في مدينة عمّان، حيث يُمثِّل العدد على كل حافةٍ التكلفةِ بالدينار للتنقُّل بين كل منطقتين:

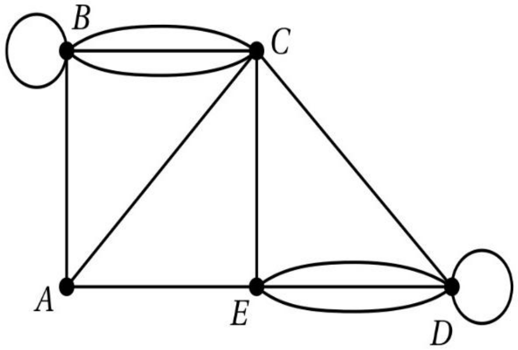


4 أجد تكلفة الذهاب من المنطقة C إلى المنطقة D مباشرة.

5 أُحدِّد أقل تكلفة للذهاب من المنطقة A إلى المنطقة D، ثمَّ أُحدِّد المســار الذي اتخذته لذلك.

6 أُحدِّد أقل تكلفة للذهاب من المنطقة B إلى المنطقة E، ثمَّ أُحدِّد المسار الذي اتخذته لذلك.

أتأمّل المُخطَّط المجاور، ثمَّ أُجيب عن كلٍّ ممّا يأتي:

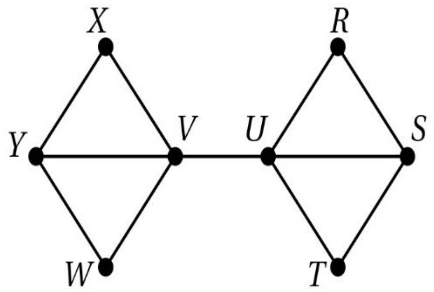


7 أُحدِّد مجموعة الرؤوس ومجموعة الحافات.

8 أُحدِّد درجة كل رأس من رؤوس المُخطَّط، ونوعها.

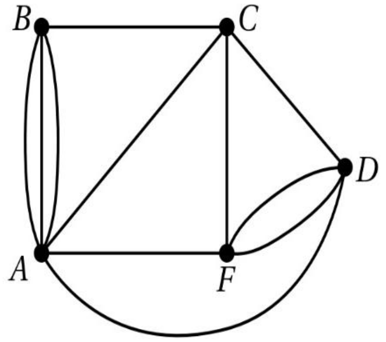
9 أُحدِّد مجموعة الدرجات للمُخطَّط.

10 أُحـدِّد جميع الطرق التـي تصل بين الـرأس X والرأس T في المُخطَّط المجاور.

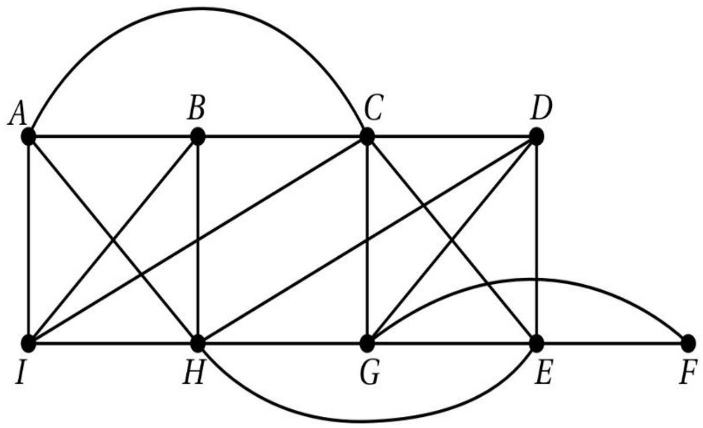


أجد مجموع درجات الرؤوس في كلٍّ من المُخطَّطين الآتيين:

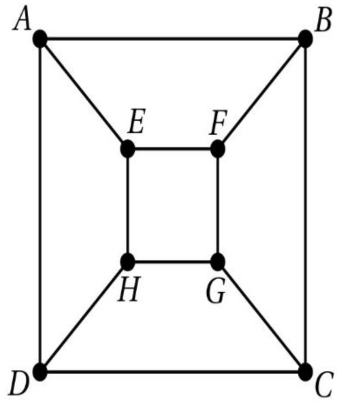
11



12



أتأمّل المُخطَّط المجاور، ثمَّ أُجيب عن كلٍّ ممّا يأتي:



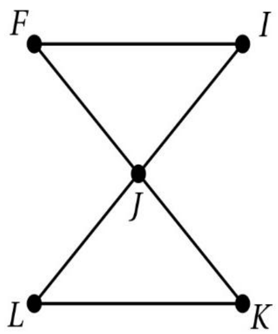
13 أُحدِّد مجموعة الرؤوس ومجموعة الحافات.

14 أُحدِّد درجة كل رأس من رؤوس المُخطَّط، ونوعها.

15 أُحدِّد مجموعة الدرجات للمُخطَّط.

16 أُحدِّد في المُخطَّط ممشًى لا يُمثِّل ممرًّا، وممرًّا لا يُمثِّل طريقًا، وطريقًا، ودارةً، ودارة هاملتون تبدأ بالرأس A، ودارة أويلر (إنْ وُجِدت).

أتأمّل المُخطَّط المجاور، ثمَّ أُجيب عن كلٍّ ممّا يأتي:



17 أُحدِّد مجموعة الرؤوس ومجموعة الحافات.

18 أُحدِّد درجة كل رأس من رؤوس المُخطَّط، ونوعها.

19 أُحدِّد في المُخطَّط ممشًى لا يُمثِّل ممرًّا، وممرًّا لا يُمثِّل طريقًا، وطريقًا، ودارةً، ودارة هاملتون (إنْ وُجِدت)، ودارة أويلر تبدأ بالرأس F.

الدرس الرابع : أنواع خاصة من المخططات

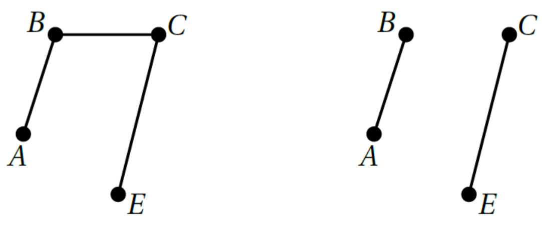
Special Types of Graphs

1. المُخطَّط البسيط، والمُخطَّط المتصل، والمُخطَّط الجزئي

المُخطَّط البسيط : هو المُخطَّط الذي لا توجد فيه حلقة أو حافات مُتعدِّدة .

المُخطَّط المتصل : هو المُخطَّط الذي يمتاز بوجود طريق يصل بين كل رأسين من رؤوسه .

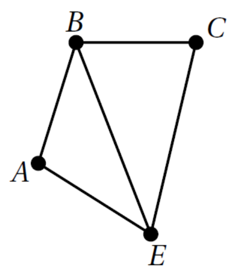
أنظر الشكل الآتي الذي يُبيِّن مُخطَّطا متصلًا ومُخطَّطا آخرَ غير متصل .



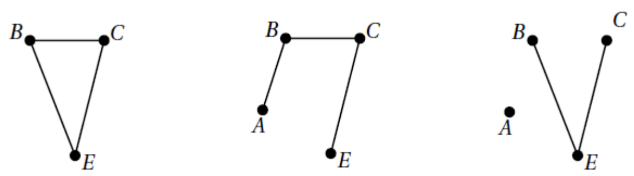
مُخطَّط متصل — مُخطَّط غير متصل

المُخطَّط الجزئي من مُخطَّط ما : هو مُخطَّط تنتمي جميع رؤوسه وحافاته إلى هذا المُخطَّط .

في ما يأتي مُخطَّطات جزئية من المُخطَّط R المُبيَّن في الشكل المجاور.



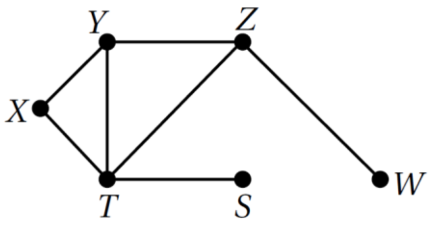
المُخطَّط R



المُخطَّط الجزئي 1 — المُخطَّط الجزئي 2 — المُخطَّط الجزئي 3

أتعلَّم : لا يُشترَط في المُخطَّط الجزئي أنْ يكون متصلًا .

مثال 1 : أتأمَّل المُخطَّط المجاور، ثمَّ أُجيب عن كلٍّ ممّا يأتي :



(1) هل المُخطَّط بسيط ؟ أُبرِّر إجابتي .

نعم ؛ لأنَّه لا يحوي حلقات أو حافات مُتعدِّدة .

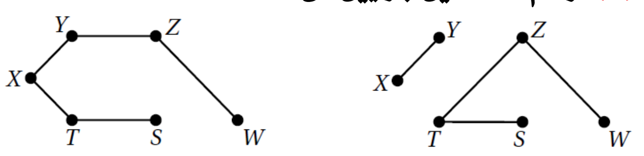
---

(2) هل المُخطَّط متصل ؟ أُبرِّر إجابتي .

نعم؛ لأنَّه يُمكِن إيجاد طريق يصل بين كل رأسين من رؤوسه .

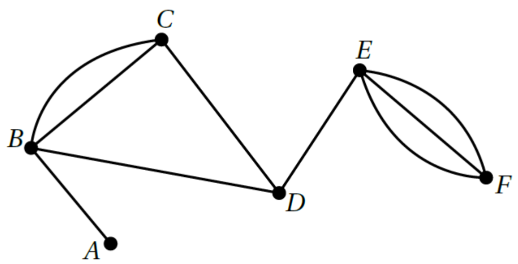
---

(3) أرسم مُخطَّطين جزئيين من المُخطَّط .



المُخطَّط الجزئي 1 — المُخطَّط الجزئي 2

مثال 2 : أتأمَّل المُخطَّط المجاور، ثمَّ أُجيب عن كلٍّ ممّا يأتي :



(1) هل المُخطَّط بسيط؟ أُبرِّر إجابتي .

لا ؛ لأنَّه يحوي حافات مُتعدِّدة .

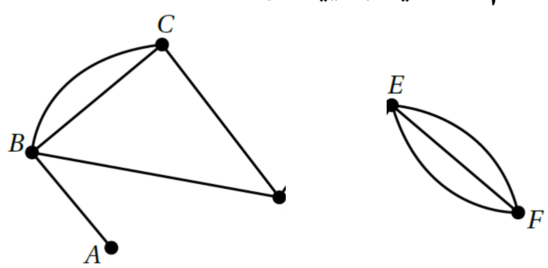
---

(2) هل المُخطَّط متصل ؟ أُبرِّر إجابتي .

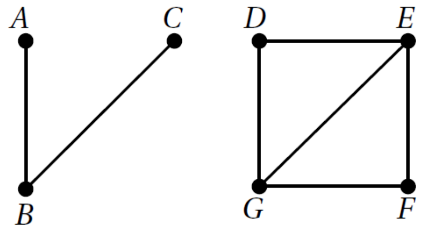
نعم؛ لأنَّه يُمكِن إيجاد طريق يصل بين كل رأسين من رؤوسه .

---

(3) أرسم مُخطَّطين جزئيين من المُخطَّط .



مثال 3 : أتأمَّل المُخطَّط المجاور، ثمَّ أُجيب عن كلٍّ ممّا يأتي :



(1) هل المُخطَّط بسيط؟ أُبرِّر إجابتي .

نعم ؛ لأنَّه لا يحوي حلقات أو حافات مُتعدِّدة .

---

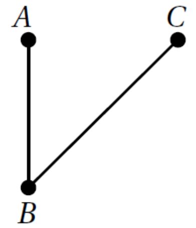
(2) هل المُخطَّط متصل ؟ أُبرِّر إجابتي .

لا ؛ لأنَّه لا يُمكِن إيجاد طريق يصل بين الرأس C و الرأس D .

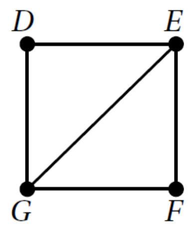
---

(3) أرسم مُخطَّطين جزئيين من المُخطَّط .

المخطط الأول :

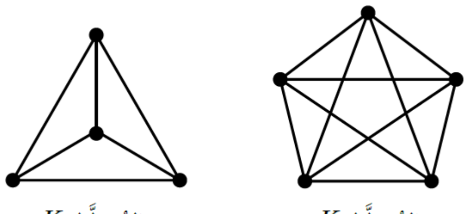


المخطط الثاني :



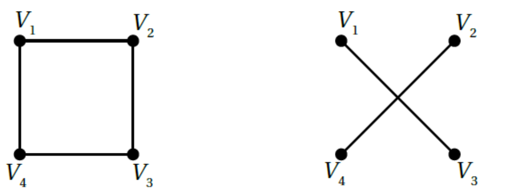
2. المُخطَّط الكامل ، والمُخطَّط المُكمل .

المُخطَّط الكامل : هو مُخطَّط بسيط يتصل كل رأسين فيه بحافة واحدة ، ويُرمَز إلى المُخطَّط الكامل الذي يحوي n من الرؤوس بالرمز K_n . أنظر الشكل الآتي الذي يُبيِّن المُخطَّط K_4 والمخطط K_5 .



المُخطَّط K_5 المُخطَّط K_4

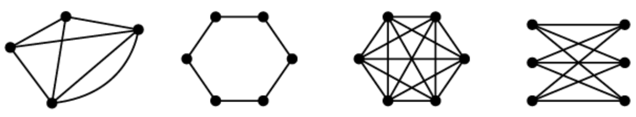
وأمّا **المُخطَّط البسيط** الذي عدد رؤوسه مساوٍ لعدد رؤوس المُخطَّط البسيط G ، وليكن n ، والذي تكون مجموعة حافاته هي جميع الحافات الموجودة في المُخطَّط K_n وغير الموجودة في المُخطَّط G ، فيُسمّى المُخطَّط المُكمَّل للمُخطَّط G ويُرمَز إليه بالرمز $\overline{G}$. أنظر الشكل الآتي الذي يُبيِّن المُخطَّط G والمُخطَّط المُكمَّل له $\overline{G}$.



المُخطَّط $\overline{G}$ المُكمَّل للمُخطَّط G المُخطَّط G

مثال 1 :

(1) أُحدِّد المُخطَّط الكامل ممّا يأتي، وأُسمّيه بالرموز، ثمَّ أُبرِّر إجابتي .



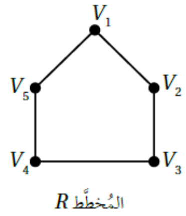
(A) (B) (C) (D)

المُخطَّط C : مُخطَّط الكامل (لأنَّ كل رأسين من رؤوسه متصلان بحافة واحدة فقط) ويُرمَز إلى هذا المُخطَّط بالرمز K_6.

المُخطَّط A : فهو غير كامل (لأنَّه مُخطَّط غير بسيط؛ إذ يتصل رأسان من رؤوسه بحافتين)

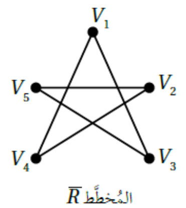
وأمّا المُخطَّطان B و D فهما ليسا كاملين؛ (لأنَّ فيهما رؤوسًا غير متصلة بحافات)

(2) أرسم $\overline{R}$ للمُخطَّط R المجاور .



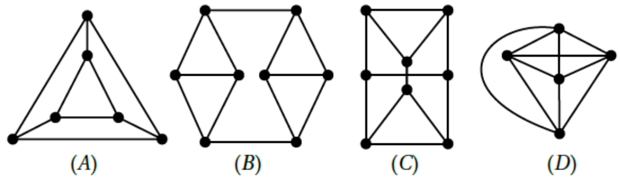
الحــــل:

يُبيِّن الشكل الآتي المُخطَّط $\overline{R}$ المُكمِّل للمُخطَّط R المجاور.



مثال 2 :

(1) أُحدِّد المُخطَّط الكامل ممّا يأتي، وأُسمّيه بالرموز، ثمَّ أُبرِّر إجابتي .

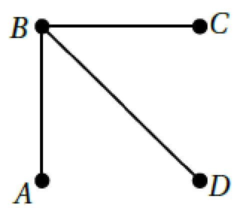


المُخطَّط D : مُخطَّط الكامل (لأنَّ كل رأسين من رؤوسه متصلان بحافة واحدة فقط) ويُرمَز إلى هذا المُخطَّط بالرمز K_5.

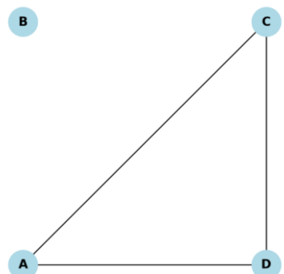
وأمّا المُخطَّطات B و A و C فهم ليسو كاملين؛ (لأنَّ فيهما رؤوسًا غيرمتصلة بحافات)

---

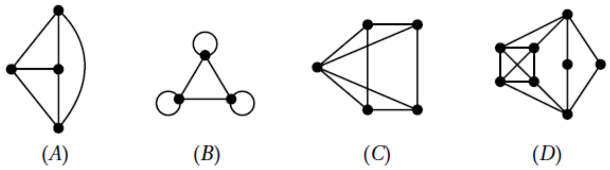
(2) أرسم $\overline{R}$ للمُخطَّط R المجاور .



الحــــل:



مثال 3 : أحدِّد المُخطَّط الكامل ممّا يأتي، وأُسمّيه بالرموز، ثمَّ أُبرِّر إجابتي .

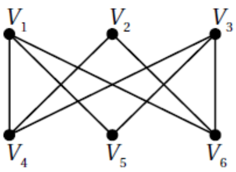


المخطط الكامل هو الشكل (A)، ويرمزله بـ K_4

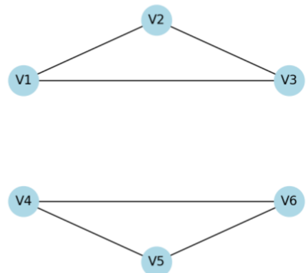
أما (B) ففيه حلقات، و (C)و (D)ينقصهما وصلات بين بعض الأزواج، لذلك ليست كاملة .

مثال 4 : أرسم المُخطَّط المُكمِّل لكلٍّ من المُخطَّطات الآتية :

(1)

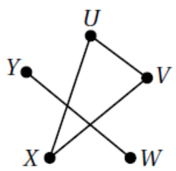


الحــــل:

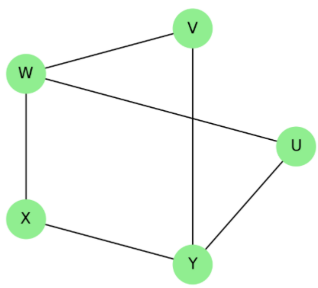


---

(2)



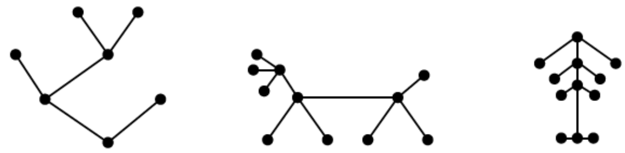
الحــــل:



3. الشجرة و الشجرة الشاملة .

يُطلَق على المُخطَّط المتصل الذي لا يحوي أيَّ دارة اسم **الشجرة**

في ما يأتي ثلاثة مُخطَّطات يُعَدُّ كلٌّ منها شجرة :

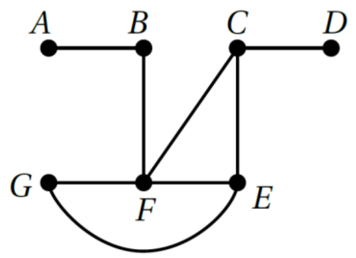


تُسمّى الشجرة T **شجرة شاملة** للمُخطَّط المتصل G إذا كانت T مُخطَّطًا جزئيًّا من G ، وتحوي جميع رؤوسه كما هو مُبيَّن في الشكل الآتي .

المُخطَّط G.

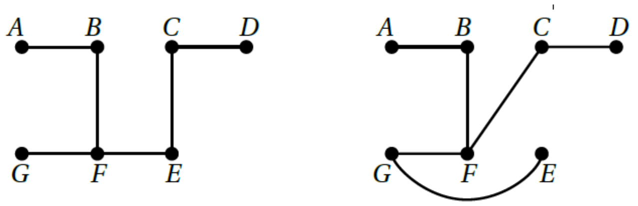
الشجرة T شجرة شاملة للمُخطَّط G.

مثال 1 : أرسم شجرتين شاملتين للمخطط المجاور .

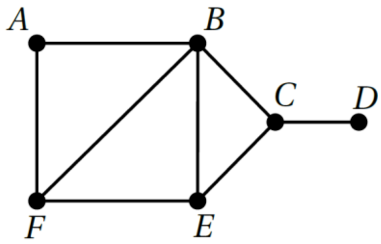


الحــل:

يُمكِن رسم شجرتين شاملتين للمُخطَّط المجاور كما يأتي :

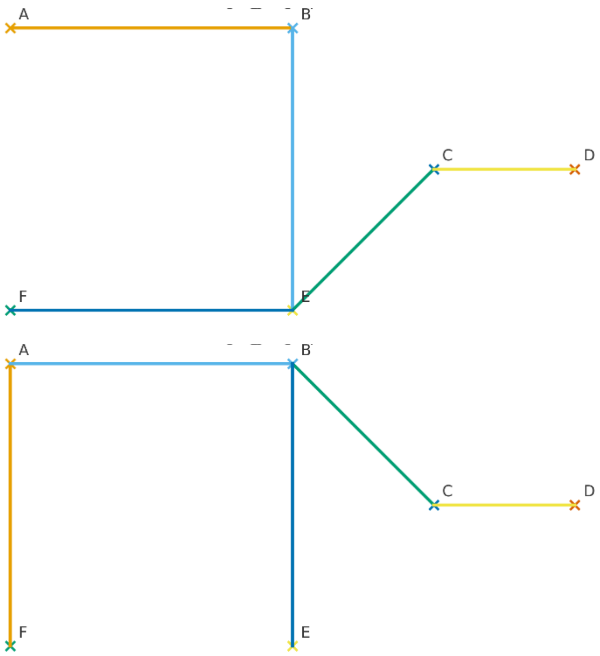


مثال 2 : أرسم شجرتين شاملتين للمخطط المجاور .

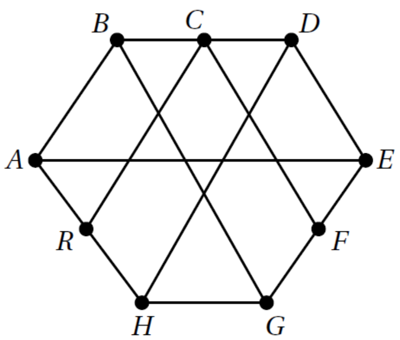


الحــل:

يُمكِن رسم شجرتين شاملتين للمُخطَّط المجاور كما يأتي :



مثال 3 : أتأمَّل المُخطَّط المجاور، ثمَّ أُجيب عن كلٍّ ممّا يأتي :



(1) هل المُخطَّط بسيط؟ أُبرِّر إجابتي .

نعم، بسيط؛ لأنه لا يحتوي على حلقات (loops) ولا على أضلاع مكرّرة بين زوج من الرؤوس .

(2) هل المُخطَّط متصل ؟ أُبرِّر إجابتي .

نعم، متصل؛ إذ توجد مسارات تصل بين كل زوج من الرؤوس (يمكن تتبّعها عبر حدود الشكل والأقطار).

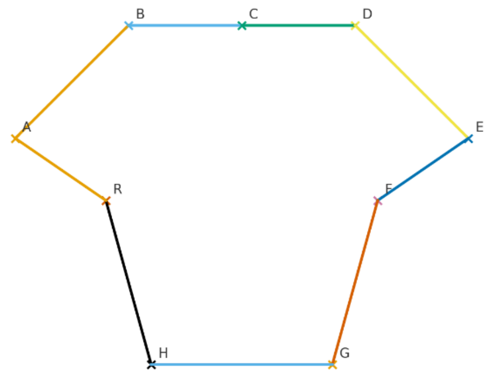
---

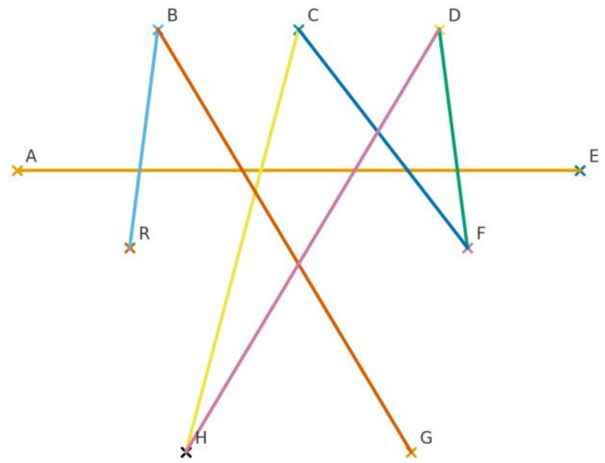
(3) هل المُخطَّط كامل ؟ أُبرِّر إجابتي .

لا، غير كامل؛ ففي الرسم البياني الكامل K_n يجب أن تكون كلّ زوج من الرؤوس متجاوراً بحافة مباشرة، وهو غير محقّق هنا .

---

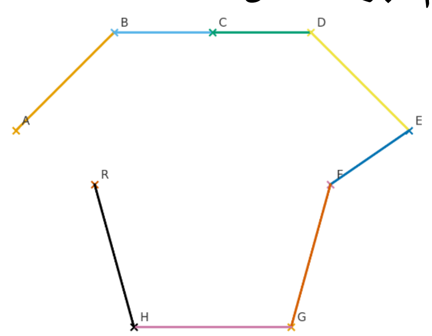
(4) أرسم مُخطَّطين جزئيين من المُخطَّط .





---

(5) أرسم شجرة شاملة من المُخطَّط .



4. أصغر شجرة شاملة .

تعلّمْتُ في المثال السابق إيجاد أشجار شاملة لمُخطَّط متصل . ولكنْ، كيف يُمكِن إيجاد أصغر شجرة شاملة للمُخطَّط المتصل الموزون ؟

يُمكِن إيجاد أصغر شجرة شاملة للمُخطَّط المتصل الموزون باستعمال خوارزمية برايم ، التي يُمكِن بها تحديد أقصر طريقة وأسرعها لربط جميع الرؤوس في المُخطَّط المتصل الموزون، بحيث يكون مجموع أوزان الحافات في هذه الشجرة الشاملة أقل ما يُمكِن .

خوارزمية : خوارزمية برايم

يُمكِن إيجاد أصغر شجرة شاملة لمُخطَّط متصل موزون باستعمال خوارزمية برايم ، وذلك باتِّباع الخطوات الآتية :

(1) اختيار أيِّ رأس في المُخطَّط لبَدْء رسم (إنشاء) الشجرة.

(2) تحديد أقل حافة وزنًا تربط بين رأس موجود في الشجرة ورأس لم يُضَف بعدُ إلى الشجرة. وفي حال وجود حافات عديدة لها الوزن نفسه، فإنَّه يُمكِن اختيار أيٍّ منها . وإذا شكَّلت الحافة دارة، فإنَّها لا تضاف إلى الشجرة .

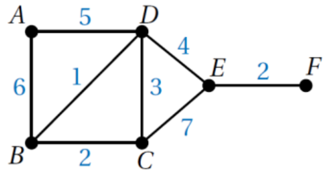
(3) تكرار الخطوة الثانية حتّى تكتمل إضافة جميع الرؤوس، ويتمّ ربطها بالشجرة .

(4) كتابة الحافات المضافة إلى الشجرة بالترتيب .

أتعلَّم : مفهوم (أصغر شجرة شاملة) مُرتبِط فقط بالمُخطَّطات الموزونة .

مثال 1 : (من الحياة)

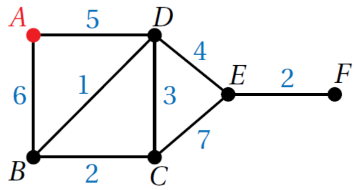
أكبال كهربائية: يُبيِّن الشكل المجاور مُخطَّطًا لأكبال كهربائية تربط بين مَحطّات التوزيع في إحدى المناطق. وفيه يُمثِّل العدد على كل حافةٍ طول الكَبْل (بالكيلومترات) بين كل مَحطَّتين في المنطقة :



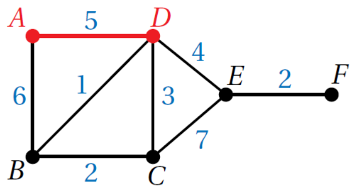
(1) أستعمل خوارزمية برايم لإيجاد أصغر شجرة شاملة للمُخطَّط، ثمَّ أكتب الحافات التي أُضيفت إلى الشجرة بالترتيب .

الحـــل:

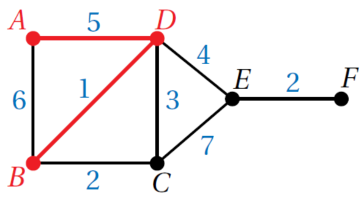
1. أختار أيَّ رأس في المُخطَّط لبَدْء رسم (إنشاء) الشجرة الشاملة، وليكن الرأس A .



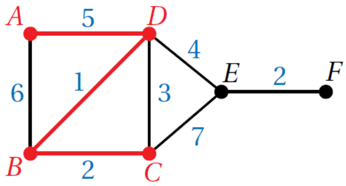
2. أُحدِّد أقل حافة وزنًا مُرتبِطة بالرأس A ، وهي AD ، ثمَّ أُضيفها إلى الشجرة .



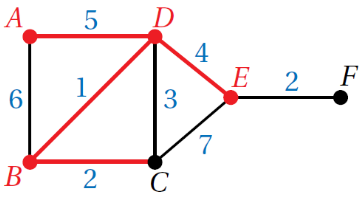
3. أُضيف الحافة DB إلى الشجرة؛ لأنَّها أقل حافة وزنًا بين الحافات المُرتبِطة بالرأس A والرأس D اللذينِ أُضيفا إلى الشجرة أصلًا .



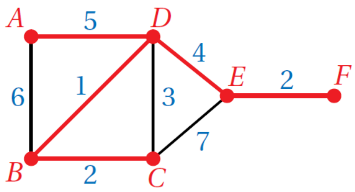
4. أُضيف الحافة BC إلى الشجرة؛ لأنَّها أقل حافة وزنًا بين الحافات المُرتبِطة بالرؤوس A, D, B التي أُضيفت إلى الشجرة أصلًا .



5. أُضيف الحافة DE إلى الشجرة؛ لأنَّها أقل حافة وزنًا بين الحافات المُرتبِطة بالرؤوس A, D, B, C التي أُضيفت إلى الشجرة أصلًا .



6. أُضيف الحافة EF إلى الشجرة .



بما أنَّه تمَّ ربط جميع رؤوس المُخطَّط معًا، فإنَّ ذلك يعني رسم (إنشاء) أصغر شجرة شاملة .

الحافات التي أُضيفت إلى الشجرة الشاملة بالترتيب هي :

AD , DB , BC , DE , EF

---

(2) أستعمل إجابة السؤال السابق لإيجاد أقل طول من الأكبال يَلزم لربط جميع المَحطّات في المنطقة .

الحـــل:

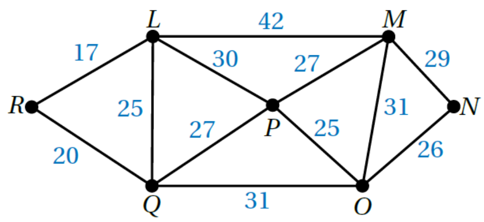
لإيجاد أقل طول للأكبال، أجد الوزن الكلي للشجرة الشاملة الناتجة في السؤال السابق، وذلك بجمع أوزان الحافات في الشجرة كما يأتي :

$$5 + 1 + 2 + 4 + 2 = 14$$

إذن، أقل طول من الأكبال يَلزم لربط جميع المَحطّات في المنطقة هو: 14 km

مثال 2 : (من الحياة)

أنابيب مياه : يُبيِّن الشكل المجاور مُخطَّطًا لشبكة أنابيب مياه تصل بين المَحطّات الرئيسة في إحدى المدن. وفيه يُمثِّل العدد على كل حافةٍ طول الأنبوب (بالكيلومتر) بين كل مَحطَّتين في المدينة :

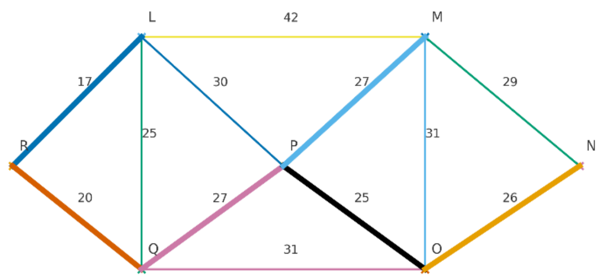


(1) أستعمل خوارزمية برايم لإيجاد أصغر شجرة شاملة للمُخطَّط، ثمَّ أكتب الحافات التي أُضيفت إليها بالترتيب .

البدء من المحطة R

الحواف المُضافة بالترتيب (مع أوزانها):

	الخطوة	أضفنا الحافة	المحطات الموصولة حتى	مجموع الأطوال المؤقت
1	1	R-L (وزن 17)	L,R	17
2	2	R-Q (وزن 20)	L,Q,R	37
3	3	Q-P (وزن 27)	L,P,Q,R	64
4	4	P-O (وزن 25)	L,O,P,Q,R	89
5	5	O-N (وزن 26)	L,N,O,P,Q,R	115
6	6	P-M (وزن 27)	L,M,N,O,P,Q,R	142



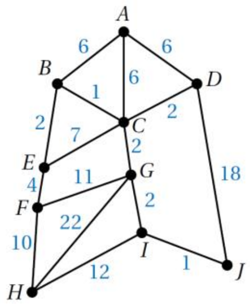
---

(2) أستعمل إجابة السؤال السابق لإيجاد أقل طول من الأنابيب يَلزم لربط جميع المَحطّات في المدينة .

مجموع أطوال الحواف في الشجرة الشاملة السابقة:

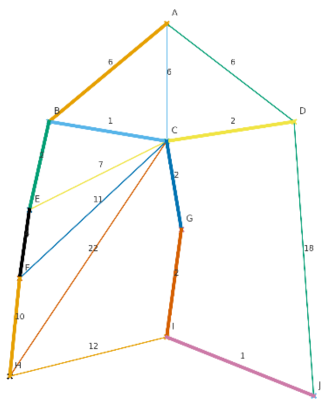
$$17 + 20 + 25 + 27 + 25 + 26 + 27 = 142 \ km$$

مثال 3 : **إنترنت: يُبيِّن الشكل المجاور مُخطَّطًا لشبكة إنترنت تصل بين مجموعة من الحواسيب في إحدى المكتبات العامة . وفيه يُمثِّل العدد على كل حافةٍ طول الكَبْل (بالمتر) بين كل جهازي حاسوب في المكتبة. أُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا :**



(1) أستعمل خوارزمية برايم لإيجاد أصغر شجرة شاملة للمُخطَّط، ثمَّ أكتب الحافات التي أُضيفت إليها بالترتيب .

	الخطوة	أضفنا	المجموعة	المجموع المؤقت
1	1	A-B (6)	A,B	6
2	2	B-C (1)	A,B,C	7
3	3	B-E (2)	A,B,C,E	9
4	4	C-D (2)	A,B,C,D,E	11
5	5	C-G (2)	A,B,C,D,E,G	13
6	6	G-I (2)	A,B,C,D,E,G,I	15
7	7	I-J (1)	A,B,C,D,E,G,I,J	16
8	8	E-F (4)	A,B,C,D,E,F,G,I,J	20
9	9	F-H (10)	A,B,C,D,E,F,G,H,I,J	30



(2) أستعمل إجابة السؤال السابق لإيجاد أقل تكلفة تَلزم لربط جميع الحواسيب في المكتبة، علمًا بأنَّ تكلفة تمديد المتر الواحد من الكَبْل 3 دنانير.

تكلفة المتر الواحد = 3 دنانير ⟸

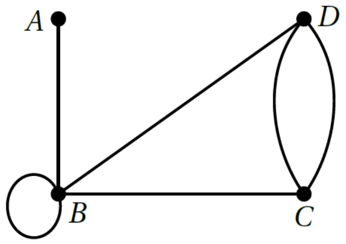
التكلفة $= 3 \times 30 = \boxed{90 \text{ دينار}}$

5. تمثيل المُخطَّطات باستعمال المصفوفات .

تعرَّفْتُ في الدرس السابق أنَّ المُخطَّط تمثيل بياني يُستعمَل للتعبيرعن روابط بين أشياء باستعمال رؤوس وحافات. ولكنْ يُمكِن أيضًا التعبيرعن هذه الروابط باستعمال المصفوفات .
فمثلاً، يُمكِن التعبيرعن المُخطَّطات غيرالموزونة باستعمال مصفوفة الجوار؛ وهي مصفوفة مُربَّعة رتبتها $n \times n$، ومُدخَلاتها عدد الحافات التي تربط بين كل رأسين في المُخطَّط، إضافةً إلى عدد الحافات التي تربط الرؤوس بنفسها (الحلقات) . أمّا المُخطَّطات الموزونة فيُمكِن التعبيرعنها باستعمال مصفوفة الوزن؛ وهي مصفوفة مُربَّعة رتبتها $n \times n$، ومُدخَلاتها أوزان الحافات التي تربط بين كل رأسين في المُخطَّط، إضافةً إلى أوزان الحافات التي تربط الرؤوس بنفسها (الحلقات) .

مثال 1 :

(1) أُمثِّل المُخطَّط المجاور بمصفوفة الجوار .



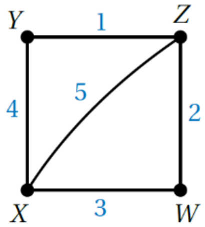
الحـــل:

بما أنَّ المُخطَّط يحوي 4 رؤوس، فإنَّ رتبة المصفوفة هي 4 × 4

أكتب أسماء الرؤوس فوق الأعمدة وبجانب الصفوف لتسهيل الحلِّ، ثمَّ أملأ مُدخَلات المصفوفة بعدد الحافات بين كل رأسين من الصفوف والأعمدة .

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

(2) أُمثِّل المُخطَّط الموزون المجاور بمصفوفة الوزن



الحـــل:

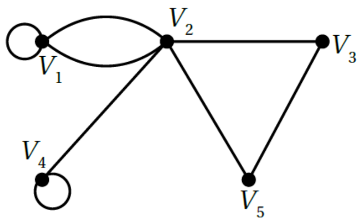
بما أنَّ المُخطَّط يحوي 4 رؤوس، فإنَّ رتبة المصفوفة هي 4 × 4

أكتب أسماء الرؤوس فوق الأعمدة وبجانب الصفوف لتسهيل الحلِّ، ثمَّ أملأ مدخات المصفوفة بأوزان الحافات بين كل رأسين من الصفوف والأعمدة .

$$\begin{array}{c} \\ X \\ Y \\ Z \\ W \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} X & Y & Z & W \end{array} \\ \begin{bmatrix} - & 4 & 5 & 3 \\ 4 & - & 1 & - \\ 5 & 1 & - & 2 \\ 3 & - & 2 & - \end{bmatrix} \end{array}$$

مثال 2 :

(1) أُمثِّل المُخطَّط المجاور بمصفوفة الجوار .

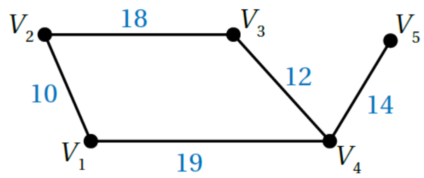


الحـــل:

بما أنَّ المُخطَّط يحوي 5 رؤوس، فإنَّ رتبة المصفوفة هي 5 × 5

$$\begin{array}{c} \\ V1 \\ V2 \\ V3 \\ V4 \\ V5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} V1 & V2 & V3 & V4 & V5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

(2) أُمثِّل المُخطَّط الموزون المجاور بمصفوفة الوزن

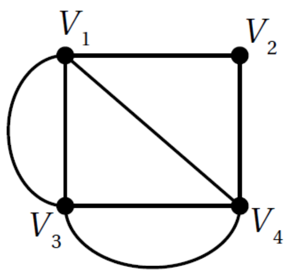


الحــــل:

	V1	V2	V3	V4	V5
V1	-	10	-	19	-
V2	10	-	18	-	-
V3	-	18	-	12	-
V4	19	-	12	-	14
V5	-	-	-	14	-

مثال 3 : أُمثِّل كل مُخطَّط مما يأتي بمصفوفة الجوار.

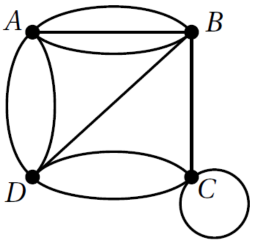
(1)



الحــــل:

	V1	V2	V3	V4
V1	0	1	2	1
V2	1	0	0	1
V3	2	0	0	2
V4	1	1	2	0

(2)

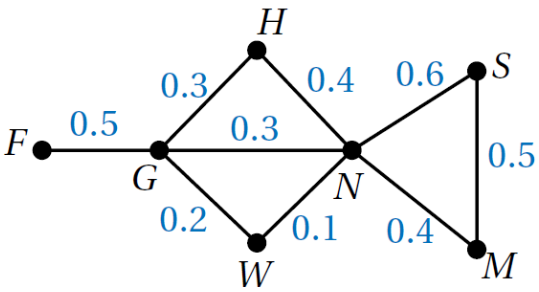


الحــــل:

	A	B	C	D
A	0	2	0	2
B	2	0	1	1
C	0	1	2	2
D	2	1	2	0

مثال 4 : أُمثِّل كل مُخطَّط مما يأتي بمصفوفة الوزن :

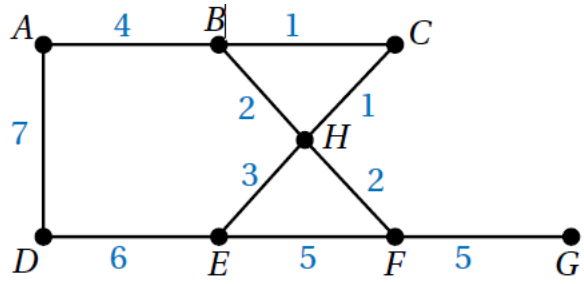
(1)



الحــــل:

	F	G	H	W	N	S	M
F	-	0.5	-	-	-	-	-
G	0.5	-	0.3	0.2	0.3	-	-
H	-	0.3	-	-	0.4	-	-
W	-	0.2	-	-	0.1	-	-
N	-	0.3	0.4	0.1	-	0.6	0.4
S	-	-	-	-	0.6	-	0.5
M	-	-	-	-	0.4	0.5	-

(2)



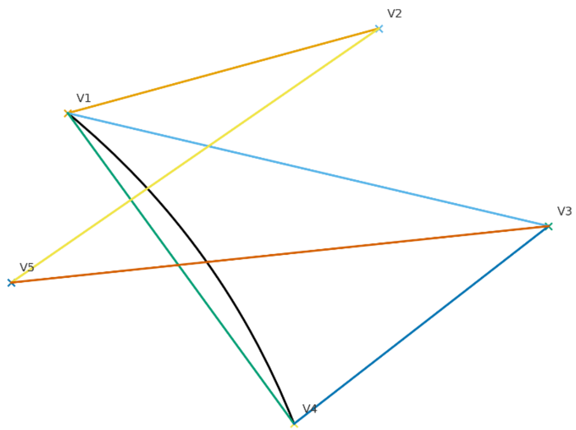
الحـــل:

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \\ G \\ H \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} A & B & C & D & E & F & G & H \end{array} \\ \begin{bmatrix} - & 4 & - & 7 & - & - & - & - \\ 4 & - & 1 & - & - & - & - & 2 \\ - & 1 & - & - & - & - & - & 1 \\ 7 & - & - & - & 6 & - & - & - \\ - & - & - & 6 & - & 5 & - & 3 \\ - & - & - & - & 5 & - & 5 & 2 \\ - & - & - & - & - & 5 & - & - \\ - & 2 & 1 & - & 3 & 2 & - & - \end{bmatrix} \end{array}$$

مثال 5 : أرسم المُخطَّط المُمثَّل في مصفوفة الجوار الآتية

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

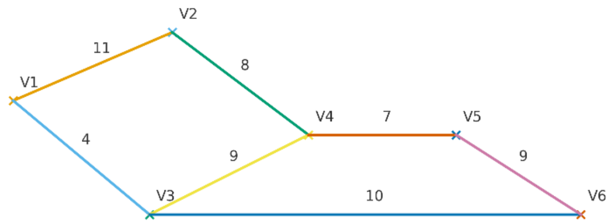
الحـــل:



مثال 6 : تُمثِّل مصفوفة الوزن الآتية أطوال أنابيب المياه (بالمتر) التي تصل بين المرشّات في إحدى المَزارع. أرسم المُخطَّط الموزون الذي تُمثِّله المصفوفة .

$$\begin{bmatrix} - & 11 & 4 & - & - & - \\ 11 & - & - & 8 & - & - \\ 4 & - & - & 9 & - & 10 \\ - & 8 & 9 & - & 7 & - \\ - & - & - & 7 & - & 9 \\ - & - & 10 & - & 9 & - \end{bmatrix}$$

الحـــل:

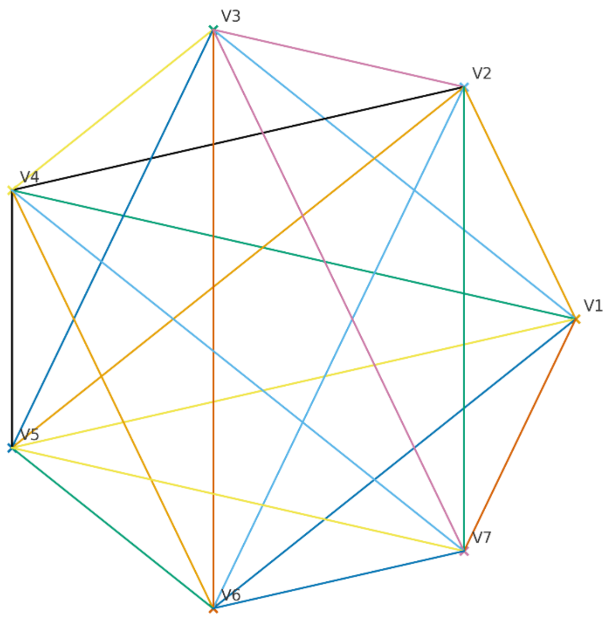


مهارات التفكير العليا

مثال 7 : مسألة مفتوحة : أرسم كُلًّا ممّا يأتي :

(1) مُخطَّط كامل، عدد رؤوسه 7

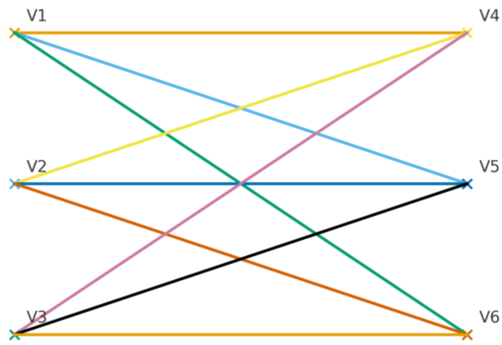
الحــــل :



---

(2) مُخطَّط متصل، عدد رؤوسه 6، ودرجة كلٍّ منها 3

الحــــل :

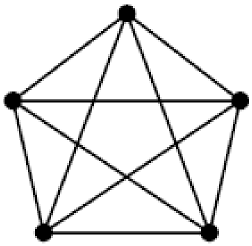


---

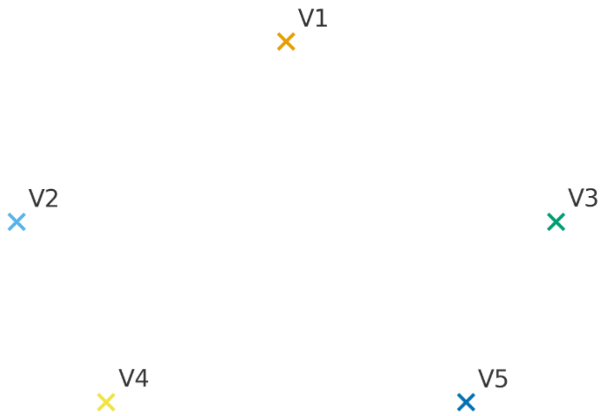
(3) مُخطَّط بسيط، غير متصل، عدد رؤوسه 6، ودرجة كلٍّ منها 2 .

الحــــل :

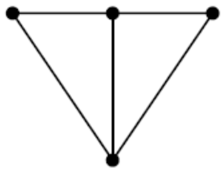
مثال 8 : تبرير: أرسم المُخطَّط المُكمِّل للمُخطَّط المجاور، ثمَّ أُبرِّر إجابتي .



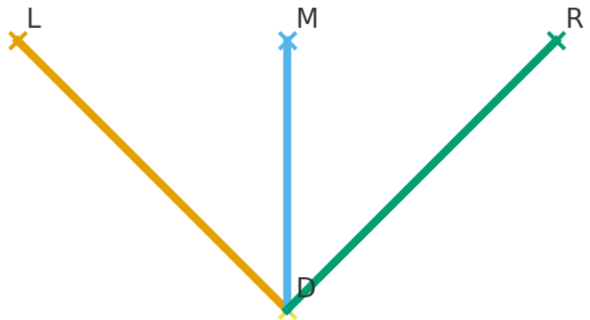
الحــــل :

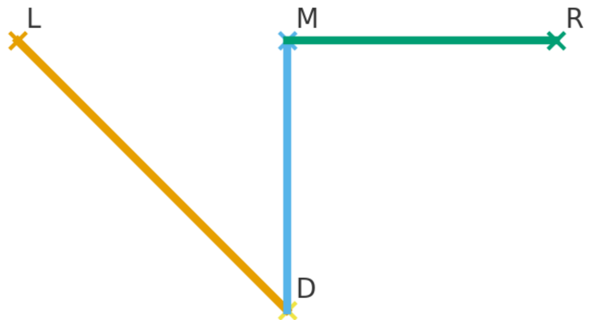


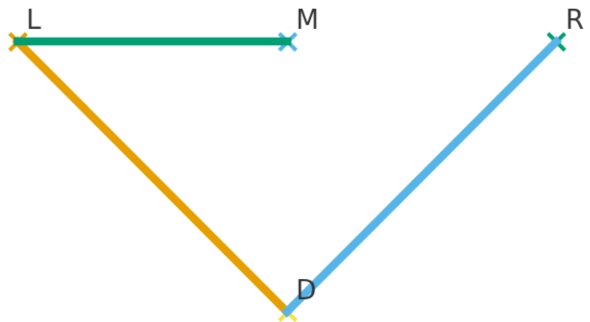
مثال 9 : تحدٍّ: أرسم جميع الأشجار الشاملة التي يُمكِن أنْ تنتج من المُخطَّط الآتي :

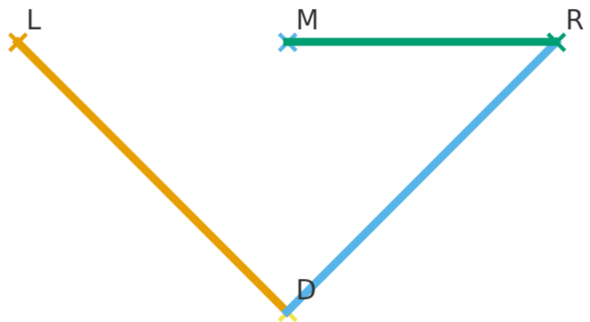


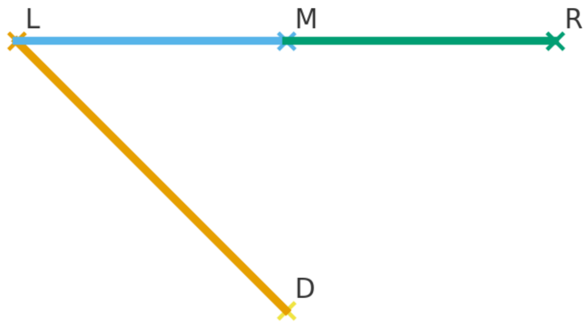
الحــــل:

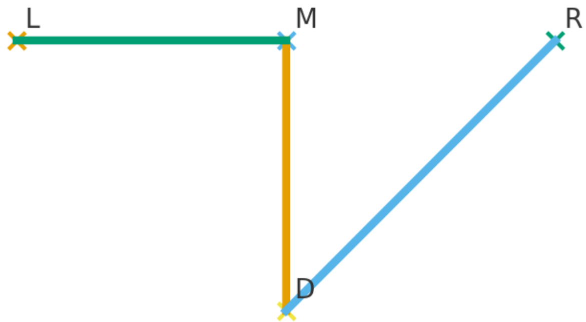


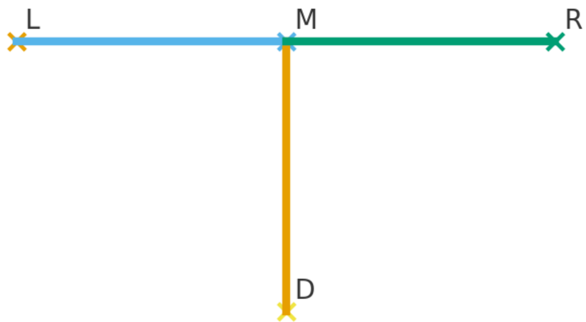


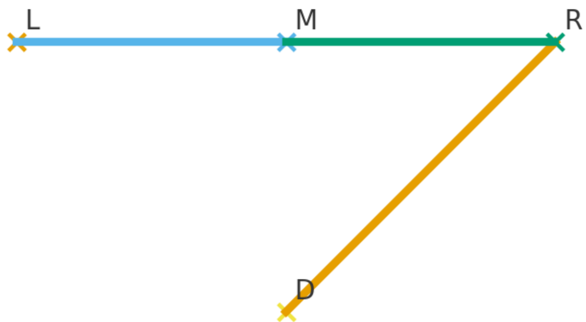




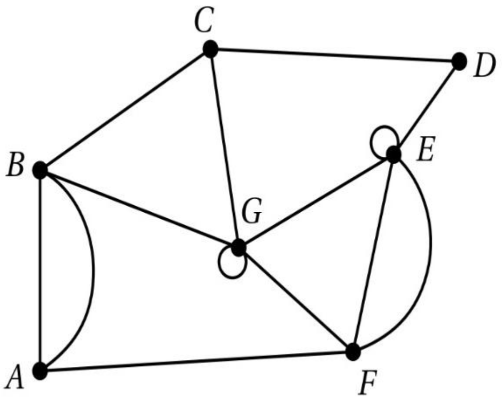








أتأمّل المُخطَّط المجاور، ثمَّ أُجيب عن كلٍّ ممّا يأتي:



1 هل المُخطَّط بسيط؟ أُبرِّر إجابتي.

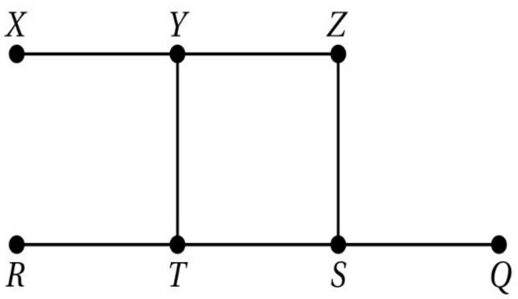
2 هل المُخطَّط متصل؟ أُبرِّر إجابتي.

3 أرسم مُخطَّطين جزئيين من المُخطَّط.

4 أرسم شجرتين للمُخطَّط.

5 أرسم شجرة شاملة للمُخطَّط.

أتأمّل المُخطَّط المجاور، ثمَّ أُجيب عن كلٍّ ممّا يأتي:



6 هل المُخطَّط بسيط؟ أُبرِّر إجابتي.

7 هل المُخطَّط متصل؟ أُبرِّر إجابتي.

8 هل المُخطَّط كامل؟ أُبرِّر إجابتي.

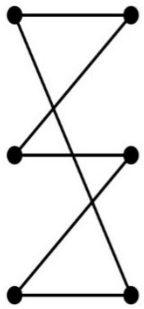
9 أرسم مُخطَّطين جزئيين من المُخطَّط.

10 أرسم شجرتين للمُخطَّط.

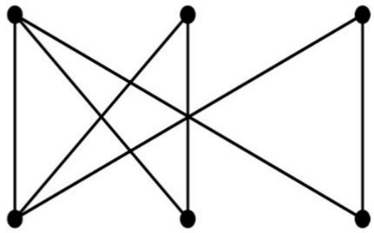
11 أرسم شجرة شاملة للمُخطَّط.

أرسم المُخطَّط المُكمِّل لكلٍّ من المُخطَّطين الآتيين:

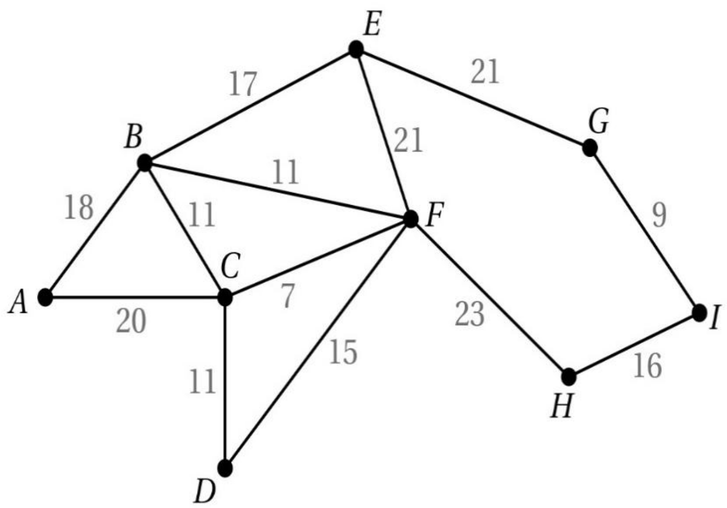
12



13



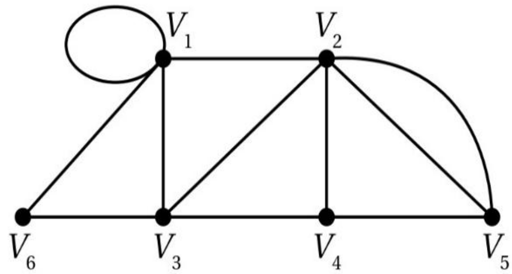
حدائق: يُبيِّن الشكل المجاور مُخطَّطًا للممرّات التي تصل بين المَحطّات الرئيسة في إحدى الحدائق، حيث يُمثِّل العدد على كل حافةٍ طول الممرِّ (بالمتر) بين كل مَحطَّتين رئيستين. أُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:



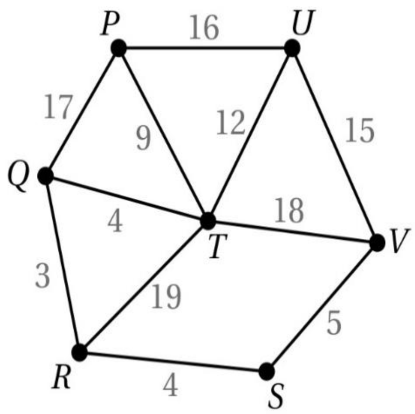
14 أستعمل خوارزمية برايم لإيجاد أصغر شجرة شاملة للمُخطَّط، ثمَّ أكتب الحافات التي أُضيفت إلى الشجرة بالترتيب.

15 أستعمل إجابة السؤال السابق لإيجاد أقل تكلفة تَلزم لتبليط الممرّات للربط بين جميع المَحطّات الرئيسة في الحديقة، علمًا بأنَّ تكلفة تبليط المتر الطولي الواحد من الممرِّ JD 25.

16 أُمثِّل المُخطَّط الآتي بمصفوفة الجوار.



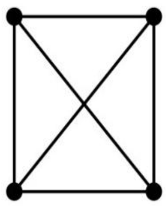
17 أُمثِّل المُخطَّط الآتي بمصفوفة الوزن.



18 أرسم المُخطَّط المُمثَّل في مصفوفة الجوار الآتية.

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

19 أرسم 6 أشجار شاملة للمُخطَّط الآتي.



الدرس الخامس : مخططات أويلر

Euler Graphs

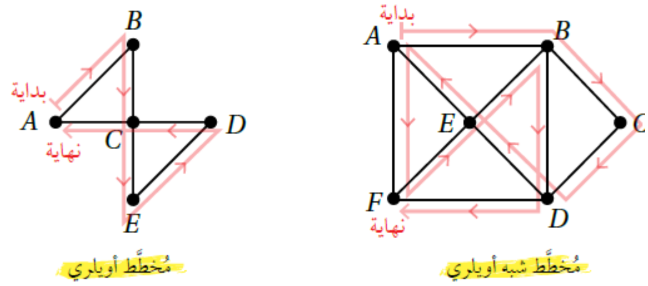
1. المُخطَّط الأويلري، والمُخطَّط شبه الأويلري .

تعرَّفْتُ سابقًا أنَّ دارة أويلر ممرٌّ رأسُ بدايته هو نفسه رأس نهايته، وأنَّه يشمل جميع حافات المُخطَّط من دون تكرار

المُخطَّط الأويلري : هو المُخطَّط المتصل الذي يحتوي على دارة أويلر .

المُخطَّط شبه الأويلري : هو المُخطَّط المتصل الذي يحوي ممرًّا يشمل جميع حافاته من دون تكرار، ورأس بدايته مختلف عن رأس نهايته .

في ما يأتي مثال على مُخطَّط أويلري، ومثال آخر على مُخطَّط شبه أويلري .



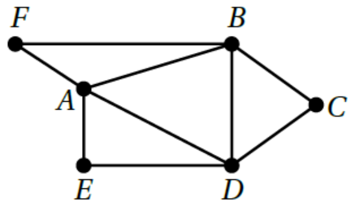
يصعب أحيانًا تمييز المُخطَّط الأويلري من غيره عن طريق النظر إليه فقط. وفي هذه الحالة، يُمكِن الاستعانة بالنظرية الآتية :

نظرية (المخطط الأويلري) :

المخطط	الشروط
المُخطَّط أويلريًا	المُخطَّط متصلًا ودرجة كل رأس من رؤوسه زوجية
المُخطَّط شبه أويلري	المُخطَّط متصلًا ويحوي رأسين فقط، درجة كلٍّ منهما فردية
المُخطَّط لا يكون أويلريًا ولا شبه أويلري	عدد الرؤوس ذات الدرجة الفردية في المُخطَّط أكثر من رأسين أو اذا لم يكن المُخطَّط متصلًا

مثال 1 : أتأمَّل كل مُخطَّط ممّا يأتي، ثمَّ أُحدِّد إذا كان أويلريًّا، أو شبه أويلري، أو غير ذلك .

1



الحـــل :

الخطوة 1 : أُحدِّد إذا كان المُخطَّط متصلًا أم لا .

المُخطَّط متصل، إذن يُمكِن البحث في نوعه (أويلري، أو شبه أويلري، أو غير ذلك) .

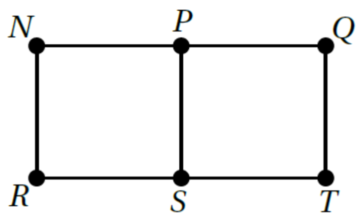
الخطوة 2 : أُحدِّد درجة كل رأس من رؤوس المُخطَّط، ونوعها .

الرأس	الدرجة	نوع الدرجة
A	4	زوجي
B	4	زوجي
C	2	زوجي
D	4	زوجي
E	2	زوجي
F	2	زوجي

الخطوة 3 : أُحدِّد نوع المُخطَّط استنادًا إلى درجات الرؤوس .

بما أنَّ جميع درجات رؤوس المُخطَّط زوجية، فإنَّ المُخطَّط أويلري .

2



الحـــل :

الخطوة 1 : أُحدِّد إذا كان المُخطَّط متصلًا أم لا .

المُخطَّط متصل، إذن يُمكِن البحث في نوعه (أويلري، أو شبه أويلري، أو غير ذلك) .

الخطوة 2 : أُحدِّد درجة كل رأس من رؤوس المُخطَّط، ونوعها .

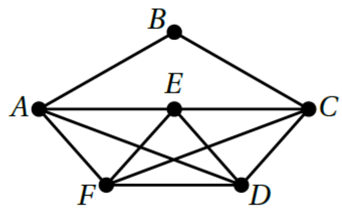
الرأس	الدرجة	نوع الدرجة
N	2	زوجية
P	3	فردية
Q	2	زوجية
R	2	زوجية
S	3	فردية
T	2	زوجية

الخطوة 3 : أُحدِّد نوع المُخطَّط استنادًا إلى درجات الرؤوس .

بما أنَّه يوجد رأسان فقط، درجة كلٍّ منهما فردية، فإنَّ المُخطَّط شبه أويلري .

مثال 2 : أتأمَّل كل مُخطَّط ممّا يأتي، ثمَّ أُحدِّد إذا كان أويلريًّا، أو شبه أويلري، أو غيرذلك .

1



الحـــل:

الخطوة 1 : أُحدِّد إذا كان المُخطَّط متصلًا أم لا .

المُخطَّط متصل، إذن يُمكِن البحث في نوعه (أويلري، أو شبه أويلري، أو غيرذلك) .

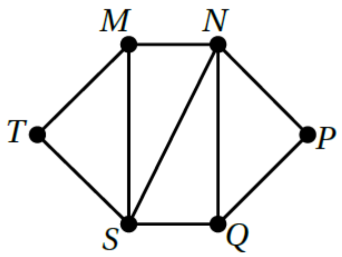
الخطوة 2 : أُحدِّد درجة كل رأس من رؤوس المُخطَّط، ونوعها .

الرأس	الدرجة	نوع الدرجة
A	4	زوجية
B	2	زوجية
C	4	زوجية
D	4	زوجية
E	4	زوجية
F	4	زوجية

الخطوة 3 : أُحدِّد نوع المُخطَّط استنادًا إلى درجات الرؤوس .

بما أنَّ جميع درجات رؤوس المُخطَّط زوجية، فإنَّ المُخطَّط أويلري .

2



الحـــل:

الخطوة 1 : أُحدِّد إذا كان المُخطَّط متصلًا أم لا .

المُخطَّط متصل، إذن يُمكِن البحث في نوعه (أويلري، أو شبه أويلري، أو غيرذلك) .

الخطوة 2 : أُحدِّد درجة كل رأس من رؤوس المُخطَّط، ونوعها .

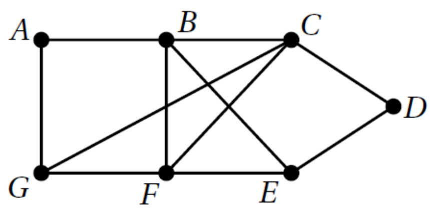
الرأس	الدرجة	نوع الدرجة
N	4	زوجية
P	2	زوجية
Q	3	فردية
T	2	زوجية
S	4	زوجية
M	3	فردية

الخطوة 3 : أُحدِّد نوع المُخطَّط استنادًا إلى درجات الرؤوس .

بما أنَّه يوجد رأسان فقط، درجة كلٍّ منهما فردية، فإنَّ المُخطَّط شبه أويلري .

مثال 3 : أتأمَّل كل مُخطَّط ممّا يأتي، ثمَّ أُحدِّد إذا كان أويلريًّا، أو شبه أويلري، أو غيرذلك .

1



الحـــل:

الخطوة 1 : أُحدِّد إذا كان المُخطَّط متصلًا أم لا .

المُخطَّط متصل، إذن يُمكِن البحث في نوعه (أويلري، أو شبه أويلري، أو غيرذلك) .

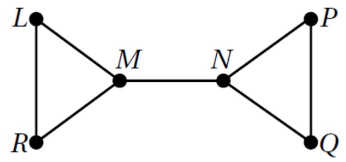
الخطوة 2 : أُحدِّد درجة كل رأس من رؤوس المُخطَّط، ونوعها .

الرأس	الدرجة	نوع الدرجة
A	2	زوجية
B	4	زوجية
C	4	زوجية
D	2	زوجية
E	3	فردية
F	4	زوجية
G	3	فردية

الخطوة 3 : أُحدِّد نوع المُخطَّط استنادًا إلى درجات الرؤوس .

بما أنَّه يوجد رأسان فقط، درجة كلٍّ منهما فردية، فإنَّ المُخطَّط شبه أويلري .

2



الحـــل:

الخطوة 1 : أُحدِّد إذا كان المُخطَّط متصلًا أم لا .

المُخطَّط متصل، إذن يُمكِن البحث في نوعه (أويلري، أو شبه أويلري، أو غيرذلك) .

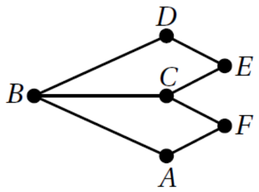
الخطوة 2 : أُحدِّد درجة كل رأس من رؤوس المُخطَّط، ونوعها .

الرأس	الدرجة	نوع الدرجة
N	3	فردية
P	2	زوجية
Q	2	زوجية
R	2	زوجية
L	2	زوجية
M	3	فردية

الخطوة 3 : أُحدِّد نوع المُخطَّط استنادًا إلى درجات الرؤوس .

بما أنَّه يوجد رأسان فقط، درجة كلٍّ منهما فردية، فإنَّ المُخطَّط شبه أويلري .

3

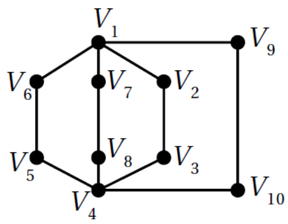


المُخطَّط متصل

الرأس	الدرجة	نوع الدرجة
B	3	فردية
D	2	زوجية
C	3	فردية
A	2	زوجية
E	2	زوجية
F	2	زوجية

بما أنَّه يوجد رأسان فقط، درجة كلٍّ منهما فردية، فإنَّ المُخطَّط شبه أويلري .

4



المُخطَّط متصل

الرأس	الدرجة	نوع الدرجة
V_1	4	زوجية
V_2	2	زوجية
V_3	2	زوجية
V_4	4	زوجية
V_5	2	زوجية
V_6	2	زوجية
V_7	2	زوجية
V_8	2	زوجية
V_9	2	زوجية
V_{10}	2	زوجية

بما أنَّ جميع درجات رؤوس المُخطَّط زوجية، فإنَّ المُخطَّط أويلري .

2. إيجاد طول أقصر مسار في مُخطَّط أويلري أو مُخطَّط شبه أويلري .

المسار الأويلري : هو مسار في المُخطَّط يشمل كل حافة في المُخطَّط مَرَّة واحدة على الأقل، ويبدأ بالرأس نفسه الذي ينتهي به .

ما الهدف من استعمال خوارزمية فحص المسار الأويلري ؟

لإيجاد طول أقصر مسار أويلري في مُخطَّط متصل موزون .

☒ إذا كان المُخطَّط أويلريًّا، فإنَّ أقصر مسار أويلري فيه يكون دارة أويلر ، وهو مسار يتضمَّن جميع حافات المُخطَّط، ويبدأ بالرأس نفسه الذي ينتهي به

طول أقصر مسار أويلري = الوزن الكلي للمُخطَّط .

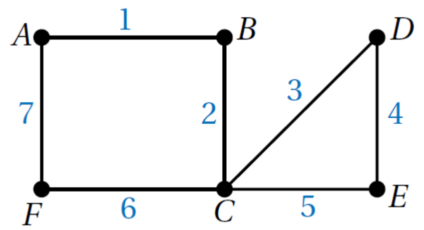
☒ إذا كان المُخطَّط شبه أويلري، فإنَّ :

طول أقصر مسار أويلري فيه = الوزن الكلي للمُخطَّط، مضافًا إليه مجموع أطوال حافات أقصر طريق بين الرأسين اللذين درجتهما فردية

وذلك لضمان البَدْء بنفس الرأس والانتهاء به .

مثال 2

(1) أجد طول أقصر مسار أويلري في المُخطَّط الموزون المجاور، يبدأ بالرأس F ، وينتهي به .



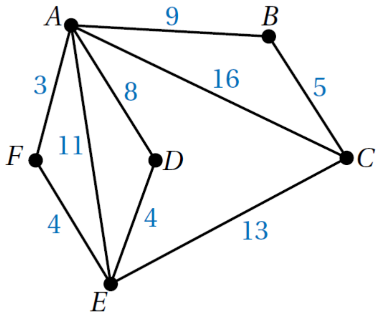
الحـــل:

ألاحِظ من المخطط أنَّ درجة كل رأس من رؤوسه زوجية؛ ما يعني أنَّ المُخطَّط أويلري. ومنه، فإنَّ طول أقصر مسار أويلري في المُخطَّط يساوي الوزن الكلي للمُخطَّط .

$$7 + 1 + 2 + 6 + 3 + 4 + 5 = 28$$

إذن، طول أقصر مسار أويلري في المُخطَّط، يبدأ بالرأس F ، وينتهي به، هو: 28 وحدة .

(2) أجد طول أقصر مسار أويلري في المُخطَّط الموزون المجاور، يبدأ بالرأس E ، وينتهي به .

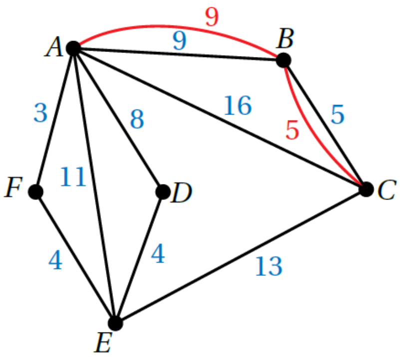


الحـــل:

ألاحِظ من المُخطَّط وجود رأسين فقط ، درجة كلٍّ منهما فردية؛ ما يعني أنَّ المُخطَّط شبه أويلري .

الخطوة 1 : أُكرِّر أطوال حافات أقصر طريق بين الرأسين اللذينِ درجتهما فردية في المُخطَّط .

الرأسان اللذان درجتهما فردية هما : A و C ، وأقصر طريق يصل بينهما هو : ABC ؛ لذا أُكرِّر حافات هذا الطريق في المُخطَّط كما في الشكل المجاور .



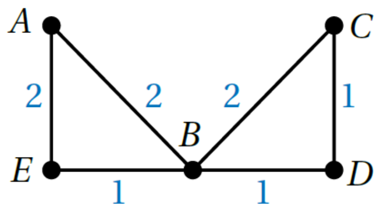
الخطوة 2: أجد الوزن الكلي للمُخطَّط الناتج.

$$3 + 9 + 9 + 5 + 5 + 16 + 13 + 4 + 8 + 11 + 4 = 87$$

إذن، طول أقصر مسار أويلري في المُخطَّط، يبدأ بالرأس E ، وينتهي به، هو: 87 وحدة .

مثال 3

(1) أجد طول أقصر مسار أويلري في المُخطَّط الموزون المجاور، يبدأ بالرأس D، وينتهي به ، ويشمل كل حافة من حافاته .



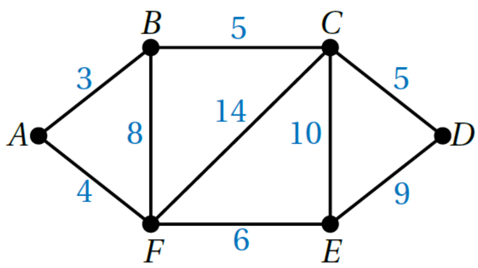
المُخطَّط أويلري. ومنه، فإنَّ طول أقصر مسار أويلري في المُخطَّط يساوي الوزن الكلي للمُخطَّط .

$$2+2+1+2+1+1=9$$

إذن، طول أقصر مسار أويلري في المُخطَّط، يبدأ بالرأس D، وينتهي به ، هو: 9 وحدات .

---

(2) أجد طول أقصر مسار أويلري في المُخطَّط الموزون المجاور، يبدأ بالرأس F، وينتهي به ، ويشمل كل حافة من حافاته .



ألاحِظ من المُخطَّط وجود رأسين فقط ، درجة كلٍّ منهما فردية؛ ما يعني أنَّ المُخطَّط شبه أويلري .

الخطوة 1 : أُكرِّر أطوال حافات أقصر طريق بين الرأسين اللذينِ درجتهما فردية في المُخطَّط .

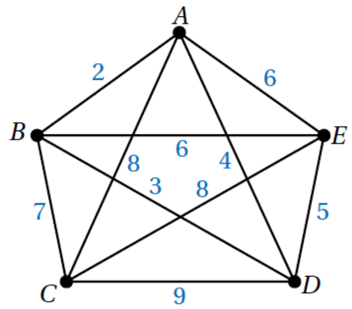
الرأسان اللذان درجتهما فردية هما : B و E ، وأقصر طريق يصل بينهما هو : BFE ؛ لذا أُكرِّر حافات هذا الطريق .

الخطوة 2: أجد الوزن الكلي للمُخطَّط الناتج.

$$3+8+8+4+5+10+14+6+6+5$$
$$+9=78$$

إذن، طول أقصر مسار أويلري في المُخطَّط، يبدأ بالرأس E ، وينتهي به، هو : 78 وحدة .

مثال 4 : أجد طول أقصر مسار أويلري في المُخطَّط الموزون المجاور، يبدأ بالرأس A ، وينتهي به .

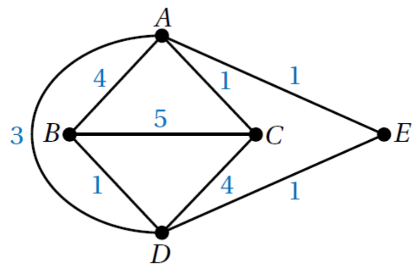


المُخطَّط أويلري (لأن كل رأس درجته زوجية) . ومنه، فإنَّ طول أقصر مسار أويلري في المُخطَّط يساوي الوزن الكلي للمُخطَّط .

$$2+7+9+5+6+6+4+8+3+8=128$$

إذن، طول أقصر مسار أويلري في المُخطَّط، يبدأ بالرأس D ، وينتهي به ، هو: 128 وحدة .

مثال 5 : أجد طول أقصر مسار أويلري في المُخطَّط الموزون المجاور، يبدأ بالرأس B ، وينتهي به .



ألاحِظ من المُخطَّط وجود رأسين فقط ، درجة كلٍّ منهما فردية؛ ما يعني أنَّ المُخطَّط شبه أويلري .

الخطوة 1 : أُكرِّر أطوال حافات أقصر طريق بين الرأسين اللذينِ درجتهما فردية في المُخطَّط .

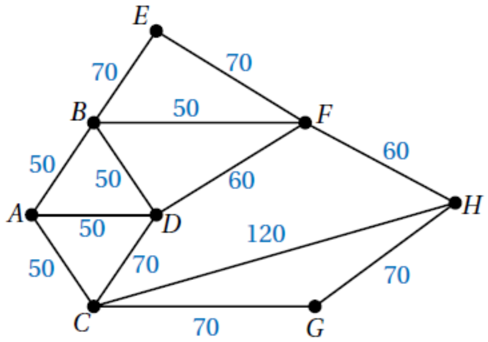
الرأسان اللذان درجتهما فردية هما : B و C ، وأقصر طريق يصل بينهما هو : BC ؛ لذا أُكرِّر حافات هذا الطريق .

الخطوة 2: أجد الوزن الكلي للمُخطَّط الناتج.

$$3+4+1+1+4+5+5+1+1=27$$

إذن، طول أقصر مسار أويلري في المُخطَّط، يبدأ بالرأس B ، وينتهي به، هو : 27 وحدة .

مثال 6 : طرق: يُبيِّن الشكل التالي مُخطَّطًا للطرق الرئيسة بين مجموعة من المدن. وفيه يُمثِّل العدد على كل حافةٍ المسافة (بالكيلومتر) بين كل مدينتين. أجد طول أقصر مسار أويلري يبدأ بالمدينة A، وينتهي بها



ألاحِظ من المُخطَّط وجود رأسين فقط، درجة كلٍّ منهما فردية؛ ما يعني أنَّ المُخطَّط شبه أويلري.

الخطوة 1: أُكرِّر أطوال حافات أقصر طريق بين الرأسين اللذين درجتهما فردية في المُخطَّط.

الرأسان اللذان درجتهما فردية هما: A و H، وأقصر طريق يصل بينهما هو: ACH؛ لذا أُكرِّر حافات هذا الطريق.

الخطوة 2: أجد الوزن الكلي للمُخطَّط الناتج.

$$70 + 70 + 50 + 50 + 50 + 50 + 50 + 50$$
$$+ 70 + 60 + 60 + 120 + 120$$
$$+ 70 + 70 = 27$$

إذن، طول أقصر مسار أويلري في المُخطَّط، يبدأ بالرأس A، وينتهي به، هو: 1010 وحدة.

3. إيجاد طول أقصر مسار أويلري في مُخطَّط متصل غير أويلري ولا شبه أويلري.

تعلَّمْتُ في الأمثلة السابقة استعمال خوارزمية فحص المسار الأويلري لإيجاد طول أقصر مسار أويلري في مُخطَّط أويلري أو مُخطَّط شبه أويلري. والآن سأتعلَّم كيف يُمكِن إيجاد طول أقصر مسار أويلري في مُخطَّط غير أويلري ولا شبه أويلري.

خوارزمية فحص المسار الأويلري للمُخطَّطات غير الأويلرية ولا شبه الأويلرية

يُمكِن إيجاد طول أقصر مسار أويلري في مُخطَّط متصل غير أويلري ولا شبه أويلري باستعمال خوارزمية فحص المسار، وذلك باتِّباع الخطوات الآتية:

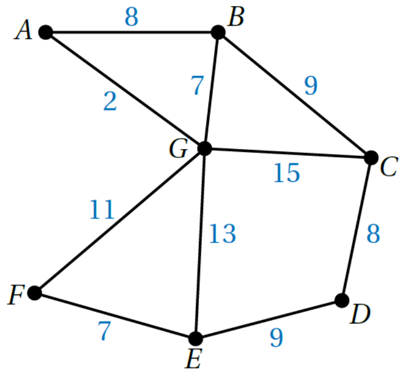
(1) تحديد الرؤوس ذات الدرجات الفردية في المُخطَّط.

(2) تحديد الطرائق المختلفة لإضافة حافات بين الرؤوس ذات الدرجات الفردية (حتّى تصبح درجات جميع الرؤوس زوجية)، ثمَّ إيجاد مجموع أوزان الحافات المضافة في كل طريقة.

(3) اختيار الطريقة التي أُضيفت فيها حافات إلى المُخطَّط وزنها أقل ما يُمكِن، ثمَّ إضافة هذه الحافات إلى المُخطَّط.

(4) إيجاد الوزن الكلي للمُخطَّط الناتج الذي يساوي طول أقصر مسار أويلري في المُخطَّط.

مثال 1 : أنابيب ريٍّ: يُبيِّن الشكل المجاور مُخطَّطًا لأنابيب كبيرة تصل بين النقاط الرئيسة في إحدى المَزارِع. وفيه يُمثِّل العدد على كل حافةٍ طول الأنبوب (بالمتر) بين كل نقطتين. يُراد تنظيف الأنابيب من الداخل بآلة تحوي خرطومًا رفيعًا مرنًا في مُقدِّمته أداة لضخ الماء بضغط عالٍ في اتجاه الجدران الداخلية للأنابيب الكبيرة لتنظيفها من الداخل. إذا علمتُ أنَّه يُمكِن إدخال الخرطوم في النقطة B وإخراجه منها فقط، فأجد أقل طول من الخرطوم يَلزم لتنظيف جميع الأنابيب الكبيرة في المزرعة .



الحـــل:

بما أنَّه لا يُمكِن إدخال الخرطوم إلّا في الرأس B وإخراجه من هذا الرأس فقط، وبما أنَّه يجب تنظيف جميع الأنابيب ؛ فإنَّه يُمكِن استعمال خوارزمية فحص المسار الأويلري لإيجاد أقصر طول لازم من الخرطوم (أقصر مسار يحوي جميع حافات المُخطَّط) .

أُلاحِظ من المُخطَّط وجود أكثر من رأسين، درجة كلٍّ منها فردية؛ ما يعني أنَّ المُخطَّط ليس أويلريًّا ولا شبه أويلري.

الخطوة 1: أُحدِّد الرؤوس ذات الدرجات الفردية في المُخطَّط .

الرؤوس ذات الدرجات الفردية في المُخطَّط هي: B, C, E, G

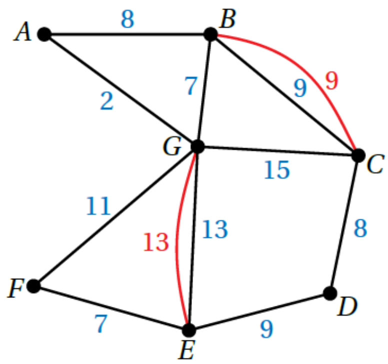
الخطوة 2: أُحدِّد الطرائق المختلفة لإضافة حافات بين الرؤوس ذات الدرجات الفردية لتصبح جميع الرؤوس ذات درجات زوجية، ثمَّ أجد مجموع أوزان الحافات المضافة في كل طريقة.

	الحافات المضافة	مجموع أوزان الحافات المضافة
الطريقة الأولى	BC , GE	$9 + 13 = 22$
الطريقة الثانية	BG , CE	$7 + 17 = 24$
الطريقة الثالثة	BE , CG	$20 + 15 = 35$

ملحوظة: طول الحافة CE المضافة في الطريقة الثانية يساوي مجموع طولي الحافتين CD و DE بحيث يكون طول المسار بين هذين الرأسين أقصر ما يُمكِن، وطول الحافة BE المضافة في الطريقة الثالثة يساوي مجموع طولي الحافتين GE وBG.

الخطوة 3: أختار الطريقة التي أُضيفت فيها حافات إلى المُخطَّط وزنها أقل ما يُمكِن، ثمَّ أُضيف هذه الحافات إلى المُخطَّط.

الطريقة التي أُضيفت فيها حافات إلى المُخطَّط وزنها أقل ما يُمكِن هي الطريقة الأولى؛ لذا أُكرِّر حافات هذه الطريقة في المُخطَّط كما في الشكل المجاور .

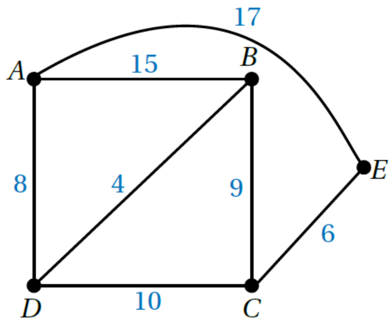


الخطوة 4: أجد الوزن الكلي للمُخطَّط الناتج.

$8 + 9 + 9 + 8 + 9 + 7 + 11 + 2 + 7 + 15 + 13 + 13 = 111$

إذن، أقل طول من الخرطوم يَلزم لتنظيف جميع الأنابيب الكبيرة في المزرعة هو: 111 m

مثال 2 : طرق: يُبيِّن الشكل المجاور مُخطَّطًا للطرق الرئيسة بين مجموعة من المناطق. وفيه يُمثِّل العدد على كل حافةٍ المسافة (بالكيلومتر) بين كل منطقتين. أجد طول أقصر مسار يبدأ بالمنطقة A، وينتهي بها، ويشمل كل حافة في المُخطَّط.



الحــل:

أُلاحِظ من المُخطَّط وجود أكثر من رأسين، درجة كلٍّ منها فردية؛ ما يعني أنَّ المُخطَّط ليس أويلريًّا ولا شبه أويلري.

الخطوة 1: أُحدِّد الرؤوس ذات الدرجات الفردية في المُخطَّط.

الرؤوس ذات الدرجات الفردية في المُخطَّط هي: A, B, C, D

الخطوة 2: أُحدِّد الطرائق المختلفة لإضافة حافات بين الرؤوس ذات الدرجات الفردية لتصبح جميع الرؤوس ذات درجات زوجية، ثمَّ أجد مجموع أوزان الحافات المضافة في كل طريقة.

	الحافات المضافة	مجموع أوزان الحافات المضافة
الطريقة الأولى	AB, DC	$15 + 10 = 25$
الطريقة الثانية	AD, BC	$8 + 9 = 17$
الطريقة الثالثة	AC, BD	$18 + 4 = 22$

الخطوة 3: أختار الطريقة التي أُضيفت فيها حافات إلى المُخطَّط وزنها أقل ما يُمكِن، ثمَّ أُضيف هذه الحافات إلى المُخطَّط.

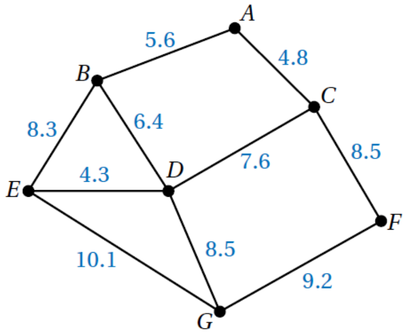
الطريقة التي أُضيفت فيها حافات إلى المُخطَّط وزنها أقل ما يُمكِن هي الطريقة الثانية ؛ لذا أُكرِّر حافات هذه الطريقة في المُخطَّط

الخطوة 4: أجد الوزن الكلي للمُخطَّط الناتج.

$8 + 8 + 4 + 4 + 9 + 15 + 10 + 17 + 6 = 86$

إذن: 86 km

مثال 3 : أنفاق: يُبيِّن الشكل المجاور مُخطَّطًا لأنفاق تصريف مياه الأمطار في إحدى المدن. وفيه يُمثِّل العدد على كل حافةٍ طول النفق بالكيلومتر. إذا علمْتُ أنَّ الفريق الهندسي المسؤول عن صيانة الأنفاق يرغب في فحصها قبل حلول فصل الشتاء للتحقُّق من عدم انسدادها، وأنَّه يتعيَّن على الفريق المرور بكل نفق مَرَّة واحدة على الأقل، وأنَّه سيبدأ مهمته من الرأس A، وينتهي به؛ فأجد طول أقصر مسار يُمكِن أنْ يمرَّ به الفريق لإنجاز مهمته .



الحــل:

أُلاحِظ من المُخطَّط وجود أكثر من رأسين، درجة كلٍّ منها فردية؛ ما يعني أنَّ المُخطَّط ليس أويلريًّا ولا شبه أويلري.

الرؤوس ذات الدرجات الفردية في المُخطَّط هي : B, C, E, G

	الحافات المضافة	مجموع أوزان الحافات المضافة
الطريقة الأولى	BE, CG	$8.3 + 16.1 = 24.4$
الطريقة الثانية	EG, BC	$10.1 + 10.4 = 20.5$

الطريقة التي أُضيفت فيها حافات إلى المُخطَّط وزنها أقل ما يُمكِن هي الطريقة الثانية ؛ لذا أُكرِّر حافات هذه الطريقة في المُخطَّط

أجد الوزن الكلي للمُخطَّط الناتج .

$$8.3 + 5.6 + 5.6 + 4.8 + 4.8 + 8.5 + 9.2 + 10.1 + 10.1 + 4.3 + 6.4 + 7.6 + 8.5 = 93.8$$

مهارات التفكير العليا

مثال 4 : أكتشف الخطأ : قالت سلمى : إنَّ أيَّ مُخطَّط كامل K_n، حيث : $n > 2$، هو مُخطَّط أويلري .

أكتشف الخطأ في قول سلمى، ثمَّ أُصحِّحه .

الحـــل :

الخطأ: التعميم غير صحيح .

في K_n درجة كل رأس هي : $n-1$ ليكون المخطَّط أويلريًّا (يملك دورة أويلر) يجب أن تكون درجات جميع الرؤوس زوجية .

- إذا كان n فرديًا فإن : $n-1$ زوجي لكل الرؤوس. إذن K_n أويلري .
- إذا كان n زوجياً فإن : $n-1$ فردي لكل الرؤوس إذن K_n ليس أويلرياً ولا حتى شبه أويلري لأنه ليس فيه رأسان فقط بدرجة فردية بل جميع الرؤوس .

إذًا التصحيح K_n يكون أويلريًا فقط عندما يكون n فرديًا وليس لكل $n > 2$.

مثال 5 : تبرير: أتأمَّل مصفوفة الجوار المجاورة التي تُمثِّل مُخطَّطًا غير موزون، ثمَّ أُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا من دون رسم المُخطَّط :

$$\begin{array}{c|ccccc} & A & B & C & D & E \\ \hline A & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ B & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ C & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ D & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ E & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

(1) هل المُخطَّط متصل ؟ أُبرِّر إجابتي .

نعم، المخطَّط متصل؛ فالمصفوفة تُظهر أن E متصل بكل من A,B,C,D (عمود / صف E كلّه 1 عدا القُطر) ، وبالتالي توجد مسارات بين أي زوج من الرؤوس.

(2) هل المُخطَّط أويلري، أو شبه أويلري، أو غير ذلك ؟ أُبرِّر إجابتي .

إرشاد: أستعين بالمصفوفة لكتابة مجموعة درجات رؤوس المُخطَّط

الحـــل :

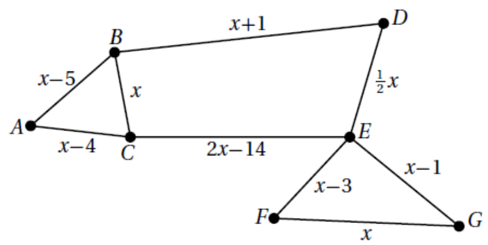
من مجاميع الصفوف (درجات الرؤوس)

$$\deg A = 3,\ \deg B = 3,\ \deg C = 2$$
$$\deg D = 2,\ \deg E = 4$$

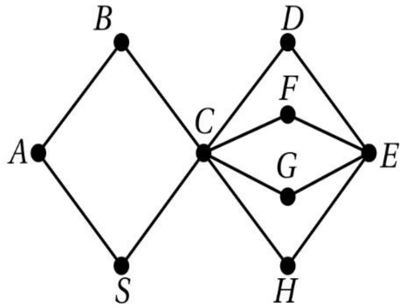
المخطط متصل وفيه رأسان فرديا الدرجة فقط $(A,B) \Rightarrow$

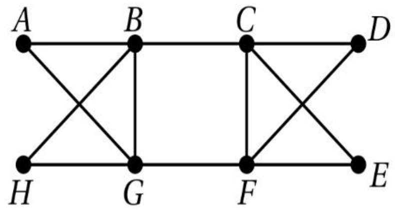
اذن المخطط شبه أويلري (يملك مسار أويلري يبدأ بأحد A,B وينتهي بالآخر) وليس أويلريًا مغلقًا .

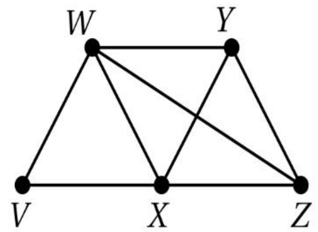
مثال 6 : تحدٍّ : يُبيِّن الشكل التالي مُخطَّطًا موزونًا يُمثِّل المسافات بين مجموعة من المناطق بالكيلومتر. إذا كان طول أقصر مسار في المُخطَّط باستعمال خوارزمية فحص المسار هو 100 km ، فأجد قيمة الثابت الحقيقي x .

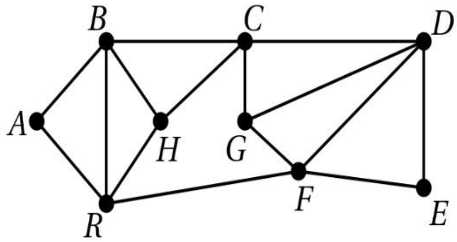


أتأمّل كل مُخطَّط ممّا يأتي، ثمَّ أُحدِّد إذا كان أويلريًّا، أو شبه أويلري، أو غير ذلك.

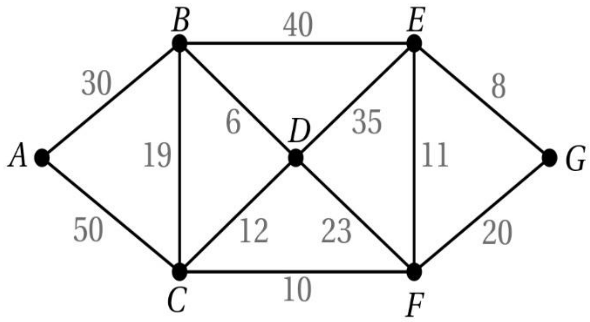
1 

2 

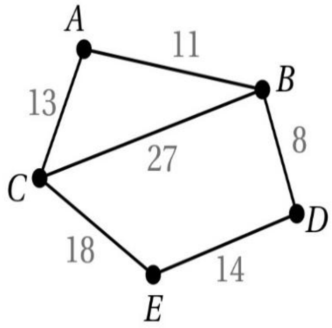
3 

4 

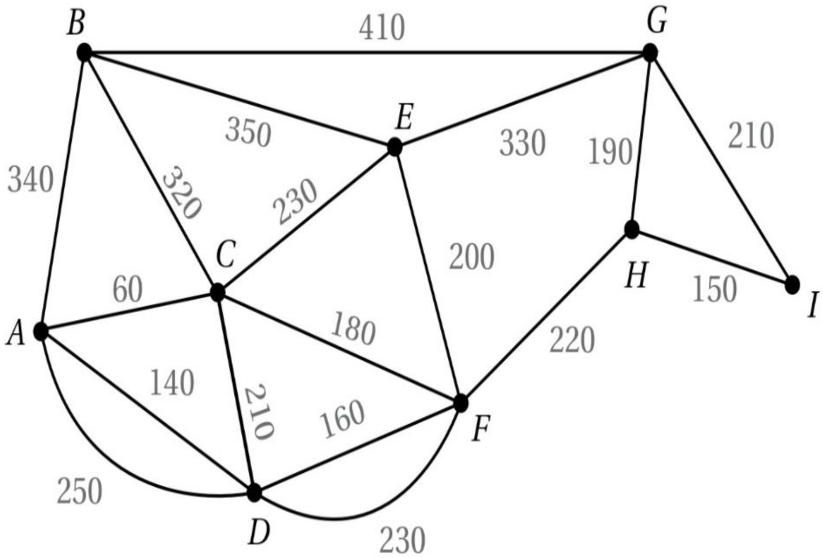
5 أجد طول أقصر مسار أويلري في المُخطَّط الموزون الآتي، يبدأ بالرأس G، وينتهي به.



6 أجد طول أقصر مســار أويلري في المُخطَّط الموزون المجاور، يبدأ بالرأس C، وينتهي به.



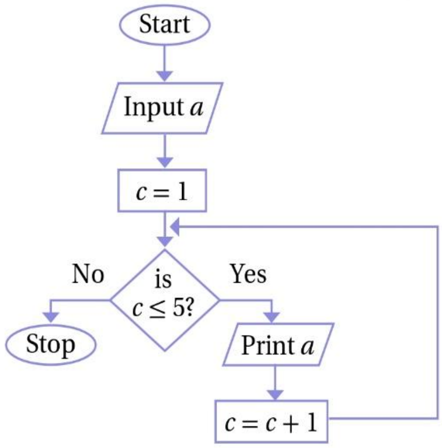
7 حدائق: يُبيِّن الشكل التالي مُخطَّطًا للمســارات في إحدى الحدائق العامة. وفيه يُمثِّل العدد على كل حافةٍ طول المسار بالمتر. تريد المهندســة الزراعية في الحديقة أنْ تســير على كل مســار فيها مَرَّة واحدة على الأقل يوميًّا، بَدْءًا بالنقطة A، وانتهاءً بها؛ لتفقُّد المزروعات. أجد طول أقصر مسار أويلري يُمكِن أنْ تمرَّ به المهندسة لإنجاز مهمتها.



اختبار نهاية الوحدة

أختار رمز الإجابة الصحيحة في كلٍّ ممّا يأتي:

1 إحــدى التالية تُمثِّــل وصفًا لمُخرَجــات الخوارزمية الآتية:



a) الأعداد من 1 إلى 5

b) العدد a مُكرَّرًا 5 مَرّات.

c) الأعداد من 1 إلى 4

d) العدد a مُكرَّرًا 4 مَرّات.

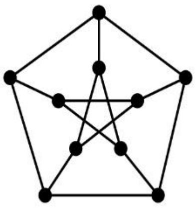
2 يُراد تعبئة العُلَب (المُعطــى ارتفاعاتها في ما يلي) في صناديق، ارتفاع كلٍّ منها 19 وحــدة طول. إذا علمْتُ أنَّ للعُلَب والصناديق المقطع العرضي نفسه، فإنَّ عدد الصناديــق اللازمة لتعبئة العُلَب باســتعمال خوارزمية المُلاءَمة الأولى هو:

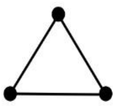
11 2 15 5 6 17 7 12

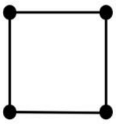
a) 3 b) 4

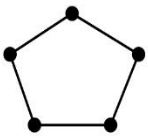
c) 5 d) 6

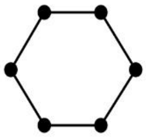
3 الذي يُمثِّــل مُخطَّطًا جزئيًّا مــن المُخطَّط المجاور هو:



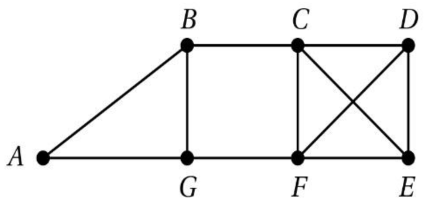
a) 

b) 

c) 

d) 

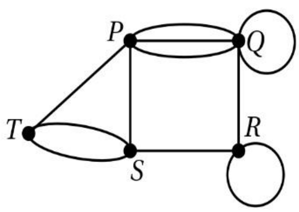
4 الذي يُمثِّل ممرًّا في المُخطَّط الآتي هو:



a) $ABCDCB$ b) $ABCDFCB$

c) $ABCFGA$ d) $ABCDECB$

5 مجموع درجات رؤوس المُخطَّط الآتي يساوي:

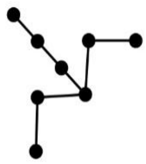


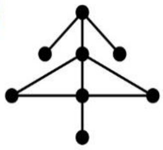
a) 18 b) 20

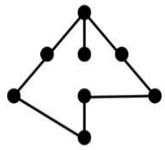
c) 22 d) 24

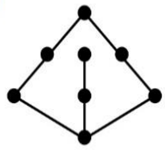
اختبار نهاية الوحدة

6 الذي يُمثِّل شجرة في ما يأتي هو:

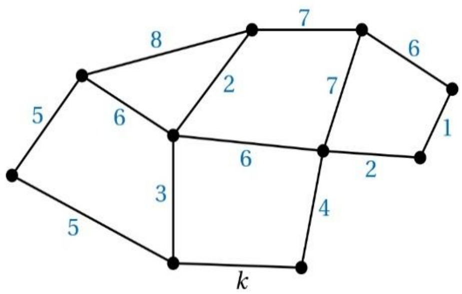
a) 

b) 

c) 

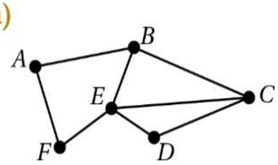
d) 

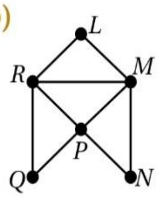
7 إذا كان وزن أصغر شجرة شاملة للمُخطَّط الآتي، تمرُّ بالحافة التي وزنها k، هو 33، فإنَّ قيمة الثابت k تساوي:

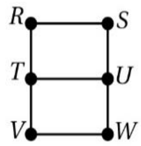


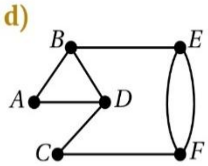
a) 1 b) 2 c) 4 d) 5

8 المُخطَّط الأويلري من المُخطَّطات الآتية هو:

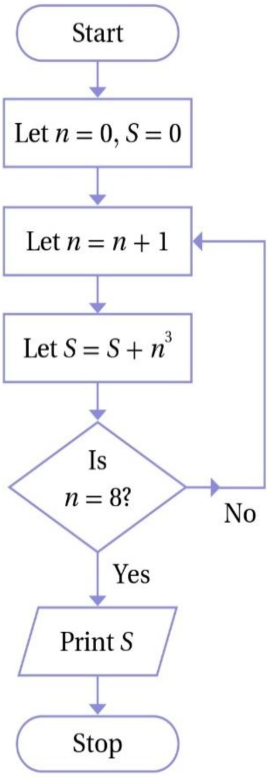
a) 

b) 

c) 

d) 

أتأمَّل الخوارزمية المجاورة المُمثَّلة بمُخطَّط سَيْر العمليات، ثمَّ أُجيب عن كلٍّ ممّا يأتي:



9 أُطبِّق الخوارزمية باستعمال جدول التتبُّع لإيجاد مُخرَجها.

10 أَصِف مُخرَج الخوارزمية.

11 أُطبِّق الخوارزمية الآتية باستعمال جدول التتبُّع لإيجاد مُخرَجاتها عندما $P = 400, R = 5, T = 3$.

1. Input P, R, T
2. Let $A = P, K = 0$
3. Let $K = K + 1$
4. Let $I = (A \times R)/100$
5. Let $A = A + I$
6. If $K < T$, go to step 3
7. Let $M = A/(12 \times T)$
8. Print M
9. Stop

اختبار نهاية الوحدة

شحن: في ما يأتي كتل 10 صناديق (بالكيلوغرام) يُراد نقلها في شاحنات، ويُمكِن لكلٍّ منها أنْ تحمل كتلة إجمالية أقصاها 300 kg:

175 135 210 105 100 150 60 20 70 125

12 أُحدِّد كيف تُوزَّع الصناديق على الشاحنات باستعمال خوارزمية المُلاءَمة الأولى، ثمَّ أُحدِّد عدد الشاحنات اللازمة لذلك باستعمال هذه الخوارزمية.

13 أُحدِّد كيف تُوزَّع الصناديق على الشاحنات باستعمال خوارزمية المُلاءَمة الأولى المُتناقِصة، ثمَّ أُحدِّد عدد الشاحنات اللازمة لذلك باستعمال هذه الخوارزمية.

14 أُحدِّد كيف تُوزَّع الصناديق على الشاحنات باستعمال خوارزمية الصندوق الكامل، ثمَّ أُحدِّد عدد الشاحنات اللازمة لذلك باستعمال هذه الخوارزمية.

15 أيُّ الخوارزميات توصَّلْتُ بها إلى الحلِّ الأمثل؟ أُبرِّر إجابتي.

يُراد تعبئة العُلَب (المُعطى ارتفاعاتها في ما يلي) في صناديق، ارتفاع كلٍّ منها 5 وحدات طول. إذا علمْتُ أنَّ للعُلَب والصناديق المقطع العرضي نفسه، فأُجيب عن الأسئلة التالية تباعًا:

2.6 0.8 2.1 1.2 0.9 1.7 2.3 0.3 1.8 2.7

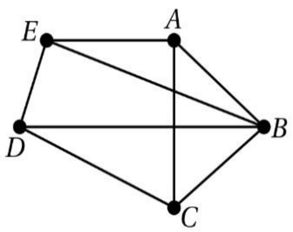
16 أستعمل خوارزمية المُلاءَمة الأولى لتعبئة العُلَب في الصناديق، ثمَّ أُحدِّد عدد الصناديق اللازمة لذلك، ثمَّ أجد مقدار الارتفاع المهدور من الصناديق جميعها.

17 أستعمل خوارزمية المُلاءَمة الأولى المُتناقِصة لتعبئة العُلَب في الصناديق، ثمَّ أُحدِّد عدد الصناديق اللازمة لذلك، ثمَّ أجد مقدار الارتفاع المهدور من الصناديق جميعها.

18 أستعمل خوارزمية الصندوق الكامل لتعبئة العُلَب في الصناديق، ثمَّ أُحدِّد عدد الصناديق اللازمة لذلك، ثمَّ أجد مقدار الارتفاع المهدور من الصناديق جميعها.

19 أيُّ الخوارزميات توصَّلْتُ بها إلى الحلِّ الأمثل؟ أُبرِّر إجابتي.

أتأمَّل المُخطَّط الآتي، ثمَّ أُجيب عن كلٍّ ممّا يلي:



20 أُحدِّد مجموعة الرؤوس ومجموعة الحافات.

21 أُحدِّد درجة كل رأس، ونوعها.

22 أُحدِّد مجموعة الدرجات للمُخطَّط.

23 أرسم مُخطَّطين جزئيين من المُخطَّط.

24 أُحدِّد من المُخطَّط ممشًى لا يُمثِّل ممرًّا، وممرًّا لا يُمثِّل طريقًا، وطريقًا، ودارةً، ودارة هاملتون تبدأ بالرأس A، ودارة أويلر (إنْ وُجِدت).

25 هل المُخطَّط متصل؟ أُبرِّر إجابتي.

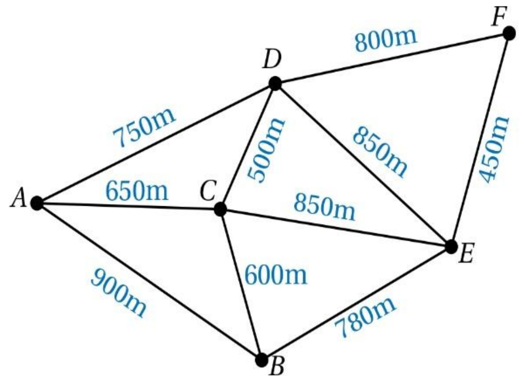
26 هل المُخطَّط بسيط؟ أُبرِّر إجابتي.

اختبار نهاية الوحدة

27 أرسم شجرتين للمُخطَّط.

28 أرسم شجرتين شاملتين للمُخطَّط.

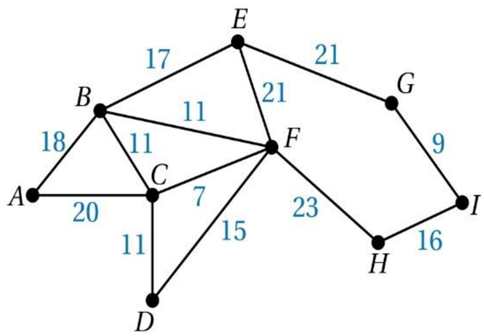
يُبيِّن الشكل الآتي مُخطَّطًا لـ 6 منازل في إحدى القرى. وفيه يُمثِّل العدد على كل حافةٍ المسافة (بالمتر) بين كل منزلين:



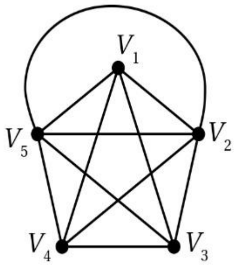
29 أجد طول المسار المباشر بين المنزل E والمنزل D.

30 أُحـدِّد طول أقصر مسـار بين المنـزل B والمنزل D، والمسار الذي اتخذته لذلك.

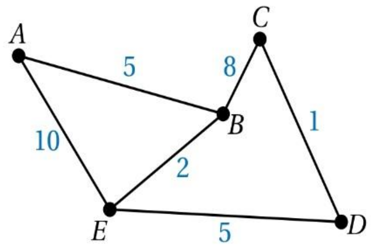
31 يُبيِّن المُخطَّط الموزون التالي أطوال الطرق التي تصل بين مجموعة من المناطق في إحدى المدن بالكيلومتر. أسـتعمل خوارزمية برايم لإيجاد أصغر شجرة شاملة للمُخطَّط، ثمَّ أكتب الحافات التي أُضيفت إلى الشجرة بالترتيب.



32 أُمثِّل المُخطَّط الآتي بمصفوفة الجوار.



33 أُمثِّل المُخطَّط الآتي بمصفوفة الوزن.



34 يُبيِّـن المُخطَّـط المـوزون التالـي أطـوال الطـرق التي تصـل بيـن مجموعـة مـن المناطق فـي إحـدى المدن بالكيلومتـر. أجـد طـول أقصـر مسـار أويلـري يبـدأ بالمنطقـة A، وينتهـي بهـا.