الدرس الأول : مُقدِّمة في المصفوفات

Introduction to Matrices

1. المصفوفة: عناصرها، ورتبتها

المصفوفة : هي ترتيب على هيئة مستطيل لأعداد أو مُتغيِّرات في صفوف وأعمدة محصورة بين قوسين من هذا النوع [ ] .

- تسمى كل **قيمة** في المصفوفة ← **عنصرًا**
- يُرمَز إلى **المصفوفة** بحرف كبير، مثل: $A, B, C, \ldots$
- يُرمَز إلى **عناصرها** بحرف صغير، مثل: $a, b, c, \ldots$

يستدل على العنصر في المصفوفة بموقعه الذي يُحدِّده كلٌّ من الصف والعمود الذي يقع فيه العنصر، ويُكتَب رقم الصف أولاً ثم رقم العمود إلى يمين رمز العنصر من الأسفل، فمثلًا :

a_{32} ← يقع العنصر في الصف 3 والعمود 2 في المصفوفة A

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 11 \\ 12 & 5 & 29 \\ 17 & 0 & 11 \\ 4 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

4 صفوف

3 أعمدة

العنصر 6 موجود في الصف 4، والعمود 2، ويُرمَز إليه بالرمز a_{42}.

يمكن وصف المصفوفة **برتبتها** ، فمثلاً

المصفوفة التي تحوي 3 صفوف و 4 أعمدة يقال إنَّها مصفوفة من الرتبة 3×4

بوجه عام اذا حَوت المصفوفة m من الصفوف و n من الأعمدة، فإنَّها تكون مصفوفة الرتبة $m \times n$ ويساوي عدد عناصرها ناتج ضرب العددين m و n .

مثال 1 : أستعمل المصفوفة: $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ للإجابة عن الأسئلة الآتية:

(1) ما رتبة المصفوفة A ؟

الحـــــل:

المصفوفة A تحوي 3 صفوف، وعمودين، فإن رتبتها هي: 3×2

(2) ما قيمة كلٌّ من العنصر a_{32} والعنصر a_{12} ؟

- العنصر a_{32} موجود في الصف 3 والعمود 2 ، قيمته هي : 4
- العنصر a_{12} موجود في الصف 1 والعمود 2 ، قيمته هي: 5

---

(3) أين يقع العنصر الذي قيمته -1 ؟

يقع العنصر الذي قيمته -1 في الصف 2 والعمود 1 . ويرمز إليه بالرمز a_{21} .

مثال 2 : أستعمل المصفوفة: $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & -3 & -5 \end{bmatrix}$ للإجابة عن الأسئلة الآتية:

(1) ما رتبة المصفوفة B ؟

المصفوفة B تحوي صفين ، و 4 أعمدة ، فإن رتبتها هي: 2×4

---

(2) ما قيمة كلٌّ من العنصر b_{24} والعنصر b_{13} ؟

- العنصر b_{24} موجود في الصف 2 والعمود 4 ، قيمته هي -5
- العنصر b_{13} موجود في الصف 1 والعمود 3 ، قيمته هي 0

---

(3) أين يقع العنصر الذي قيمته -3 ؟

يقع العنصر الذي قيمته -3 في الصف 2 والعمود 3 .

رموز رياضية : يُستعمَل الرمز $A_{3\times2}$ للدلالة على المصفوفة A التي رتبتها 3×2

لغة الرياضيات :

تُقرَأ رتبة المصفوفة $m \times n$ على النحو الآتي: m في n

مثال 3 : أُحدِّد رتبة كل مصفوفة ممّا يأتي:

(1) $[6 \quad 10]$

المصفوفة تحوي صف واحد وعمودين، فإن رتبتها هي: 1×2

---

(2) $\begin{bmatrix} 2 & 5 & -4 \\ 1 & 7 & 3 \\ 6 & 8 & 1 \end{bmatrix}$

المصفوفة تحوي 3 صفوف، و 3 أعمدة ، فإن رتبتها هي: 3×3

---

(3) $\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 8 \\ -4 \end{bmatrix}$

المصفوفة تحوي 4 صفوف، وعامود واحد ، فإن رتبتها هي: 4×1

---

(4) $[10]$

المصفوفة تحوي صف واحد ، وعمود واحد، رتبتها هي: 1×1

مثال 4 : اذا كانت: $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 9 & 8 \\ 7 & -3 & 5 & 12 \end{bmatrix}$

فأجد قيمة كل عنصر ممّا يأتي:

(1) a_{31}

العنصر a_{31} موجود في الصف 3 والعمود 1 ،فإن قيمته هي 7

---

(2) a_{23}

العنصر a_{23} موجود في الصف 2 والعمود 3 ،فإن قيمته هي 9

---

(3) a_{14}

العنصر a_{14} موجود في الصف 1 والعمود 4 ،فإن قيمته هي -2

مثال 5 : أُحدِّد موقع العنصر الذي قيمته 8 في المصفوفة:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 7 & 4 \\ 6 & 8 & 0 \\ 5 & -6 & 9 \end{bmatrix}$$

يقع العنصر الذي قيمته 8 في الصف 3 والعمود 2

ويرمز لموقع العنصر 8 بـ a_{32}

2. أنواع خاصة من المصفوفات

مصفوفة الصف: هي المصفوفة التي تتكوَّن من صف واحد فقط وعدد من الأعمدة ، مثل :

$$A = [2 \quad -4 \quad 0 \quad 7]$$

مصفوفة العمود : هي المصفوفة التي تتكوَّن من عمود واحد وعِدَّة صفوف ، مثل :

$$B = \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}$$

المصفوفة المُربَّعة : هي المصفوفة التي يتساوى فيها عدد الصفوف وعدد الأعمدة ، مثل :

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 5 & 1 & 8 \\ 7 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

المصفوفة الصفرية : هي المصفوفة التي يكون جميع عناصرها أصفارًا ، مثل :

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

العناصر المُتناظِرة في مصفوفتين : هي العناصر التي تقع في الصف والعمود نفسيهما.

المصفوفتان المُتساوِيتان : هما مصفوفتان لهما الرتبة نفسها، وعناصرهما المُتناظِرة مُتساوِية.

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

المصفوفتان غير مُتساوِيتين

لعدم تساوي جميع العناصر المُتناظِرة فيهما.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

المصفوفتان غير مُتساوِيتين

لإختلاف رتبتيهما

$$\begin{bmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 0 & 7 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 0 & 7 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

المصفوفتان مُتساوِيتان

لأنَّهما من الرتبة نفسها ،وعناصرهما المُتناظِرة مُتساوِية

مثال 1 : أُحدِّد النوع والرتبة لكل مصفوفة ممّا يأتي:

(1) $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

المصفوفة A مصفوفة مُربَّعة، ورتبتها هي: 2×2

---

(2) $B = [4 \quad 5 \quad 7]$

المصفوفة B مصفوفة صف، ورتبتها هي: 1×3

---

(3) $C = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \\ 9 \end{bmatrix}$

المصفوفة C مصفوفة عمود، ورتبتها هي: 4×1

---

4) اذا كانت: $\begin{bmatrix} 2 & x+1 \\ 3y+10 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 10 \\ y & 1 \end{bmatrix}$،

فأجد قيمة كل من x ، و y.

الحـــــل:

$x + 1 = 10 \rightarrow x = 9$

$3y + 10 = y \rightarrow 2y + 10 = 0$

$\rightarrow 2y = -10$

$\rightarrow y = -5$

مثال 2 : أُحدِّد النوع والرتبة لكل مصفوفة ممّا يأتي:

(1) $D = \begin{bmatrix} 2 & 7 & -3 \\ 6 & 4 & 0 \\ 12 & 9 & 5 \end{bmatrix}$

المصفوفة D مصفوفة مُربَّعة، ورتبتها هي: 3×3

---

(2) $E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

المصفوفة E مصفوفة صفرية، ورتبتها هي: 2×3

---

(3) $F = [-4 \quad 0 \quad -2 \quad 1 \quad 0]$

المصفوفة F مصفوفة صف، ورتبتها هي: 1×5

d) اذا كانت: $\begin{bmatrix} 3x-2 & 8 \\ 2 & 2x+4y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 8 \\ 2 & 18 \end{bmatrix}$،

فأجد قيمة كل من x ، و y.

الحـــــل:

$3x - 2 = 13 \rightarrow 3x = 15 \rightarrow x = 5$

$2x + 4y = 18 \rightarrow 2(5) + 4y = 18$

$\rightarrow 10 + 4y = 18$

$\rightarrow 4y = 8$

$\rightarrow y = 2$

مثال 3 : أُحدِّد النوع والرتبة لكل مصفوفة ممّا يأتي:

(1) $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{bmatrix}$

المصفوفة C مصفوفة مُربَّعة، ورتبتها هي: 4×4

---

(2) $A = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix}$

المصفوفة A مصفوفة عمود، ورتبتها هي: 3×1

---

(3) $B = [0 \quad 3 \quad 5 \quad 2]$

المصفوفة B مصفوفة صف، ورتبتها هي: 1×4

---

(4) $D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

المصفوفة D مصفوفة صفرية، ورتبتها هي: 2×2

مثال 4 : إذا كانت:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 4 & z & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & x+2y & 4 \\ 3x-11 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

فأجد قيمة كلٍّ من x و y و z

الحـــــل:

$$x+2y=-1 \rightarrow 5+2y=-1 \rightarrow 2y=-6$$
$$\rightarrow \boxed{y=-3}$$
$$3x-11=4 \rightarrow 3x=15$$
$$\rightarrow \boxed{x=5}$$
$$\boxed{z=2}$$

مثال 5 : إذا كانت:

$$\begin{bmatrix} 9 & x^2 \\ 2-y & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 2x+3 \\ -5 & 10 \end{bmatrix}$$

فأجد قيمة كلٍّ من x و y .

الحـــــل:

$$2-y=-5 \rightarrow -y=-7 \rightarrow \boxed{y=-3}$$
$$x^2=2x+3 \rightarrow x^2-2x-3=0$$
$$\rightarrow (x-3)(x+1)=0$$
$$\rightarrow \boxed{x=3} \ , \ \boxed{x=-1}$$

3. تنظيم البيانات في المصفوفات وتحليلها

تنظيم البيانات في مصفوفة يُسهِّل عملية تفسيرها وتحليلها ويُقدِّم مجموع البيانات في صف أو عمود معلومة ذات معنى في بعض المسائل.

مثال 1 : من الحياة

بيانات : يُبيِّن الجدول المجاور الأطوال والكتل والأعمار والصفوف الدراسية للشقيقات الثلاث هديل وهبه ولانا في إحدى المدارس:

	الطول (cm)	الكتلة (kg)	العمر (year)	الصف الدراسي
هديل	135	38	10	5
هبه	155	50	14	9
لانا	145	45	12	6

(1) أُرتِّب هذه البيانات في مصفوفة رتبتها 4×3 ، بحيث يُمثِّل الطول والكتلة والعمر والصف الدراسي صفوف المصفوفة.

$$\begin{bmatrix} 135 & 155 & 145 \\ 38 & 50 & 45 \\ 10 & 14 & 12 \\ 5 & 9 & 6 \end{bmatrix}$$

---

(2) أجد مجموع عناصر الصف الأوَّل، ثمَّ أُبيِّن ما يُمثِّله هذا المجموع (إنْ كان له معنى) .

مجموع عناصر الصف الأوَّل هو 435

وهذا المجموع يُمثِّل مجموع أطوال الشقيقات الثلاث.

---

(3) أجد مجموع عناصر الصف الرابع ، ثمَّ أُبيِّن ما يُمثِّله هذا المجموع (إنْ كان له معنى) .

مجموع عناصر الصف الرابع هو 20

وهذا المجموع لا يُمثِّل شيئًا ذا معنى

---

(4) هل إيجاد الوسط الحسابي لعناصر الصف الثاني يُقدِّم بيانات ذات معنى؟ أُبرِّر إجابتي.

نعم؛ لأنَّه يدلُّ على الوسط الحسابي لكتل الشقيقات الثلاث.

مثال 2 : سياحة: يُبيِّن الجدول المجاور نتائج استطلاع آراء عيِّنات من سُكّان ثلاث قرى متجاورة بخصوص مشروع سياحي يُراد إقامته في موقع يتوسَّط هذه القرى:

	مُؤيِّد	مُعارِض	مُحايِد
المدينة A	800	130	70
المدينة B	460	250	40
المدينة C	1300	700	200

(1) أُرتِّب هذه البيانات في مصفوفة صفوفها القرى؛ على أنْ يكون عدد المُؤيِّدين مُرتَّبًا ترتيبا تصاعديًّا.

الحـــــل:

$$\begin{bmatrix} 460 & 250 & 40 \\ 800 & 130 & 70 \\ 1300 & 700 & 200 \end{bmatrix}$$

---

(2) أجد مجموع عناصر الصف الأوَّل، ثمَّ أُبيِّن ما يُمثِّله هذا المجموع (إنْ كان له معنى) .

الحـــــل:

مجموع عناصر الصف الأوَّل هو 750

وهذا المجموع يُمثِّل عدد سكان المدينة B .

---

(3) أجد مجموع عناصر العمود الثاني، ثمَّ أُبيِّن ما يُمثِّله هذا المجموع

الحـــــل:

مجموع عناصر العمود الثاني هو 1080

وهذا المجموع يُمثِّل عدد المعارضين من سكان المدن الثلاث.

---

(4) هل إيجاد الوسط الحسابي لعناصر العمود الثاني يُقدِّم بيانات ذات معنى؟ أُبرِّر إجابتي

الحـــــل:

نعم ، لأنه يدلُّ على الوسط الحسابي لجميع المعارضين من سكان المدن الثلاث.

مثال 3 : رياضة: يُبيِّن الجدول المجاور إنجازات ثلاثة من لاعبي كرة القدم في مباريات دوري الصفوف في إحدى المدارس:

	المباريات	التسديدات	الأهداف
سمير	8	15	7
أحمد	11	25	13
فوّاز	14	20	9

(1) أُنظِّم هذه البيانات في المصفوفة S ، بحيث تحوي صفوفها إنجازات اللاعبين الثلاثة، وتُرتَّب فيها الأهداف تنازليًّا ، ثمَّ أجد قيمة العنصر S_{32} .

$$\begin{bmatrix} 13 & 25 & 11 \\ 9 & 20 & 14 \\ 7 & 15 & 8 \end{bmatrix} \quad , \quad S_{32} = 15$$

---

(2) أجد مجموع عناصر الصف الثاني، ثمَّ أُبيِّن ما يُمثِّله هذا المجموع (إن كان له معنى) .

مجموع عناصر الصف الثاني 43 ، وهذا المجموع يُمثِّل مجموع عدد المباريات والتسديدات والأهداف التي حققها فواز

---

(3) أجد مجموع عناصر العمود الثالث، ثمَّ أُبيِّن ما يُمثِّله هذا المجموع (إن كان له معنى) .

مجموع عناصر العمود الثالث هو 29 ، وهذا المجموع يُمثِّل مجموع عدد الأهداف التي أحرزها اللاعبون الثلاثة معًا.

مثال 4 : كهربائيات: تتوزّع 3 مستودعات لإحدى وكالات تجارة الأجهزة الكهربائية في 3 مدن. يوجد في المستودع الأوّل 200 ثلّاجة، و 380 غسّالة، و 250 شاشة، و 300 مروحة، ويوجد في المستودع الثاني 160 ثلّاجة و 540 غسّالة، و 290 مروحة، ويوجد في المستودع الثالث 120 ثلّاجة، و 280 غسّالة، و 400 شاشة، و 470 مروحة:

(1) أُنظّم هذه البيانات في مصفوفة تُمثّل أعمدتها أنواع الأجهزة الكهربائية، ثمَّ أُحدّد رتبة المصفوفة الناتجة.

$$\begin{bmatrix} 300 & 250 & 380 & 200 \\ 290 & 0 & 540 & 160 \\ 470 & 400 & 280 & 120 \end{bmatrix}$$

رتبة المصفوفة الناتجة هي : 3×4

---

(2) أجمع عناصر كل صف، ثمَّ أُبيِّن ما يُمثّله هذا المجموع

مجموع عناصر الصف الأول 1130 .

مجموع عناصر الصف الثاني 990 .

مجموع عناصر الصف الثالث 1270 .

✅ هذه المجاميع تمثل إجمالي عدد الأجهزة في كل مستودع

- المستودع الأول: 1130 جهازًا
- المستودع الثاني: 990 جهازًا
- المستودع الثالث: 1270 جهازًا

---

(3) أجمع عناصر كل عمود، ثمَّ أُبيِّن ما يُمثّله هذا المجموع.

مجموع عناصر العمود الأول 480 .

مجموع عناصر العمود الثاني 1200 .

مجموع عناصر العمود الثالث 650 .

مجموع عناصر العمود الرابع 1060 .

✅ هذه المجاميع تمثل إجمالي عدد كل نوع من الأجهزة في جميع المستودعات.

- المستودع الأول (الثلاجات) : 480
- المستودع الثاني (الغسالات) : 1200
- المستودع الثالث (الشاشات) : 650
- المستودع الرابع (المراوح) : 1060

مثال 6 :

سُئِلت الأُسَر في مدينتين عن مصدر التدفئة الذي تستعمله في فصل الشتاء، ثمَّ سُجِّلت النتائج في الجدول المجاور الذي يُبيِّن عدد الأُسَر التي تستعمل كل مصدر. كيف يُمكن عرض بيانات الجدول بصورة أُخرى مُختصَرة؟

	الغاز	الكهرباء	الكاز	أُخرى
المدينة A	3256	1678	4589	1253
المدينة B	4560	978	5874	2564

نرتب المصادر حسب الجدول:

أخرى – الكاز – الكهرباء – الغاز

$$\begin{bmatrix} 3256 & 1678 & 4589 & 1253 \\ 4560 & 978 & 5874 & 2564 \end{bmatrix}$$

حيث:

الصف الأول يمثل المدينة A و الصف الثاني يمثل المدينة B

مهارات التفكير العليا

سؤال 1 : تبرير: أُبيِّن إذا كانت العبارة الآتية صحيحة دائمًا، أو صحيحة أحيانًا، أو غير صحيحة إطلاقًا، ثمَّ أُبرِّر إجابتي.

إذا كان للمصفوفة A والمصفوفة B العدد نفسه من العناصر، فإنَّ $A = B$.

الإجابة: ✗ العبارة غير صحيحة إطلاقًا.

◆ **التبرير:** امتلاك المصفوفتين لنفس عدد العناصر لا يعني أنهما متساويتان.

مثال للتوضيح:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}$$

$$A \neq B$$

سؤال 2 : مسألة مفتوحة: أُنشِئ مصفوفة مُربَّعة من الرتبة 3 وأُسمّيها A، بحيث يكون $a_{ij} = a_{ji}$، لكل من i, j.

هذا يعني أن المصفوفة تماثلية أي أن عنصر الصف i والعمود j يساوي عنصر الصف j والعمود i

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 5 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 7 \end{bmatrix}$$

سؤال 3 : تبرير: إذا كان عدد عناصر المصفوفة B عددًا أوَّليًّا، فماذا يُمكِن أنْ تكون رتبتها؟ أُبرِّر إجابتي.

الحـــــل:

إذا كان عدد عناصر المصفوفة B عددًا أوليًّا، فإن رتبتها **لا يمكن** أن تكون مصفوفة مربعة، بل لا بد أن تكون **مصفوفة مستطيلة**.

◆ **التبرير:** عدد العناصر = الصفوف × الأعمدة

- لكن إذا كان هذا الناتج عددًا أوليًا (مثل 2، 3، 5، 7، 11 ..) فليس له إلا عاملان فقط 1 والعدد نفسه.
- إذًا الرتبة الممكنة للمصفوفة ستكون: اما 1×p أو p×1 حيث p هو العدد الأولي

● مثال: إذا كان عدد العناصر = 7 (عدد أولي)، فالمصفوفة يمكن أن تكون فقط :رتبتها 7×1 أو 1×7

سؤال 4 : إذا كانت المسافة بين إربد وعمّان $88\ km$، والمسافة بين عمان والعقبة $324\ km$، والمسافة بين اربد والعقبة $408\ km$، فأُنشِئ مصفوفة رتبتها 3×3 لتمثيل المسافات بين المدن الثلاث، ثمَّ أُبرِّر إجابتي.

المعطيات :

- إربد ↔ عمّان = 88 كم
- عمّان ↔ العقبة = 324 كم
- إربد ↔ العقبة = 408 كم

$$\begin{bmatrix} 408 & 88 & 0 \\ 324 & 0 & 88 \\ 0 & 344 & 408 \end{bmatrix}$$

سؤال 5 : تحدٍّ: أكتب المصفوفة B، حيث: $b_{ij} = 2i - j$، لكل $i \in \{1, 2, 3\}$، ولكل $j \in \{1, 2, 3, 4\}$.

$i \in \{1, 2, 3\}$ → 3 صفوف

$j \in \{1, 2, 3, 4\}$ → 4 أعمدة

$b_{11} = 2(1) - 1 = 1$ $\quad b_{21} = 2(2) - 1 = 3$

$b_{12} = 2(1) - 2 = 0$ $\quad b_{22} = 2(2) - 2 = 2$

$b_{13} = 2(1) - 3 = -1$ $\quad b_{23} = 2(2) - 3 = 1$

$b_{14} = 2(1) - 4 = -2$ $\quad b_{24} = 2(2) - 4 = 0$

$b_{31} = 2(3) - 1 = 5$

$b_{32} = 2(3) - 2 = 4$

$b_{33} = 2(3) - 3 = 3$

$b_{44} = 2(4) - 4 = 4$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

سؤال 8 : تحدٍّ: أجد قيمة كلٍّ من x، و y، و z إذا كانت :

$$\begin{bmatrix} x + 2y & x - y \\ x + y + 3z & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 7 \\ 2 & 10 \end{bmatrix}$$

الحـــــل:

$x + 2y = 13$ → $x + 2y = 13$

$x - y = 7$ → $-x + y = -7$

$3y = 6$ → $\boxed{y = 2}$

$x - 2 = 7$ → $\boxed{x = 9}$

$9 + 2 + 3z = 2$

$11 + 3z = 2$

$3z = -9$ → $\boxed{z = -3}$

أُحدِّد رتبة كل مصفوفة ممّا يأتي:

1. $\begin{bmatrix} 0 & 4 & -1 \\ 5 & -3 & 6 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} -8 & 5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} -4 & 3 & 7 \end{bmatrix}$

5. $\begin{bmatrix} 5 & 8 & 2 \\ -4 & 0 & 3 \\ 7 & 6 & 5 \end{bmatrix}$

6. $\begin{bmatrix} 6 & 4 & 0 \\ 5 & -2 & 1 \\ 3 & 8 & -2 \\ 1 & 9 & 10 \end{bmatrix}$

يُبيِّن الجدول المجاور الأسعار (بالقروش) لعدد من المشروبات في أحد المَحالِّ التجارية:

المشروب	صغير	وسط	كبير
غازيٌّ	40	60	75
شاي	30	40	55
قهوة	50	70	90
عصير	65	90	125

7. أُرتِّب هذه البيانات في مصفوفة رتبتها 4×3، ثمَّ أُسمّي المصفوفة P.

8. أجد العنصر p_{32}، ثمَّ أُبيِّن ما يُمثِّله.

9. ما رمز العنصر 55 في هذه المصفوفة؟

10. إذا كانت: $\begin{bmatrix} 5 & x+3 \\ 8 & 0 \\ 1 & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ x+y & 0 \\ 1 & y+4 \end{bmatrix}$، فأجد قيمة كلٍّ من x، و y، و z.

خدمات حكومية: يُتوقَّع إنشاء مدارس ومراكز صِحِّية جديدة عام **2025**م وعام **2026**م في ثلاث محافظات كما هو مُبيَّن في الجدول المجاور:

	المدارس	المراكز الصِّحِّية
المحافظة 1	54	12
المحافظة 2	94	23
المحافظة 3	75	18

11. أُرتِّب هذه البيانات في مصفوفة رتبتها 2×3

12. أجد مجموع عناصر الصف الأوَّل، ثمَّ أُبيِّن ما يُمثِّله هذا المجموع (إنْ كان له معنى).

13. أجد مجموع عناصر العمود الثاني، ثمَّ أُبيِّن ما يُمثِّله هذا المجموع (إنْ كان له معنى).

الدرس الثاني : العمليات على المصفوفات

Operations on Matrices

1. جمع المصفوفات وطرحها.

مفهوم أساسي: جمع المصفوفات وطرحها

بالكلمات: إذا كانت A , B مصفوفتين من الرتبة $m \times n$ فإنَّ $A + B$ مصفوفة من الرتبة $m \times n$ ، وكل عنصر فيها هو مجموع العنصرين اللذين يُناظِرانه في هاتين المصفوفتين. وبالمثل، فإنَّ $A - B$ مصفوفة من الرتبة $m \times n$ ، وكل عنصر فيها يساوي ناتج طرح العنصرين المُناظِرين له في المصفوفة A والمصفوفة B.

بالرموز: إذا كانت: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$ ، فإنَّ:

$$A \pm B = \begin{bmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} & \cdots & a_{1n} \pm b_{1n} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} & \cdots & a_{2n} \pm b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} \pm b_{m1} & a_{m2} \pm b_{m2} & \cdots & a_{mn} \pm b_{mn} \end{bmatrix}$$

مثال: $\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+5 & 6+(-3) \\ -1+3 & 4+(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

مثال 1 : إذا كانت:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -1 & -5 & 4 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 0 \\ -7 & 6 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 7 & 6 \end{bmatrix} \quad , \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \\ -9 & 1 \end{bmatrix}$$

فأجد ناتج كلٍّ ممّا يأتي (إنْ أمكن) :

(1) $A + C$

الحـــــل:

$$A + C = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -1 & -5 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 7 & 6 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 2+3 & 4+(-1) & 6+2 \\ -1+4 & -5+7 & 4+6 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 5 & 3 & 8 \\ 3 & 2 & 10 \end{bmatrix}$$

---

(2) $A + B$

الحـــــل:

بما أن A, B من رتبتين مختلفتين ، فلا يمكن جمعهما .

(3) $B - D$

الحـــــل:

$$B - D = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 0 \\ -7 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \\ -9 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 5-2 & -2-4 \\ 3-5 & 0-3 \\ -7-(-9) & 6-1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ -2 & -3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

---

(4) $C - A$

الحـــــل:

$$C - A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 7 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -1 & -5 & 4 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 3-2 & -1-4 & 2-6 \\ 4-(-1) & 7-(-5) & 6-4 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & -5 & -4 \\ 5 & 12 & 2 \end{bmatrix}$$

---

(5) $D + B$

الحـــــل:

$$D + B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \\ -9 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 0 \\ -7 & 6 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 2+5 & 4+(-2) \\ 5+3 & 3+0 \\ -9+(-7) & 1+6 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 8 & 3 \\ -16 & 7 \end{bmatrix}$$

---

(6) $C + D$

الحـــــل:

بما أن C, D من رتبتين مختلفتين ، فلا يمكن جمعهما .

مثال 2 : أجد ناتج كلٍّ ممّا يأتي (إنْ أمكن) :

(1) $\begin{bmatrix} 7 & -3 \\ 4 & 6 \\ 10 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & 8 \\ 5 & 0 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 9 & 6 \\ 14 & -5 \end{bmatrix}$

---

(2) $\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 6 & 8 \\ 9 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 8 & -2 \\ 5 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

بما أن المصفوفتين من رتبتين مختلفتين ، فلا يمكن جمعهما .

---

(3) $\begin{bmatrix} 9 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$

---

(4) $\begin{bmatrix} 12 & -3 \\ 22 & 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -6 & -5 \\ 9 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 2 \\ 13 & 5 \end{bmatrix}$

---

(5) $\begin{bmatrix} 25 & 10 & 13 \\ 0 & 7 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -31 & 26 & -9 \\ 7 & 2 & 12 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -6 & 36 & 4 \\ 7 & 9 & 21 \end{bmatrix}$

---

(6) $[\,32 \quad -12 \quad 8\,] - [\,-6 \quad 43 \quad -7\,]$

$= [\,38 \quad -55 \quad 15\,]$

2. ضرب المصفوفة في عدد ثابت

مفهوم أساسي: ضرب المصفوفة في عدد ثابت

بالكلمات: إذا كانت A مصفوفة رتبتها $m \times n$ وكان k فإنَّ kA مصفوفة رتبتها $m \times n$ ، وكل عنصر فيها يساوي العنصر المناظر لها في المصفوفة A مضروباً في k.

بالرموز: إذا كان: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ ، وكان k عددًا ثابتًا، فإنَّ:

$$kA = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{bmatrix}$$

مثال 1 : إذا كانت: $C = \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ 3 & 4 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$ ، فأجد $5C$

الحـــــل:

$$5C = 5\begin{bmatrix} -2 & 7 \\ 3 & 4 \\ 6 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5(-2) & 5(7) \\ 5(3) & 5(4) \\ 5(6) & 5(5) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -10 & 35 \\ 15 & 20 \\ 30 & 25 \end{bmatrix}$$

مثال 2 : إذا كانت: $D = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -3 \\ 7 & -2 & 1 \\ 8 & 10 & 6 \end{bmatrix}$

فأجد كلاً مما يأتي:

(1) $3D$

الحـــــل:

$$3D = 3\begin{bmatrix} 0 & 4 & -3 \\ 7 & -2 & 1 \\ 8 & 10 & 6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3(0) & 3(4) & 3(-3) \\ 3(7) & 3(-2) & 3(1) \\ 3(8) & 3(10) & 3(6) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 12 & -9 \\ 21 & -6 & 3 \\ 24 & 30 & 18 \end{bmatrix}$$

(2) $-2D$

الحـــــل:

$$-2D = -2\begin{bmatrix}0 & 4 & -3\\ 7 & -2 & 1\\ 8 & 10 & 6\end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix}-2(0) & -2(4) & -2(-3)\\ -2(7) & -2(-2) & -2(1)\\ -2(8) & -2(10) & -2(6)\end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix}0 & -8 & 6\\ -14 & 4 & -2\\ -16 & -20 & -12\end{bmatrix}$$

---

(3) $1.5D$

الحـــــل:

$$1.5D = 1.5\begin{bmatrix}0 & 4 & -3\\ 7 & -2 & 1\\ 8 & 10 & 6\end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix}1.5(0) & 1.5(4) & 1.5(-3)\\ 1.5(7) & 1.5(-2) & 1.5(1)\\ 1.5(8) & 1.5(10) & 1.5(6)\end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix}0 & 6 & -4.5\\ 9.5 & -3 & 1.5\\ 12 & 15 & 9\end{bmatrix}$$

مثال 3 : أجد ناتج كلٌ ممّا يأتي (إن أمكن) :

(1) $3\begin{bmatrix}9 & -2\\ 4 & 1\\ 6 & -3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}27 & -6\\ 12 & 3\\ 18 & -9\end{bmatrix}$

---

(2) $\frac{2}{3}\begin{bmatrix}15 & -21\\ 9 & 5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}10 & -14\\ 6 & \frac{10}{3}\end{bmatrix}$

---

(3) $-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}4 & 12 & -32\\ 9 & 6 & -3\end{bmatrix}$

الحـــــل:

$$= \begin{bmatrix}-2 & -5 & 16\\ -4.5 & -3 & 1.5\end{bmatrix}$$

3. خصائص العمليات على المصفوفات

مفهوم أساسي: خصائص العمليات على المصفوفات

إذا كانت A, B, C ثلاث مصفوفات لها الرتبة نفسها، وكان k, h عددين حقيقين ، فإن :

1. $A + B = B + A$ الخاصية التبديلية
2. $A + B + C = (A + B) + C$
   $= A + (B + C)$ الخاصية التجميعية
3. $k(A + B) = kA + kB$
   خاصية توزيع الضرب في ثابت

مثال 1 : إذا كانت:

$$A = \begin{bmatrix}1 & 2\\ 4 & 3\end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix}0 & 8\\ 12 & 5\end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix}4 & 7\\ -8 & 1\end{bmatrix}$$

فأجد $3A + 2B - 5C$.

الحـــــل:

$$3A + 2B - 5C$$
$$= 3\begin{bmatrix}1 & 2\\ 4 & 3\end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix}0 & 8\\ 12 & 5\end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix}4 & 7\\ -8 & 1\end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix}3(1) & 3(2)\\ 3(4) & 3(3)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}2(0) & 2(8)\\ 2(12) & 2(5)\end{bmatrix}$$
$$+ \begin{bmatrix}-5(4) & -5(7)\\ -5(-8) & -5(1)\end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix}3 & 6\\ 12 & 9\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & 16\\ 24 & 10\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-20 & -35\\ 40 & -5\end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix}-17 & -13\\ 79 & 14\end{bmatrix}$$

مثال 2 : إذا كانت:

$$E = \begin{bmatrix}5\\ -3\\ 9\end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix}6\\ 8\\ 12\end{bmatrix}$$
$$G = [3 \quad 0 \quad 7], \quad H = [6 \quad -4 \quad 9]$$

فأجد كلاً مما يأتي (إن أمكن) :

(1) $4E - 3G$

بما أن E, G من رتبتين مختلفتين ، فلا يمكن اجراء أي عملية حسابية .

(2) $2G + 6F$

بما أن F, G من رتبتين مختلفتين ، فلا يمكن اجراء أي عملية حسابية .

---

(3) $5(G + H)$

$= 5([3 \quad 0 \quad 7] + [6 \quad -4 \quad 9])$
$= 5([9 \quad -4 \quad 16])$
$= [5(9) \quad 5(-4) \quad 5(16)]$
$= [45 \quad -20 \quad 80]$

مثال 3 : أجد ناتج كلٍّ ممّا يأتي (إنْ أمكن) :

(1) $2\begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 2 & 9 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 2 & -10 \\ 4 & 18 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 12 & 6 \\ 9 & -15 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 14 & -4 \\ 13 & 3 \end{bmatrix}$

---

(2) $-4\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 6 \\ -2 & 7 & 4 \\ 6 & 3 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 9 & 6 & 10 \\ 5 & -4 & 1 \\ 8 & -1 & 7 \end{bmatrix}\right)$

$= -4\left(\begin{bmatrix} -9 & -5 & -4 \\ -7 & 11 & 3 \\ -2 & 4 & -2 \end{bmatrix}\right)$

$= \begin{bmatrix} 36 & 20 & 16 \\ 28 & -44 & -12 \\ 8 & -16 & 8 \end{bmatrix}$

---

(3) $2\begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 6 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 0 & -1 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix} -2 & -4 \\ -3 & 2 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -8 & -4 \\ 12 & 6 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 15 & 3 \\ 0 & -3 \\ 12 & -9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 & 20 \\ 15 & -10 \\ -30 & 0 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 17 & 19 \\ 27 & -7 \\ -18 & -1 \end{bmatrix}$

مثال 4 :اذا كانت:

$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 10 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -5 \\ 3 & 2 & 8 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -9 \end{bmatrix}$

فأجد كُلًّا ممّا يأتي (إنْ أمكن):

(1) $4A + 3B$

بما أن المصفوفتين من رتبتين مختلفتين ، فلا يمكن جمعهما .

---

(2) $2C - 3A$

$= 2\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -9 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 10 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 0 & -18 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -12 & 6 \\ 9 & -30 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -6 & 10 \\ 9 & -48 \end{bmatrix}$

---

(3) $B + 1.5B$

$= \begin{bmatrix} 4 & -1 & -5 \\ 3 & 2 & 8 \end{bmatrix} + 1.5\begin{bmatrix} 4 & -1 & -5 \\ 3 & 2 & 8 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 4 & -1 & -5 \\ 3 & 2 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & -1.5 & -7.5 \\ 4.5 & 3 & 12 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 10 & -2.5 & -12.5 \\ 7.5 & 5 & 20 \end{bmatrix}$

---

(4) $3B + 2C$

بما أن المصفوفتين من رتبتين مختلفتين ، فلا يمكن جمعهما .

---

(5) $2A - C$

$= 2\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 10 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -9 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 8 & -4 \\ -6 & 20 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ -6 & 29 \end{bmatrix}$

---

(6) $4A + 3C$

$= 4\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 10 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -9 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 16 & -8 \\ -12 & 40 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ 0 & -27 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 25 & -2 \\ -12 & 13 \end{bmatrix}$

4. مسائل حياتية.

مثال 1 : تجارة : لدى إحدى الشركات التجارية فرع في مدينة عمّان، وفرع آخر في مدينة إربد. إذا مثّلت المصفوفة A والمصفوفة B مُعدَّل المبيعات والأرباح اليومية من الأدوات الكهربائية (بمئات الدنانير) في هذين الفرعين على الترتيب، فأجد المصفوفة C التي تمثل مُعدَّل المبيعات والأرباح الشهرية للفرعين معًا.

$$A=\begin{matrix} \\ \text{عمّان 1} \\ \text{عمّان 2} \end{matrix}\begin{matrix}\begin{bmatrix} 56 & 4 \\ 45 & 3.5 \end{bmatrix}\end{matrix}\begin{matrix} \text{المبيعات} & \text{الأرباح} \end{matrix}$$

$$B=\begin{matrix} \\ \text{إربد 1} \\ \text{إربد 2} \end{matrix}\begin{matrix}\begin{bmatrix} 48 & 3 \\ 66 & 9 \end{bmatrix}\end{matrix}\begin{matrix} \text{المبيعات} & \text{الأرباح} \end{matrix}$$

الحـــــل:

الخطوة 1 : أجمع المصفوفة A والمصفوفة B

$$A+B=\begin{bmatrix} 56 & 4 \\ 45 & 3.5 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 48 & 3 \\ 66 & 9 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 104 & 7 \\ 111 & 12.5 \end{bmatrix}$$

الخطوة 2 : أضرِب المصفوفة الناتجة من الفرع السابق في 30 (بافتراض أنَّ الشهر 30 يومًا) .

$$C=30(A+B)$$

$$=30\begin{bmatrix} 104 & 7 \\ 111 & 12.5 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 3120 & 210 \\ 3330 & 375 \end{bmatrix}$$

إذن، المصفوفة C التي تُمثِّل مُعدَّل المبيعات والأرباح الشهرية للفرعين معًا بمئات الدنانير هي: $\begin{bmatrix} 3120 & 210 \\ 3330 & 375 \end{bmatrix}$.

أُفكِّر

هل توجـد طريقة أُخرى لحلِّ المسألة؟

مثال 2 : زراعة : يملك كلٌّ من راشد وحمد مزرعة في الأغوار، ومزرعة أُخرى في المفرق. إذا مثَّلت المصفوفة A مُعدَّل الإنتاج اليومي (بالكيلوغرام) لمزرعتيهما في الأغوار من البندورة والباذنجان والفلفل، ومثَّلت المصفوفة B مُعدَّل الإنتاج اليومي لمزرعتيهما في المفرق من الأصناف نفسها، فأجد المصفوفة C التي تُمثِّل مُعدَّل الإنتاج الأسبوعي (بالكيلوجرام) لمزرعتي راشد وحمد في الموقعين معًا.

$$A=\begin{matrix} \\ \text{راشد} \\ \text{حمد} \end{matrix}\begin{matrix}\begin{bmatrix} 200 & 500 & 100 \\ 260 & 430 & 245 \end{bmatrix}\end{matrix}\begin{matrix} \text{بندورة} & \text{باذنجان} & \text{فلفل} \end{matrix}$$

$$B=\begin{matrix} \\ \text{راشد} \\ \text{حمد} \end{matrix}\begin{matrix}\begin{bmatrix} 130 & 100 & 300 \\ 240 & 300 & 175 \end{bmatrix}\end{matrix}\begin{matrix} \text{بندورة} & \text{باذنجان} & \text{فلفل} \end{matrix}$$

الحـــــل:

الخطوة 1 : أجمع المصفوفة A والمصفوفة B

$$A+B$$

$$=\begin{bmatrix} 200 & 500 & 100 \\ 260 & 430 & 245 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 130 & 100 & 300 \\ 240 & 300 & 175 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 230 & 600 & 400 \\ 500 & 730 & 440 \end{bmatrix}$$

الخطوة 2 : أضرِب المصفوفة الناتجة من الفرع السابق في 7 (بافتراض أنَّ الاسبوع 7 أيام) .

$$C=7(A+B)$$

$$=7\begin{bmatrix} 230 & 600 & 400 \\ 500 & 730 & 440 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 1610 & 4200 & 2800 \\ 3500 & 5110 & 3080 \end{bmatrix}$$

إذن، المصفوفة C التي تمثل مُعدَّل الإنتاج الأسبوعي (بالكيلوجرام) لمزرعتي راشد وحمد في الموقعين معًا هي: $\begin{bmatrix} 1610 & 4200 & 2800 \\ 3500 & 5110 & 3080 \end{bmatrix}$.

مثال 3 : رياضة: لدى مَحَلّ تجهيزات رياضية فرع في مدينة الكرك، وفرع آخر في مدينة الطفيلة. إذا مثّلت المصفوفة A عدد البدلات الرياضية التي باعها الفرعان معًا من جميع المقاسات (الصغيرة، والمُتوسّطة، والكبيرة) في شهر نيسان عام 2024 م، ومثّلت المصفوفة B عدد البدلات التي باعها الفرعان معًا من المقاسات الثلاثة في شهر نيسان عام 2023 م، فأجد المصفوفة التي تُمثّل ما باعه كلا الفرعين في الشهرين معًا

$$A=\begin{matrix} \\ \text{الكرك} \\ \text{الطفيلة} \end{matrix}\begin{matrix}\begin{bmatrix}20 & 15 & 10 \\ 12 & 30 & 17\end{bmatrix}\end{matrix}\begin{matrix}\text{صغير} & \text{وسط} & \text{كبير}\end{matrix}$$

$$B=\begin{matrix} \\ \text{الكرك} \\ \text{الطفيلة} \end{matrix}\begin{matrix}\begin{bmatrix}18 & 42 & 23 \\ 20 & 25 & 21\end{bmatrix}\end{matrix}\begin{matrix}\text{صغير} & \text{وسط} & \text{كبير}\end{matrix}$$

الحـــــل:

المصفوفة التي تُمثّل ما باعه كلا الفرعين في الشهرين معًا هي حاصل جمع المصفوفة A والمصفوفة B . (سنرمز لها بالرمز C)

$$C = A + B$$

$$= \begin{bmatrix}20 & 15 & 10 \\ 12 & 30 & 17\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}18 & 42 & 23 \\ 20 & 25 & 21\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}38 & 57 & 33 \\ 32 & 55 & 38\end{bmatrix}$$

مثال 4 : مدارس: يُبيِّن الجدول المجاور محتويات مختبري الحاسوب في إحدى المدارس عام 2024 م. تُخطّط إدارة المدرسة لزيادة هذه المحتويات بما نسبته 10% . أكتب مصفوفة تُمثّل ما يجب شراؤه للمختبرين، ومصفوفة أُخرى تُمثّل محتويات المختبرين بعد عملية الشراء.

	مقاعد	طاولات	أجهزة حاسوب
المختبر A	30	20	12
المختبر B	40	28	20

الحـــــل:

مصفوفة تُمثّل محتويات مختبري الحاسوب في إحدى المدارس عام 2024 م (قبل عملية الشراء) :

$$M = \begin{bmatrix}12 & 20 & 30 \\ 20 & 28 & 40\end{bmatrix}$$

- مصفوفة تُمثّل ما يجب شراؤه للمختبرين :

$$C = \text{الزيادة} = 0.10 \times M$$

$$= \begin{bmatrix}0.10 \times 12 & 0.10 \times 20 & 0.10 \times 30 \\ 0.10 \times 20 & 0.10 \times 28 & 0.10 \times 40\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}1.2 & 2 & 3 \\ 2 & 2.8 & 4\end{bmatrix}$$

- مصفوفة تُمثّل محتويات المختبرين (بعد عملية الشراء)

$$D = M + C$$

$$= \begin{bmatrix}12 & 20 & 30 \\ 20 & 28 & 40\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1.2 & 2 & 3 \\ 2 & 2.8 & 4\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}13.2 & 22 & 33 \\ 22 & 30.8 & 44\end{bmatrix}$$

أسئلة متنوعة

سؤال 1 : أجد قيمة كل من x , y , z التي تُحقِّق المعادلة الآتية:

$$2\begin{bmatrix} x & 3 \\ 6 & y \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} x & 6 \\ z & -2 \end{bmatrix} - 4\begin{bmatrix} z & 3 \\ 0 & x \end{bmatrix}$$

الحـــــل:

$$\begin{bmatrix} 2x & 6 \\ 12 & 2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x & 18 \\ 3z & -6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4z & -12 \\ 0 & -4x \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2x & 6 \\ 12 & 2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x - 4z & 6 \\ 3z & -6 - 4x \end{bmatrix}$$

$3z = 12 \quad \rightarrow \quad \boxed{z = 4}$

$2x = 3x - 4z \quad \rightarrow \quad -x = -4(4)$

$\rightarrow \quad -x = -16$

$\rightarrow \quad \boxed{x = 16}$

$2y = -6 - 4x \quad \rightarrow \quad 2y = -6 - 4(16)$

$\rightarrow \quad 2y = -6 - 64$

$\rightarrow \quad 2y = -70$

$\rightarrow \quad \boxed{y = -35}$

سؤال 2 : أحُلُّ المسالة الواردة في بند (مسألة اليوم).

تُمثِّل المصفوفة: $A = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.75 \\ 0.6 & 1 \\ 1.5 & 2.5 \end{bmatrix}$ أسعار البيع

(بالدينار) لثلاثة مشروبات (شاي، قهوة، عصير) بأكواب صغيرة وأُخرى كبيرة في أحد الأكشاك. وقد قرَّر صاحب الكشك رفع الأسعار بما نسبته 20% نظرًا إلى زيادة التكاليف.

ما المصفوفة التي تُمثِّل الأسعار الجديدة ؟

الحـــــل:

مصفوفة تُمثِّل أسعار البيع (بالدينار) لثلاثة مشروبات (شاي، قهوة، عصير) بأكواب صغيرة وأُخرى كبيرة :

$$M = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.75 \\ 0.6 & 1 \\ 1.5 & 2.5 \end{bmatrix}$$

- مصفوفة تُمثِّل فرق السعر بعد رفعها بنسبة 20% :

$$C = \text{الزيادة} = 0.20 \times M$$

$$= \begin{bmatrix} 0.20 \times 0.4 & 0.20 \times 0.75 \\ 0.20 \times 0.6 & 0.20 \times 1 \\ 0.20 \times 1.5 & 0.20 \times 2.5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.08 & 0.15 \\ 0.12 & 0.2 \\ 0.3 & 0.5 \end{bmatrix}$$

- مصفوفة تُمثِّل مصفوفة تُمثِّل أسعار البيع (بالدينار) بعد رفعها بنسبة 20% :

$$D = M + C = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.75 \\ 0.6 & 1 \\ 1.5 & 2.5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.08 & 0.15 \\ 0.12 & 0.2 \\ 0.3 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.48 & 0.9 \\ 0.72 & 1.2 \\ 1.8 & 3 \end{bmatrix}$$

مهارات التفكير العليا

سؤال 3 : تبرير: أُحدِّد إذا كانت العبارة الآتية صحيحة أحيانًا، أو صحيحة دائمًا، أو غير صحيحة إطلاقًا، ثمَّ أُبرِّر إجابتي:

إذا كان عدد عناصر المصفوفة A مُساويًا لعدد عناصر المصفوفة B، فإنَّه يُمكِن إيجاد $A + B$.

الحـــــل:

العبارة غير صحيحة دائمًا.

التبرير: إيجاد $A + B$ لا يعتمد فقط على أن يكون عدد العناصر متساويًا، بل يجب أن تكون أبعاد المصفوفتين متطابقة (أي نفس عدد الصفوف ونفس عدد الأعمدة) . فقد يكون عدد العناصر متساويًا لكن ترتيب المصفوفة مختلف، مثلاً :

$$A: 6 \times 1 \quad , \quad B: 3 \times 2$$

عدد العناصر في كل منهما $= 6$ ، لكن لا يمكن جمعهما لأن الأبعاد مختلفة .

سؤال 4 : أكتشف الخطأ: ما الخطأ في الحلّ الآتي:

$$\begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 11 & 0 \\ 8 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

المصفوفتين من رتبتين مختلفتين ، لا يمكن جمعهما .

سؤال 5 : مسألة مفتوحة: أكتب المصفوفتين A , B ، بحيث يكون:

$$3A + 2B = \begin{bmatrix} 12 & 8 & 10 \\ 6 & -5 & 11 \end{bmatrix}$$

الحـــــل:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0.5 & 1 \end{bmatrix}$$

سؤال 6 : تحدٍّ: أجد المصفوفتين X , Y اللتين تُحقِّقان المعادلتين الآتيتين:

$$X - 2Y = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 9 \end{bmatrix}$$

$$3X + 4Y = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ -31 & 12 \end{bmatrix}$$

الحـــــل:

$$X - 2Y = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 9 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 9 \end{bmatrix} + 2Y$$

$$3\left(\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 9 \end{bmatrix} + 2Y\right) + 4Y = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ -31 & 12 \end{bmatrix}$$

$$3\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 9 \end{bmatrix} + 6Y + 4Y = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ -31 & 12 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 15 \\ -6 & 27 \end{bmatrix} + 10Y = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ -31 & 12 \end{bmatrix}$$

$$10Y = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ -31 & 12 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 15 \\ -6 & 27 \end{bmatrix}$$

$$10Y = \begin{bmatrix} 5 & -10 \\ -25 & -15 \end{bmatrix}$$

$$Y = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 5 & -10 \\ -25 & -15 \end{bmatrix}$$

$$Y = \begin{bmatrix} 0.5 & -1 \\ -2.5 & -1.5 \end{bmatrix}$$

الآن نجد المصفوفة X :

$$X - 2Y = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 9 \end{bmatrix}$$

$$X - 2\left(\begin{bmatrix} 0.5 & -1 \\ -2.5 & -1.5 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 9 \end{bmatrix}$$

$$X + \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 9 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -7 & 6 \end{bmatrix}$$

إذا كان: $A=\begin{bmatrix}2 & -2\\ 5 & 7\\ 3 & 6\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}9 & 5\\ -3 & 1\\ 8 & 6\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}-4 & 0 & 8\\ 1 & 5 & 4\end{bmatrix}, D=\begin{bmatrix}-9 & 30 & 36\\ 12 & 15 & -24\end{bmatrix}$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي (إنْ أمكن):

1. $A+B$
2. $B+C$
3. $C-D$
4. $B-A$
5. $4A$
6. $3A-2B$
7. $D+2C$
8. $-\frac{2}{3}D$
9. أكتب المصفوفة: $A=\begin{bmatrix}\frac{5}{3} & \frac{-1}{2}\\ \frac{1}{4} & \frac{7}{6}\end{bmatrix}$ في صورة: $A=kM$، حيث k عدد ثابت، وM مصفوفة عناصرها أعداد صحيحة.
10. إذا كانت: $\begin{bmatrix}3 & a\\ -2 & -8\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}b & 11\\ -4 & 12\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9 & 3b\\ c & d\end{bmatrix}$، فأجد قيمة كلٍّ من a، وb، وc، وd.

11 إذا كانت: $\begin{bmatrix} x & y \\ -y & x \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y & x \\ x & -y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -6 & 6 \end{bmatrix}$، فأجد قيمة كلٍّ من x، وy.

12 إذا كانت: $3\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} - 2B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$، فأجد المصفوفة B.

13 أجد قيمة كلٍّ من x، وy التي تُحقِّق المعادلة الآتية:

$$x[0 \quad 1 \quad 3] + y[0 \quad 0 \quad 5] = [0 \quad (3-y) \quad -7]$$

14 **صناعة:** يُبيِّن الجدول الأيسر عدد ما أنتجته 3 مصانع لإحدى الشركات من 3 طرازات لأجهزة التكييف المنزلي في النصف الأوَّل من عام 2020م، ويُبيِّن الجدول الأيمن عدد أجهزة التكييف المنزلي المُنتَجة في النصف الثاني من العام نفسه في هذه المصانع. أكتب مصفوفة تُمثِّل عدد ما أنتجه كل واحد من هذه المصانع الثلاثة من طرازات أجهزة التكييف المنزلي عام 2020م.

	الطراز A	الطراز B	الطراز C
المصنع 1	850	1200	670
المصنع 2	540	860	530
المصنع 3	620	750	490

	الطراز A	الطراز B	الطراز C
المصنع 1	700	1300	670
المصنع 2	650	1000	890
المصنع 3	480	900	540

الدرس الثالث : ضرب المصفوفات

Multiplying Matrices

1. شروط ضرب المصفوفات

يُمكِن ضرب مصفوفتين إذا وفقط إذا كان :

عدد أعمدة المصفوفة A = عدد صفوف المصفوفة B

رموز رياضية : يُمكِن استعمال أيٍّ من الرموز الآتية للدلالة على ضرب المصفوفة A في المصفوفة B :

$$A \times B \ , \ AB \ , \ A.B$$

$$\underset{m \times n}{A} \times \underset{n \times r}{B} = \underset{m \times r}{AB}$$

مُتساويان — رتبة AB

مثال 1 : إذا كانت $A_{2\times2}$ وكانت $B_{2\times2}$ وكانت $C_{3\times2}$ فأُبيِّن إذا كانت عملية الضرب في كلٍّ ممّا يأتي مُمكِنة أم لا. وإنْ كانت كذلك، أُحدِّد رتبة مصفوفة الضرب الناتجة :

(1) AB

الحـــــل:

$$\underset{2 \times 3}{A} \times \underset{2 \times 2}{B}$$

غير مُتساويين

بما أنَّ عدد أعمدة المصفوفة A لا يساوي عدد صفوف المصفوفة B ، فإنَّه لا يُمكِن إيجاد AB .

---

(2) AC

الحـــــل:

$$\underset{2 \times 3}{A} \times \underset{3 \times 2}{C} = \underset{2 \times 2}{A \times C}$$

مُتساويان — رتبة $A \times C$

بما أنَّ عدد أعمدة المصفوفة A يساوي عدد صفوف المصفوفة C ، فإنَّه يُمكِن إيجاد AC وتكون رتبتها : 2×2

مثال 2 : إذا كانت $A_{2\times2}$ وكانت $B_{3\times2}$ وكانت $C_{2\times3}$ وكانت $D_{3\times3}$ فأُبيِّن إذا كانت عملية الضرب في كلٍّ ممّا يأتي مُمكِنة أم لا. وإنْ كانت كذلك، أُحدِّد رتبة مصفوفة الضرب الناتجة :

(1) AB

$$\underset{2 \times 2}{A} \times \underset{3 \times 2}{B}$$

بما أنَّ عدد أعمدة المصفوفة A لا يساوي عدد صفوف المصفوفة B ، فإنَّه لا يُمكِن إيجاد AB .

---

(2) BC

$$\underset{3 \times 2}{B} \times \underset{2 \times 3}{C} = \underset{3 \times 3}{B \times C}$$

بما أنَّ عدد أعمدة المصفوفة B يساوي عدد صفوف المصفوفة C ، فإنَّه يُمكِن إيجاد BC وتكون رتبتها : 3×3

---

(3) DC

$$\underset{3 \times 3}{D} \times \underset{2 \times 3}{C}$$

بما أنَّ عدد أعمدة المصفوفة D لا يساوي عدد صفوف المصفوفة C ، فإنَّه لا يُمكِن إيجاد DC

---

(4) CD

$$\underset{2 \times 3}{C} \times \underset{3 \times 3}{D} = \underset{2 \times 3}{C \times D}$$

بما أنَّ عدد أعمدة المصفوفة C يساوي عدد صفوف المصفوفة D ، فإنَّه يُمكِن إيجاد CD وتكون رتبتها : 2×3

مثال 4 : اذا كان: $AB = C$ ،وكانت رتبة المصفوفة A هي: 4×3 ، ورتبة المصفوفة C هي: 4×5 ، فما رتبة المصفوفة B ؟

$$\underset{4 \times 3}{A} \times \underset{x \times y}{B} = \underset{4 \times 5}{C}$$

اذن رتبة المصفوفة B هي : 3×5

2. ضرب المصفوفات

مفهوم أساسي: ضرب المصفوفات

العنصر الواقع في الصف j والعمود k في المصفوفة $A \times B$ يساوي مجموع نواتج ضرب عناصر الصف j من المصفوفة A في العناصر المناظرة لها في العمود k من المصفوفة B.

بالرموز: إذا كان: $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix}$ ، فإنَّ:

$C=AB=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mp} \end{bmatrix}$ ، حيث: $c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}$

مثال 1: إذا كانت:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -5 & 4 \\ -3 & 4 & 7 \end{bmatrix} \quad , \quad B=\begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

فأجد AB

الحـــــل:

الخطوة 1: أَضرِب عناصر الصف الأوَّل من المصفوفة A في عناصر العمود الأوَّل من المصفوفة B بالترتيب، ثمَّ أجمع النواتج، ثمَّ أُدوِّن النتيجة في الصف الأوَّل والعمود الأوَّل من المصفوفة AB

$$\begin{bmatrix} 1 & -5 & 4 \\ -3 & 4 & 7 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\times 4+(-5)\times 0+4\times 2 & \\ & \end{bmatrix}$$

الخطوة 2: أَضرِب عناصر الصف الأوَّل من المصفوفة A في عناصر العمود الثاني من المصفوفة B بالترتيب، ثمَّ أجمع النواتج، ثمَّ أُدوِّن النتيجة في الصف الأوَّل والعمود الثاني من المصفوفة AB

$$\begin{bmatrix} 1 & -5 & 4 \\ -3 & 4 & 7 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 1\times(-5)+(-5)\times(-1)+4\times 0 \\ & \end{bmatrix}$$

الخطوة 3: أَضرِب عناصر الصف الثاني من المصفوفة A في عناصر العمود الأول من المصفوفة B بالترتيب، ثمَّ أجمع النواتج، ثمَّ أُدوِّن النتيجة في الصف الثاني والعمود الأول من المصفوفة AB

$$\begin{bmatrix} 1 & -5 & 4 \\ -3 & 4 & 7 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & \\ -3\times 4+4\times 0+7\times 2 & \end{bmatrix}$$

الخطوة 4: أَضرِب عناصر الصف الثاني من المصفوفة A في عناصر العمود الثاني من المصفوفة B بالترتيب، ثمَّ أجمع النواتج، ثمَّ أُدوِّن النتيجة في الصف الثاني والعمود الثاني من المصفوفة AB

$$\begin{bmatrix} 1 & -5 & 4 \\ -3 & 4 & 7 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 0 \\ 2 & -3\times(-5)+4\times(-1)+7\times 0 \end{bmatrix}$$

إذن، المصفوفة AB الناتجة هي:

$$\begin{bmatrix} 1 & -5 & 4 \\ -3 & 4 & 7 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 0 \\ 2 & 11 \end{bmatrix}$$

مثال 2

(1) إذا كانت: $M=\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ وكانت: $N=\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}$، فأجد MN

الحـــــل:

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 6 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\times 4+(-1)\times 6 & \\ & \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 6 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 3\times 0+(-1)\times(-3) \\ & \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 6 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & \\ 2\times 4+5\times 6 & \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 6 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 38 & 2\times 0+5\times(-3) \end{bmatrix}$$

إذن، المصفوفة MN الناتجة هي:

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 6 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 36 & -15 \end{bmatrix}$$

(2) إذا كانت: $C=\begin{bmatrix}1&0\\2&1\\3&2\end{bmatrix}$ وكانت: $D=\begin{bmatrix}2&1&3\\1&-1&0\end{bmatrix}$

فأجد CD

الحـــــل:

$$\begin{bmatrix}\mathbf{1}&0\\2&1\\3&2\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}\mathbf{2}&1&3\\\mathbf{1}&-1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{1\times2+0\times1}&&\\&&\\&&\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\mathbf{1}&0\\2&1\\3&2\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}2&\mathbf{1}&3\\1&\mathbf{-1}&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}&\mathbf{1\times1+0\times(-1)}&\\&&\\&&\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\mathbf{1}&0\\2&1\\3&2\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}2&1&\mathbf{3}\\1&-1&\mathbf{0}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}&&\mathbf{1\times3+0\times0}\\&&\\&&\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&0\\\mathbf{2}&\mathbf{1}\\3&2\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}\mathbf{2}&1&3\\\mathbf{1}&-1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}&&\\\mathbf{2\times2+1\times1}&&\\&&\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&0\\\mathbf{2}&\mathbf{1}\\3&2\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}2&\mathbf{1}&3\\1&\mathbf{-1}&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}&&\\&\mathbf{2\times1+1\times(-1)}&\\&&\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&0\\\mathbf{2}&\mathbf{1}\\3&2\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}2&1&\mathbf{3}\\1&-1&\mathbf{0}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}&&\\&&\mathbf{2\times3+1\times0}\\&&\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&0\\2&1\\\mathbf{3}&\mathbf{2}\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}\mathbf{2}&1&3\\\mathbf{1}&-1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}&&\\&&\\\mathbf{3\times2+2\times1}&&\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&0\\2&1\\\mathbf{3}&\mathbf{2}\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}2&\mathbf{1}&3\\1&\mathbf{-1}&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}&&\\&&\\&\mathbf{3\times1+2\times(-1)}&\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&0\\2&1\\\mathbf{3}&\mathbf{2}\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}2&1&\mathbf{3}\\1&-1&\mathbf{0}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}&&\\&&\\&&\mathbf{3\times3+2\times0}\end{bmatrix}$$

إذن، المصفوفة MN الناتجة هي:

$$\begin{bmatrix}1&0\\2&1\\3&2\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}2&1&3\\1&-1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&1&3\\5&1&6\\8&1&9\end{bmatrix}$$

مثال 3 : إذا كانت:

$$A=\begin{bmatrix}4&0\\2&1\end{bmatrix}\quad,\quad B=\begin{bmatrix}1&-3\\-2&2\\1&0\end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix}2&-1&1\\0.5&3&0\end{bmatrix}\quad,\quad D=\begin{bmatrix}2&-1.5&-1\\0.5&0&2\\1.5&-1&1\end{bmatrix}$$

فأُبيِّن إذا كانت عملية الضرب في كلٍّ ممّا يأتي مُمكِنة أم لا. وإنْ كانت كذلك، أُحدِّد رتبة مصفوفة الضرب الناتجة:

(1) AB

$$\underset{2\times2}{A}\times\underset{3\times2}{B}$$

بما أنَّ عدد أعمدة المصفوفة A لا يساوي عدد صفوف المصفوفة B، فإنَّه لا يُمكِن إيجاد AB

---

(2) BC

$$BC=\begin{bmatrix}1&-3\\-2&2\\1&0\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}2&-1&1\\0.5&3&0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1\times2+(-3)\times0.5&1\times(-1)+(-3)\times3&1\times1+(-3)\times0\\(-2)\times2+2\times0.5&(-2)\times(-1)+2\times3&(-2)\times1+2\times0\\1\times2+0\times0.5&1\times(-1)+0\times3&1\times1+0\times0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0.5&-10&1\\-3&8&-2\\2&-1&1\end{bmatrix}$$

---

(3) DC

$$\underset{3\times3}{D}\times\underset{2\times3}{C}$$

بما أنَّ عدد أعمدة المصفوفة D لا يساوي عدد صفوف المصفوفة C، فإنَّه لا يُمكِن إيجاد DC

---

(4) BA

$$BA=\begin{bmatrix}1&-3\\-2&2\\1&0\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}4&0\\2&1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1\times4+(-3)\times2&1\times0+(-3)\times1\\-2\times4+2\times2&-2\times0+2\times1\\1\times4+0\times2&1\times0+0\times1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-2&-3\\-4&2\\4&0\end{bmatrix}$$

---

(5) CD

الحـــــل:

$$CD=\begin{bmatrix}2&-1&1\\0.5&3&0\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}2&-1.5&-1\\0.5&0&2\\1.5&-1&1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}5&-4&-3\\2.5&-0.75&5.5\end{bmatrix}$$

(2) $\begin{bmatrix}3\\-4\\1\end{bmatrix}\times[2\quad 5\quad 3]=\begin{bmatrix}6&15&9\\-8&-20&-12\\1&5&3\end{bmatrix}$

---

(3) $\begin{bmatrix}3&-1&2\\4&2&0\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}0&3&2\\-2&1&5\\4&7&2\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}10&22&5\\-4&14&18\end{bmatrix}$

---

(4) $\begin{bmatrix}3&0\\0&2\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}5&0\\0&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}15&0\\0&8\end{bmatrix}$

---

(5) $[8\quad 10\quad -7]\times\begin{bmatrix}1\\-3\\-5\end{bmatrix}=[13]$

---

(6) $\begin{bmatrix}-2&-1\\9&-5\\3&-1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}-5&6&-4\\0&6&-3\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}10&-18&11\\-45&18&-21\\-15&12&-9\end{bmatrix}$

---

(7) $\begin{bmatrix}2\\5\end{bmatrix}\times[-1\quad 4]=\begin{bmatrix}-2&8\\-5&20\end{bmatrix}$

---

(8) $\begin{bmatrix}2&4\\0&3\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}8&-14\\-4&7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&0\\0&12\end{bmatrix}$

---

(9) $\left(\begin{bmatrix}3&-1\\2&5\end{bmatrix}\right)^2=\begin{bmatrix}3&-1\\2&5\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}3&-1\\2&5\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}7&-8\\16&23\end{bmatrix}$

---

(10) $\left(\begin{bmatrix}3&-1&2\\4&2&0\end{bmatrix}\right)^2$

$2\times 3\quad\times\quad 2\times 3$

بما أنَّ عدد أعمدة المصفوفة الاولى لا يساوي عدد صفوف المصفوفة الثانية ، فإنَّه لا يُمكِن إيجاد حاصل الضرب

(6) BB

الحـــــل:

$B\quad\times\quad B$

$3\times 2\qquad 3\times 2$

بما أنَّ عدد أعمدة المصفوفة B لا يساوي عدد صفوف المصفوفة B ، فإنَّه لا يُمكِن إيجاد BB

---

(7) $CB+A$

$CB=\begin{bmatrix}2&-1&1\\0.5&3&0\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1&-3\\-2&2\\1&0\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}6&-8\\-5.5&4.5\end{bmatrix}$

$CB+A=\begin{bmatrix}6&-8\\-5.5&4.5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}4&0\\2&1\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}10&-8\\-3.5&5.5\end{bmatrix}$

---

(8) $BCD=(BC)D$

$=\begin{bmatrix}0.5&-10&1\\-3&8&-2\\2&-1&1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}2&-1.5&-1\\0.5&0&2\\1.5&-1&1\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}-3&-1.75&-19.5\\-5&6.5&17\\5&-4&-2\end{bmatrix}$

مثال 4 : أجد ناتج كلٌّ ممّا يأتي (إنْ أمكن) :

(1) $\begin{bmatrix}3&-2\\2&4\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}2&3\\-1&5\\0&2\end{bmatrix}$

الحـــــل:

$2\times 2\quad\times\quad 3\times 2$

بما أنَّ عدد أعمدة المصفوفة الاولى لا يساوي عدد صفوف المصفوفة الثانية ، فإنَّه لا يُمكِن إيجاد حاصل الضرب

3. استعمال ضرب المصفوفات في مواقف حياتية مُتعدِّدة.

مثال 1 : شطرنج: تنافست ثلاث فِرَق في البطولة النهائية لنادي الشطرنج، وقد دُوِّن عدد مَرّات الفوز والتعادل لهذه الفِرَق في الجدول المجاور. إذا علمْتُ أنَّ فوز الفريق في المباراة الواحدة يعني حصوله على 3 نقاط لكل فوز، وأنَّ تعادله يعني حصوله على نقطة واحدة، فأستعمل المصفوفات في إيجاد عدد النقاط التي حصل عليها كل فريق لتحديد الفريق الفائز.

الفريق	ربح	تعادل
A	5	4
B	6	3
C	4	5

الحـــــل:

الخطوة 1 : أكتب مصفوفة لكلٍّ من النتائج والنقاط.

مصفوفة النقاط: $N = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ مصفوفة النتائج: $M = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

الخطوة 2 : أَضرِب مصفوفة النتائج في مصفوفة النقاط.

$$MN = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 \times 3 + 4 \times 1 \\ 6 \times 3 + 3 \times 1 \\ 4 \times 3 + 5 \times 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 \\ 21 \\ 17 \end{bmatrix}$$

إذن، تُمثِّل $\begin{bmatrix} 19 \\ 21 \\ 17 \end{bmatrix}$ مصفوفة النقاط التي حصل عليها كل فريق

تحديد الفريق الفائز:

- الفريق A : 19 نقطة
- الفريق B : 21 نقطة
- الفريق C : 17 نقطة

الفريق الفائز هو الفريق B بحصوله على أعلى عدد من النقاط (21 نقطة).

مثال 2 : كرة قدم: يُبيِّن الجدول المجاور نتائج 3 فِرَق لكرة القدم بعدما لعب كلٌّ منها 4 مباريات. إذا علمْتُ أنَّ فوز الفريق في المباراة الواحدة يعني حصوله على 3 نقاط لكل فوز، وأنَّ تعادله يعني حصوله على نقطة واحدة، وأنَّ خسارته تعني عدم حصوله على أيِّ نقاط، فأستعمل المصفوفات في إيجاد عدد النقاط التي حصل عليها كل فريق لتحديد الفريق الفائز.

الفريق	ربح	تعادل	خسارة
A	1	0	3
B	3	1	0
C	1	1	2

الحـــــل:

الخطوة 1 : أكتب مصفوفة لكلٍّ من النتائج والنقاط.

مصفوفة النقاط: $P = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ مصفوفة النتائج: $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

الخطوة 2 : أَضرِب مصفوفة النتائج في مصفوفة النقاط.

$$RP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \times 3 + 0 \times 1 + 3 \times 0 \\ 3 \times 3 + 1 \times 1 + 0 \times 1 \\ 1 \times 3 + 1 \times 1 + 2 \times 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 \\ 10 \\ 4 \end{bmatrix}$$

تحديد الفريق الفائز:

- الفريق A : 3 نقاط
- الفريق B : 10 نقاط
- الفريق C : 4 نقاط

الفريق الفائز هو الفريق B بحصوله على أعلى عدد من النقاط (10 نقاط).

مثال 4 : صناعة سيّارات: تتوزّع 3 مصانع لإحدى شركات صناعة السيّارات في 3 مدن، ويُبيِّن الجدول المجاور عدد ما يُنتِجه كل مصنع يوميًّا من 3 طرازات للسيّارات. إذا كان ربح الشركة في كل سيّارة من الطراز X هو 1000 JD ومن الطراز XD هو 2000 JD ،ومن الطراز R هو 1500 JD ، فأستعمل ضرب المصفوفات في إيجاد ربح كل مصنع يوميًّا من جميع طرازات السيّارات بافتراض أنَّ جميع السيّارات المُنتَجة مَبيعة.

	الطراز X	الطراز XD	الطراز R
المدينة A	12	10	0
المدينة B	4	4	20
المدينة C	8	9	12

الحـــــل:

الخطوة 1 : أكتب مصفوفة لكلٍّ من عدد السيارات يومياً و ربح السيارة الواحدة :

مصفوفة ربح السيارة الواحدة $P = \begin{bmatrix} 1000 \\ 2000 \\ 1500 \end{bmatrix}$ مصفوفة عدد السيارات $R = \begin{bmatrix} 12 & 10 & 0 \\ 4 & 4 & 20 \\ 8 & 9 & 12 \end{bmatrix}$

الخطوة 2 : أَضرِب مصفوفة عدد السيارات في مصفوفة ربح السيارة الواحدة .

$$RP = \begin{bmatrix} 12 & 10 & 0 \\ 4 & 4 & 20 \\ 8 & 9 & 12 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1000 \\ 2000 \\ 1500 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 12 \times 1000 + 10 \times 2000 + 0 \times 1500 \\ 4 \times 1000 + 4 \times 2000 + 20 \times 1500 \\ 8 \times 1000 + 9 \times 2000 + 12 \times 1500 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 32000 \\ 42000 \\ 44000 \end{bmatrix}$$

- مصنع A : يربح يومياً من بيع السيارات 32000 JD
- مصنع B : يربح يومياً من بيع السيارات 42000 JD
- مصنع C : يربح يومياً من بيع السيارات 44000 JD

مثال 5 : مُكسِّرات: يُعبِّئ مَحْمص خليطًا من المُكسِّرات والفواكه المُجفَّفة في نوعين من الأكياس كما في الجدول الأيسر، في حين يُبيِّن الجدول الأيمن عدد وحدات البروتين والكربوهيدرات والدهون في الغرام الواحد من المُكسِّرات والفواكه المُجفَّفة. أستعمل ضرب المصفوفات لإيجاد عدد وحدات البروتين والكربوهيدرات والدهون في كل نوع .

	بروتين	كربوهيدرات	دهون
مُكسِّرات	20	21	52
فواكه مُجفَّفة	3	65	1

	فواكه مُجفَّفة (g)	مُكسِّرات (g)
الكيس 1	150	150
الكيس 2	100	200

الحـــــل:

مثال 6 : أحُلُّ المسألة الواردة في بند (مسألة اليوم)

دوَّنت سلمى في الجدول المجاور عدد ما باعته في متجرها من أكواب حافظة للحرارة مُتعدِّدة الحجوم (كبيرة، مُتوسِّطة، صغيرة) في أحد الأيام. كذلك دوَّنت طريقة بيع هذه الأكواب؛ وهي إمّا مباشرة من المتجر، وأمّا عبر شبكة الإنترنت. إذا كان سعر الكوب الكبير JD 4. 5 وسعر الكوب المتوسط JD 4 وسعر الكوب الصغير JD 3. 5 ، فكيف يُمكِن استعمال ضرب المصفوفات لإيجاد المبلغ الذي كسبته سلمى من بيع الأكواب بكلتا طريقتي البيع .

حجم الكوب	كبير	مُتوسّط	صغير
عبر شبكة الإنترنت	5	4	2
من المتجر	3	5	9

الحـــــل:

4. بعض خصائص ضرب المصفوفات

مفهوم أساسي: خصائص ضرب المصفوفات

تُعَدُّ الخصائص الآتية صحيحة لأيِّ ثلاث مصفوفات : R , S , T وأيِّ عدد حقيقي c ، شرط أنْ تكون عمليتا الجمع والضرب مُعرَّفتين في جميع الحالات الآتية :

1. خاصية التجميع لضرب المصفوفات

$$(RS)T = R(ST)$$

2. خاصية التجميع لضرب المصفوفات في عدد حقيقي

$$c(RS) = (cR)S = R(cT)$$

3. خاصية توزيع ضرب المصفوفات على جمعها من اليسار

$$R(S + T) = RS + RT$$

4. خاصية توزيع ضرب المصفوفات على جمعها من اليمين

$$(R + S)T = RT + ST$$

مثال 1 : إذا كان:

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \ , \ Q = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \ , \ R = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

وكانت: $k = 3$ ، فأجد كلاً مما يأتي :

(1) $P(Q + R)$

$$P(Q + R) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \times \left(\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

---

(2) $k(PQ)$

$$k(PQ) = 3 \times \left(\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \right)$$

$$= 3 \times \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 18 & 24 \\ 6 & 6 \end{bmatrix}$$

مثال 2 : إذا كان :

$$F=\begin{bmatrix}4 & -2\\ 3 & 5\end{bmatrix}\ ,\ G=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 3\end{bmatrix}\ ,\ H=\begin{bmatrix}7 & 5\\ 4 & 2\end{bmatrix}$$

وكانت: $m=-4$ ، فأجد كلاً مما يأتي :

(1) $(F+G)H$

$$(F+G)H=\left(\begin{bmatrix}4 & -2\\ 3 & 5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 3\end{bmatrix}\right)\times\begin{bmatrix}7 & 5\\ 4 & 2\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}4 & -1\\ 4 & 8\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}7 & 5\\ 4 & 2\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}24 & 18\\ 60 & 36\end{bmatrix}$$

---

(2) $(FG)H$

$$(FG)H=\left(\begin{bmatrix}4 & -2\\ 3 & 5\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 3\end{bmatrix}\right)\times\begin{bmatrix}7 & 5\\ 4 & 2\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}-2 & -2\\ 5 & 18\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}7 & 5\\ 4 & 2\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}-18 & -14\\ 107 & 61\end{bmatrix}$$

---

(3) $G(mH)$

$$G(mH)=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 3\end{bmatrix}\times\left(-4\times\begin{bmatrix}7 & 5\\ 4 & 2\end{bmatrix}\right)$$
$$=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 3\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}-28 & -20\\ -16 & -8\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}-16 & -8\\ -76 & -44\end{bmatrix}$$

(3) $(PQ)R$

$$(PQ)R=\left(\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & -1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}3 & 4\\ 1 & 2\end{bmatrix}\right)\times\begin{bmatrix}0 & -2\\ 4 & 1\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}6 & 8\\ 2 & 2\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}0 & -2\\ 4 & 1\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}32 & -4\\ 8 & -2\end{bmatrix}$$

مثال 3 : إذا كانت:

$$P=\begin{bmatrix}12 & 4\\ 9 & 3\end{bmatrix}\ ,Q=\begin{bmatrix}3 & -1 & 2\\ 4 & 2 & 0\end{bmatrix}\ ,R=\begin{bmatrix}-2 & -1\\ 9 & -5\\ 3 & -1\end{bmatrix}$$

وكانت $n=-2$ ، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

(1) (QR)P

$$=\left(\begin{bmatrix}3 & -1 & 2\\ 4 & 2 & 0\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}-2 & -1\\ 9 & -5\\ 3 & -1\end{bmatrix}\right)\times\begin{bmatrix}12 & 4\\ 9 & 3\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}-5 & 0\\ 10 & -14\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}12 & 4\\ 9 & 3\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}-60 & -20\\ -6 & -2\end{bmatrix}$$

---

(2) n(PQ)

$$=-2\times\begin{bmatrix}12 & 4\\ 9 & 3\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}3 & -1 & 2\\ 4 & 2 & 0\end{bmatrix}$$
$$=-2\times\begin{bmatrix}52 & -4 & 24\\ 39 & -3 & 18\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}-104 & 8 & -48\\ -78 & 6 & -36\end{bmatrix}$$

---

(3) R(PQ)

$$=\begin{bmatrix}-2 & -1\\ 9 & -5\\ 3 & -1\end{bmatrix}\times\left(\begin{bmatrix}12 & 4\\ 9 & 3\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}3 & -1 & 2\\ 4 & 2 & 0\end{bmatrix}\right)$$
$$=\begin{bmatrix}-2 & -1\\ 9 & -5\\ 3 & -1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}52 & -4 & 24\\ 39 & -3 & 18\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}-143 & 11 & -66\\ 273 & -21 & 126\\ 117 & -9 & 54\end{bmatrix}$$

---

(4) (nR)P

$$=\left(-2\times\begin{bmatrix}-2 & -1\\ 9 & -5\\ 3 & -1\end{bmatrix}\right)\times\begin{bmatrix}12 & 4\\ 9 & 3\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}4 & 2\\ -18 & 10\\ -6 & 2\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}12 & 4\\ 9 & 3\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}66 & 22\\ -126 & -42\\ -54 & -18\end{bmatrix}$$

مثال 4 : إذا كانت:

$$A=\begin{bmatrix}12 & 4\\ 9 & 3\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}4 & 6\\ 0 & 1\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}5 & 8\\ -3 & -5\end{bmatrix}$$

فأبين أن : $AB = AC$.

$$AB=\begin{bmatrix}12 & 4\\ 9 & 3\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}4 & 6\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}48 & 76\\ 36 & 57\end{bmatrix}$$

$$AC=\begin{bmatrix}12 & 4\\ 9 & 3\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}5 & 8\\ -3 & -5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}48 & 76\\ 36 & 57\end{bmatrix}$$

مثال 3 : إذا كانت : $A=\begin{bmatrix}2 & 0\\ x & 3\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ y & 4\end{bmatrix}$ ،

حيث x, y عددان صحيحان موجبان، فأجد:

(1) AB بدلالة x, y .

الحـــــل:

$$AB=\begin{bmatrix}2 & 0\\ x & 3\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}-2 & 0\\ y & 4\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}-4+y & 0\\ -2x+3y & 12\end{bmatrix}$$

---

(2) BA بدلالة x, y .

الحـــــل:

$$BA=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ y & 4\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}2 & 0\\ x & 3\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}-4 & 0\\ 2y+4x & 12\end{bmatrix}$$

---

(3) أصغر قيمة لكل من x, y ، التي تجعل $AB = BA$.

الحـــــل:

$$\begin{bmatrix}-4+y & 0\\ -2x+3y & 12\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4 & 0\\ 2y+4x & 12\end{bmatrix}$$

$$-4+y=-4 \quad \rightarrow \quad y=0$$

$$-2x+3y=2y+4x \quad \rightarrow \quad -6x+y=0$$
$$\rightarrow \quad -6x+0=0$$
$$\rightarrow \quad -6x=0$$
$$\rightarrow \quad x=0$$

مهارات التفكير العليا

سؤال 1 : أكتشف الخطأ: حَسَبت كلٌّ من رنا وعبير العنصر c_{23} في المصفوفة:

$$C = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 12 \\ -2 & 3 & 4 \\ 6 & 9 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 8 & 4 \\ 1 & -2 & -6 \\ 11 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

كما يأتي:

إجابة عبير

$c_{23} = 12 - 8 - 18$

$= -14$

إجابة رنا

$c_{23} = -8 - 18 + 20$

$= -6$

أيُّهما إجابتها صحيحة؟ أُبرِّر إجابتي.

الحـــــل:

$$\begin{aligned} c_{23} &= -2(4) + 3(-6) + 4(5) \\ &= -8 - 18 + 20 \\ &= -6 \end{aligned}$$

إجابة رنا هي الصحيحة .

سؤال 2 : تبرير: إذا كانت A, B مصفوفتين مُربَّعتين من الرتبة n فلماذا : $(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$

الحـــــل:

لان عملية الجمع هي عملية تبديلية ، واذا لاحظنا التالي :

$(A+B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$

$(B+A)^2 \neq B^2 + 2BA + A^2$

لاكن نعرف ان : $(A+B)^2 = (B+A)^2$

لاكن هنا : $AB \neq BA$

سؤال 3 : مسألة مفتوحة: اكتب المصفوفتين A, B ، بحيث يكون : $AB = BA$

الحـــــل:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 15 \end{bmatrix} \quad , \quad BA = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 15 \end{bmatrix}$$

سؤال 4 : تحدٍّ: أجد قيمة كلٍّ من e, f, g, h التي تجعل المعادلة الآتية صحيحة:

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 12 \\ 6 & 15 \end{bmatrix}$$

الحـــــل:

$$\begin{bmatrix} 3e+4g & 3f+4h \\ -e+5g & -f+5h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 12 \\ 6 & 15 \end{bmatrix}$$

$3e + 4g = 1$
$-3e + 15g = 18$

$19g = 19$
$g = 1$

$g = 1 : 3e + 4 = 1$
$3e = -3$
$e = -1$

$3f + 4h = 12$
$-3f + 15h = 45$

$19h = 57$
$h = 3$

$h = 3 :$
$3f + 12 = 12$
$3f = 0$
$f = 0$

إذا كانت $A_{5\times3}$، وكانت $B_{2\times3}$، وكانت $C_{3\times5}$، فأُحدِّد عمليات الضرب المُمكِنة ممّا يأتي، ثمَّ أجد رتبة المصفوفة الناتجة:

1) AB 2) AC 3) CA 4) BC 5) CB

إذا كان: $A=\begin{bmatrix}3 & -2\\ 1 & 4\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}5 & 3 & -2\\ -4 & 1 & 7\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}2 & 2\\ -4 & 3\\ 1 & 5\end{bmatrix}, D=\begin{bmatrix}-3\\ 0\\ -1\end{bmatrix}$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي (إنْ أمكن):

6) AB 7) BA 8) BC

9) CB 10) BD 11) $2A+3BC$

12) A^2 13) A^3 14) $(CB)^2$

15) إذا كانت: $\begin{bmatrix}1 & 3\\ x & 2\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}y & -1\\ 3 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7 & -7\\ 8 & -3\end{bmatrix}$، فأجد قيمة كلٍّ من x، وy.

16) أجد ناتج: $\begin{bmatrix}3 & 2 & -4\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}5 & 4\\ 1 & 2\\ 3 & 0\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}6 & 2\\ -3 & 5\end{bmatrix}$.

17) إذا كان: $B=\begin{bmatrix}1 & 0\\ \sqrt{3} & -1\end{bmatrix}$، فأجد B^3.

18) إذا كان: $A=\begin{bmatrix}6\\ 18\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}3 & 4\\ 2 & -1\end{bmatrix}$، فأجد المصفوفة C، بحيث يكون $A+C=BC$.

مبيعات: يُبيِّن الجدول الأيمن قيمة مبيعات أحذية الرجال والنساء والأطفال (بالدنانير) لثلاثة مندوبي مبيعات، ويُبيِّن الجدول الأيسر نسب العمولة القديمة والجديدة للمبيعات. أُجيب عن السؤالين التاليين اعتمادًا على المعلومات الواردة في هذين الجدولين:

	أحذية الرجال	أحذية النساء	أحذية الأطفال
المندوب 1	1200	2300	900
المندوب 2	3100	2800	1100
المندوب 3	3700	2600	800

	النسبة القديمة	النسبة الجديدة
أحذية الرجال	9%	9.5%
أحذية النساء	9%	10%
أحذية الأطفال	13%	12%

19 أجد المصفوفة التي تُمثِّل ما يجنيه كلٌّ من المندوبين الثلاثة وَفق النسبة الجديدة والنسبة القديمة.

20 أُحدِّد المندوب الأكثر استفادة من تغيير نسب العمولة، ثمَّ أُبرِّر إجابتي.

أُحدِّد إذا كانت كل عبارة ممّا يأتي صحيحة أحيانًا، أو صحيحة دائمًا، أو غير صحيحة أبدًا، ثمَّ أُبرِّر إجابتي:

21 إذا أمكن إيجاد AB وBA، فإنَّ المصفوفة A والمصفوفة B مُربَّعتان.

22 إذا كان AB مصفوفة صفرية، فإنَّ A مصفوفة صفرية، أو B مصفوفة صفرية.

الدرس الرابع : المُحدِّدات وقاعدة كريمر

Determinants and Cramer's Rule

1. المحددات

المُحددة للمصفوفة المربعة A : هي عدد حقيقي يرتبط بالمصفوفة ، ويرمز اليه $|A|$.

القُطْر الرئيس : هو مجموعة العناصر المُمتدَّة من الزاوية اليسرى العلوية إلى الزاوية اليمنى السفلية في المصفوفة .

مثال على القطر الرئيس :

$$\begin{bmatrix} 1 & 7 & -8 \\ 9 & 8 & 10 \\ -4 & -6 & 7 \end{bmatrix}$$

القُطْر الرئيس

- للقُطْر الرئيس دور أساسي في إيجاد مُحدِّدة أيِّ مصفوفة، لكنَّ طريقة إيجاد المُحدِّدة تختلف تبعًا لاختلاف رتبتها .

مفهوم أساسي : محددة الدرجة الثانية .

بالكلمات : يرمز الى محددة المصفوفة: $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ بالرمز $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ ، وتساوي قيمتها ناتج ضرب عنصري القطر الرئيس مطروحاً منه ناتج ضرب عنصري القطر الآخر.

بالرموز : $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

مثال 1 : أجد قيمة كل من المحددات الآتية:

(1) $\begin{vmatrix} 8 & 6 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 8 \times 5 - 2 \times 6 = 28$

---

(2) $\begin{vmatrix} -2 & 7 \\ -1 & 8 \end{vmatrix} = -2 \times 8 - (-1) \times 7 = -9$

---

(3) $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} = -1 \times 6 - (-2) \times 3 = 0$

---

(4) $\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 0 \times 4 - (-3) \times 1 = 3$

(5) $\begin{vmatrix} 5 & 20 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 5 \times 8 - 20 \times 2 = 0$

---

(6) $\begin{vmatrix} 9 & 5 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 9 \times (-2) - 5 \times 3 = -33$

---

(7) $\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \times 3 - (-5) \times 1 = 11$

---

(8) $\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = 0 \times 1 - 5 \times (-4) = 20$

---

(9) $\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 3 \times 4 - 6 \times 2 = 0$

---

(10) $\begin{vmatrix} -5 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = (-5) \times 4 - 1 \times 3 = -23$

2. محددة مصفوفة ذات الرتبة 3×3 .

مفهوم أساسي: محددة الدرجة الثالثة .

يمكن ايجاد محددة المصفوفة: $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$

باستعمال الطريقتين الآتيتين :

الطريقة 1 : باستعمال قاعدة الأقطار .

الخطوة 1 : أعيد كتابة العمود الأول والعمود الثاني على يمين المحددة .

الخطوة 2 : أجد ناتج ضرب عناصر القُطر الرئيس، وثلاثيات العناصر على المُوازِيات الحمراء المُبيَّنة، ثمَّ أجد مجموعها الكلي .

$$\begin{vmatrix} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{vmatrix}$$

الخطوة 3 : أجد ناتج ضرب عناصر القُطر الآخر، وثلاثيات العناصر على المُوازِيات الزرقاء المُبيَّنة، ثمَّ أجد مجموعها الكلي.

$$\begin{vmatrix} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{vmatrix}$$

الخطوة 4 : أجد قيمة المُحدِّدة بطرح ناتج الخطوة 3 من ناتج الخطوة 2 .

الطريقة 2 : باستعمال محددة المصفوفة 2×2 :

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$
$$= a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$$
$$= a(ei - fh) - b(di - fg) + c(dh - eg)$$

مثال 1 : أجد قيمة كل مُحدِّدة ممّا يأتي باستعمال قاعدة الأقطار، ثمَّ باستعمال مُحدِّدة المصفوفة 2×2 :

(1) $\begin{vmatrix} -4 & 3 & 6 \\ 6 & 5 & 1 \\ 1 & 6 & 3 \end{vmatrix}$

الحـــــل:

الطريقة 1 : باستعمال قاعدة الأقطار .

الخطوة 1 : أعيد كتابة العمود الأول والعمود الثاني على يمين المحددة .

$$\begin{vmatrix} -4 & 3 & 6 & -4 & 3 \\ 6 & 5 & 1 & 6 & 5 \\ 1 & 6 & 3 & 1 & 6 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} -4 & 3 & 6 & -4 & 3 \\ 6 & 5 & 1 & 6 & 5 \\ 1 & 6 & 3 & 1 & 6 \end{vmatrix}$$

الخطوة 2 : أجد ناتج ضرب عناصر الأقطار ومُوازِياتها .

$6 \times 5 \times 1 = 30$	$-4 \times 5 \times 3 = -60$
$-4 \times 1 \times 6 = -24$	$3 \times 1 \times 1 = 3$
$3 \times 6 \times 3 = 54$	$6 \times 6 \times 6 = 216$

الخطوة 3 : أجد مجموع نواتج الضرب في كل مجموعة

$$-60 + 3 + 216 = 159$$
$$30 + (-24) + 54 = 60$$

الخطوة 4 : أجد قيمة المُحدِّدة بطرح المجموع الثاني من المجموع الأوَّل .

$$159 - 60 = 99$$

إذن، قيمة هذه المُحدِّدة هي 99

الطريقة 2 : باستعمال قاعدة الأقطار.

$$\begin{vmatrix} -4 & 3 & 6 \\ 6 & 5 & 1 \\ 1 & 6 & 3 \end{vmatrix}$$
$$= (-4)\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 6\begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 1 & 6 \end{vmatrix}$$
$$= -4(15 - 6) - 3(18 - 1) + 6(36 - 5)$$
$$= 99$$

اذن ،قيمة هذه المحددة هي : 99

(2) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 9 \\ -2 & 3 & 4 \\ -5 & 7 & 2 \end{vmatrix}$

الحـــــل:

الطريقة 1 : باستعمال قاعدة الأقطار.

الخطوة 1 : أعيد كتابة العمود الأول والعمود الثاني على يمين المحددة.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 9 \\ -2 & 3 & 4 \\ -5 & 7 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 3 \\ -2 & 3 \\ -5 & 7 \end{matrix}$$

الخطوة 2 : أجد ناتج ضرب عناصر الأقطار ومُوازِياتها.

$1 \times 3 \times 2 = 6$	$9 \times 3 \times -5 = -135$
$3 \times 4 \times -5 = -60$	$1 \times 4 \times 7 = 28$
$9 \times -2 \times 7 = -126$	$3 \times -2 \times 2 = -12$

الخطوة 3 : أجد مجموع نواتج الضرب في كل مجموعة

$$6 + (-60) + (-126) = -180$$

$$-135 + 28 + (-12) = -119$$

الخطوة 4 : أجد قيمة المُحدِّدة بطرح المجموع الثاني من المجموع الأوّل.

$$-180 - (-119) = -61$$

الطريقة 2 : باستعمال قاعدة الأقطار.

$$= 1\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} + 9\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -5 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= 1(6 - 28) - 3(-4 - (-20)) + 9(-14 - (-15))$$

$$= -61$$

(3) $\begin{vmatrix} 0 & -5 & -1 \\ 4 & 1 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$

الحـــــل:

الطريقة 1 : باستعمال قاعدة الأقطار.

الخطوة 1 : أعيد كتابة العمود الأول والعمود الثاني على يمين المحددة.

$$\begin{vmatrix} 0 & -5 & -1 \\ 4 & 1 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \begin{matrix} 0 & -5 \\ 4 & 1 \\ 7 & 8 \end{matrix}$$

الخطوة 2 : أجد ناتج ضرب عناصر الأقطار ومُوازِياتها.

$0 \times 1 \times 9 = 0$	$-1 \times 1 \times 7 = -7$
$-5 \times 6 \times 7 = -210$	$0 \times 6 \times 8 = 0$
$-1 \times 4 \times 8 = -32$	$-5 \times 4 \times 9 = -180$

الخطوة 3 : أجد مجموع نواتج الضرب في كل مجموعة

$$0 + (-210) + (-32) = -242$$

$$-7 + 0 + (-180) = -187$$

الخطوة 4 : أجد قيمة المُحدِّدة بطرح المجموع الثاني من المجموع الأوّل.

$$-242 - (-187) = -55$$

الطريقة 2 : باستعمال قاعدة الأقطار.

$$= 0\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - (-5)\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$$

$$= 0(9 - 48) + 5(36 - 42) - 1(32 - 7)$$

$$= -55$$

(4) $\begin{vmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 5 & 8 & -2 \\ 4 & 7 & 3 \end{vmatrix}$

الحـــــل:

الطريقة 1 : باستعمال قاعدة الأقطار .

الخطوة 1 : أعيد كتابة العمود الأول والعمود الثاني على يمين المحددة .

$$\begin{vmatrix} 0 & -3 & 1 & 0 & -3 \\ 5 & 8 & -2 & 5 & 8 \\ 4 & 7 & 3 & 4 & 7 \end{vmatrix}$$

الخطوة 2 : أجد ناتج ضرب عناصر الأقطار ومُوازِياتها .

$1 \times 8 \times 4 = 32$	$0 \times 8 \times 3 = 0$
$0 \times -2 \times 7 = 0$	$-3 \times -2 \times 4 = 24$
$-3 \times 5 \times 3 = -45$	$1 \times 5 \times 7 = 35$

الخطوة 3 : أجد مجموع نواتج الضرب في كل مجموعة

$$0 + 24 + 35 = 59$$

$$32 + 0 + (-45) = -13$$

الخطوة 4 : أجد قيمة المُحدِّدة بطرح المجموع الثاني من المجموع الأوَّل .

$$59 - (-13) = 72$$

الطريقة 2 : باستعمال قاعدة الأقطار .

$$= 0\begin{vmatrix} 8 & -2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} - (-3)\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 4 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= 3(5 \times 3 - (-2) \times 4) + 1(5 \times 7 - 8 \times 4)$$

$$= 3(15 + 8) + (35 - 32)$$

$$= 3(23) + 3$$

$$= 72$$

(5) $\begin{vmatrix} -4 & 3 & 2 \\ 6 & 5 & 1 \\ -4 & 3 & 2 \end{vmatrix}$

الحـــــل:

الطريقة 1 : باستعمال قاعدة الأقطار .

الخطوة 1 : أعيد كتابة العمود الأول والعمود الثاني على يمين المحددة .

$$\begin{vmatrix} -4 & 3 & 2 & -4 & 3 \\ 6 & 5 & 1 & 6 & 5 \\ -4 & 3 & 2 & -4 & 3 \end{vmatrix}$$

الخطوة 2 : أجد ناتج ضرب عناصر الأقطار ومُوازِياتها .

$2 \times 5 \times -4 = -40$	$-4 \times 5 \times 2 = -40$
$-4 \times 1 \times 3 = -12$	$3 \times 1 \times -4 = -12$
$3 \times 6 \times 2 = 36$	$2 \times 6 \times 3 = 36$

الخطوة 3 : أجد مجموع نواتج الضرب في كل مجموعة

$$-40 + (-12) + 36 = -16$$

$$-40 + (-12) + 36 = -16$$

الخطوة 4 : أجد قيمة المُحدِّدة بطرح المجموع الثاني من المجموع الأوَّل .

$$-16 - (-16) = 0$$

الطريقة 2 : باستعمال قاعدة الأقطار .

$$= (-4)\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 6 & 5 \\ -4 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= -4(10 - 3) - 3(6 \times 2 - 1 \times (-4)) + 2(6 \times 3 - 5 \times (-4))$$

$$= -28 - 48 + 76$$

$$= 0$$

(6) $\begin{vmatrix} -6 & -1 & -2 \\ 2 & 5 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

الحـــــل:

الطريقة 1 : باستعمال قاعدة الأقطار .

الخطوة 1 : أعيد كتابة العمود الأول والعمود الثاني على يمين المحددة .

$$\begin{vmatrix} -6 & -1 & -2 \\ 2 & 5 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} -6 & -1 \\ 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{matrix}$$

الخطوة 2 : أجد ناتج ضرب عناصر الأقطار ومُوازِياتها .

$-2 \times 5 \times 4 = -40$	$-6 \times 5 \times 2 = -30$
$-6 \times 0 \times 3 = 0$	$-1 \times 0 \times 4 = 0$
$-1 \times 2 \times 1 = -2$	$-2 \times 2 \times 3 = -12$

الخطوة 3 : أجد مجموع نواتج الضرب في كل مجموعة

$$-40 + 0 + (-2) = -42$$

$$-30 + 0 + (-12) = -42$$

الخطوة 4 : أجد قيمة المُحدِّدة بطرح المجموع الثاني من المجموع الأوَّل .

$$-42 - (-42) = 0$$

الطريقة 2 : باستعمال قاعدة الأقطار .

$$= (-6)\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + (-2)\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= -30 + 2 + 28$$

$$= 0$$

(7) $\begin{vmatrix} 6 & 0 & 4 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

الحـــــل:

الطريقة 1 : باستعمال قاعدة الأقطار .

الخطوة 1 : أعيد كتابة العمود الأول والعمود الثاني على يمين المحددة .

$$\begin{vmatrix} 6 & 0 & 4 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 6 & 0 \\ 0 & -3 \\ 1 & 0 \end{matrix}$$

الخطوة 2 : أجد ناتج ضرب عناصر الأقطار ومُوازِياتها .

$4 \times -3 \times 1 = -12$	$6 \times -3 \times 2 = -36$
$6 \times 0 \times 0 = 0$	$0 \times 0 \times 1 = 0$
$0 \times 0 \times 2 = 0$	$4 \times 0 \times 0 = 0$

الخطوة 3 : أجد مجموع نواتج الضرب في كل مجموعة

$$0 + 0 + 0 = 0$$

$$-12 + 0 + 0 = -12$$

الخطوة 4 : أجد قيمة المُحدِّدة بطرح المجموع الثاني من المجموع الأوَّل .

$$-36 - (-12) = -24$$

الطريقة 2 : باستعمال قاعدة الأقطار .

$$= 6\begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 6(-6) - 0 + 4(0 - -3)$$

$$= -36 + 12$$

$$= -24$$

3. حساب مساحة المُثلَّث باستعمال المُحدِّدات .

يُمكِن حساب مساحة مُثلَّث عُلِمت إحداثيات رؤوسه في المستوى الإحداثي باستعمال القاعدة الآتية.

مفهوم أساسي: مساحة مُثلَّث مرسوم في المستوى الإحداثي باستعمال المُحدِّدات .

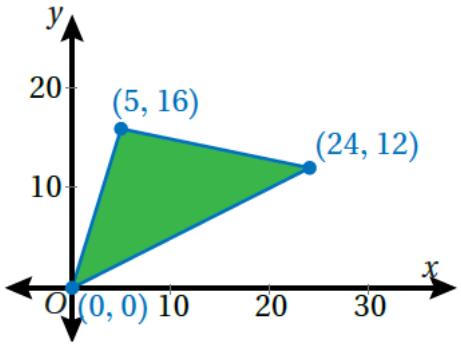
مساحة المثلث الذي احداثيات رؤوسه:

$X(x_1, y_1)\ , Y(x_2, y_2)\ , Z(x_3, y_3)$

هي نصف القيمة المطلقة للعدد A ، حيث :

$$A = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

مثال 1 : خرائط: يظهر في المستوى الإحداثي المجاور مُخطَّط لجزيرة على شكل مُثلَّث . إذا كانت كل وحدة في المستوى الإحداثي تُمثِّل 1 km ، فأجد مساحة الجزيرة .



الحـــــل:

الخطوة 1: أجد قيمة المقدار A .

$$A = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 5 & 16 & 1 \\ 24 & 12 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 0\begin{vmatrix} 16 & 1 \\ 12 & 1 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 24 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 5 & 16 \\ 24 & 12 \end{vmatrix}$$

$$= 0(16 - 12) - 0(5 - 25) + 1(60 - 384)$$

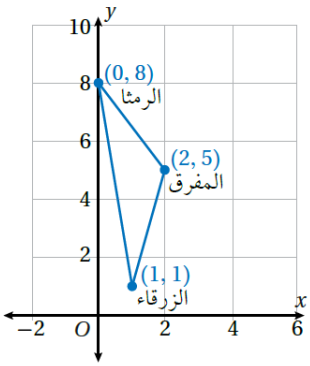
$$= -324$$

الخطوة 2: أجد مساحة المثلث (الجزيرة) .

$$Area = \frac{1}{2}|A| = \frac{1}{2}|-324| = 162$$

اذن مساحة الجزيرة هي: $162\ km^2$

مثال 2 : خرائط : يظهر في المستوى الاحداثي المجاور احداثيات كل من محافظة الزرقاء ومحافظة الرمثا، ومحافظة المفرق. إذا كانت كل وحدة في المستوى الإحداثي تمثل 10 km ، فأجد مساحة المنطقة التي رؤوسها هذه المحافظات الثلاث.



$$A = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 80 & 1 \\ 20 & 50 & 1 \\ 10 & 10 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 0\begin{vmatrix} 50 & 1 \\ 10 & 1 \end{vmatrix} - 80\begin{vmatrix} 20 & 1 \\ 10 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 20 & 50 \\ 10 & 10 \end{vmatrix}$$

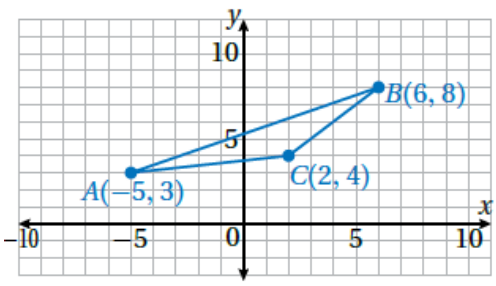
$$= 0(50 - 10) - 90(20 - 10) + 1(200 - 500)$$

$$= -1200$$

$$Area = \frac{1}{2}|A| = \frac{1}{2}|-1200| = 600$$

اذن مساحة المثلث هي: $600\ km^2$

مثال 3 : أجد مساحة المُثلَّث المرسوم في المستوى الإحداثي أدناه .



$$A=\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}5 & 8 & 1\\ 2 & 4 & 1\\ -5 & 3 & 1\end{vmatrix}$$

$$=5\begin{vmatrix}4 & 1\\ 3 & 1\end{vmatrix}-8\begin{vmatrix}2 & 1\\ -5 & 1\end{vmatrix}+1\begin{vmatrix}2 & 4\\ -5 & 3\end{vmatrix}$$

$$=5(4-3)-8(2+5)+1(6+20)$$

$$=-25$$

$$Area=\frac{1}{2}|A|=\frac{1}{2}|-25|=12.5$$

اذن مساحة المثلث هي: $12.5\ km^2$

مثال 4 : خرائط: يقع منزل خولة عند النقطة $B(3,5)$ على خريطة إحداثية للمدينة، ويقع منزل فدوى عند النقطة $C(7,0)$، ويقع منزل نُهى عند النقطة $D(5,9)$. أجد مساحة المُثلَّث BCD ، علمًا بأنَّ الوحدة الواحدة على الخريطة تُمثِّل 20 m على الأرض.

$$A=\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3 & 5 & 1\\ 7 & 0 & 1\\ 5 & 9 & 1\end{vmatrix}$$

$$=3\begin{vmatrix}0 & 1\\ 9 & 1\end{vmatrix}-5\begin{vmatrix}7 & 1\\ 5 & 1\end{vmatrix}+1\begin{vmatrix}7 & 0\\ 5 & 9\end{vmatrix}$$

$$=3(0-9)-5(7+5)+1(63+0)$$

$$=-24$$

$$Area=\frac{1}{2}|A|=\frac{1}{2}|-24|=12$$

4. حلُّ أنظمة المعادلات والمُحدِّدات .

يُمكِن استعمال المُحدِّدات لحلِّ أنظمة معادلات خطِّية بمُتغيِّرين، كلٌّ منها مكتوب في صورة: $ax+by=c$

1. أُنشِئ أوَّلًا مصفوفة عناصرها معاملات المُتغيِّرين x و y وهي تسمى مصفوفة المعاملات
2. أحسُب مُحدِّدتها .

(أ) حل وحيد للنظام (إذا كانت المحددة لا تساوي صفرًا)

(ب) لا يوجد حل للنظام أو عدد لا نهائي من الحلول (إذا كانت المُحدِّدة تساوي صفرًا)

وفي حال لم تكن قيمة مُحدِّدة مصفوفة المعاملات صفرًا، فيُمكِن استعمال قاعدة كريمر لإيجاد حلِّ النظام كما هو مُبيَّن في صندوق المفهوم الأساسي التالي.

مفهوم أساسي: قاعدة كريمر

اذا كانت: $C=\begin{bmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{bmatrix}$ مصفوفة المعاملات للنظام :

$$a_1x+b_1y=c_1$$
$$a_2x+b_2y=c_2$$

وكانت: $D=\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}$، حيث $D\neq 0$، فإن حل النظام هو :

$$x=\frac{\begin{vmatrix}c_1 & b_1\\ c_2 & b_2\end{vmatrix}}{D}\quad,\quad y=\frac{\begin{vmatrix}a_1 & c_1\\ a_2 & c_2\end{vmatrix}}{D}$$

مثال 1 : أحُلُّ كل نظام معادلات ممّا يأتي باستعمال قاعدة كريمر (إنْ أمكن) .

$$(1)\quad \begin{aligned}3x+5y&=1\\ 2x+y&=-4\end{aligned}$$

الحـــــل:

الخطوة 1: أجد محددة مصفوفة المعادلات.

$$C=\begin{bmatrix}3 & 5\\ 2 & 1\end{bmatrix}$$

$$D=|C|=\begin{vmatrix}3 & 5\\ 2 & 1\end{vmatrix}=3(1)-2(5)=-7$$

بما أن $D\neq 0$، فإنه يوجد حل وحيد لهذا النظام.

الخطوة 2: أجد حل النظام باستعمال قاعدة كريمر.

$$x=\frac{\begin{vmatrix}c_1 & b_1\\ c_2 & b_2\end{vmatrix}}{D} \qquad y=\frac{\begin{vmatrix}a_1 & c_1\\ a_2 & c_2\end{vmatrix}}{D}$$

$$=\frac{\begin{vmatrix}1 & 5\\ -4 & 1\end{vmatrix}}{-7} \qquad =\frac{\begin{vmatrix}3 & 1\\ 2 & -4\end{vmatrix}}{-7}$$

$$=\frac{1(1)-(-4)(5)}{-7} \qquad =\frac{3(-4)-2(1)}{-7}$$

$$=\frac{21}{-7}=-3 \qquad =\frac{-14}{-7}=2$$

اذن حل النظام هو: $(-3,2)$

---

(2) $-2x+7y=12$

$x+y=3$

$$C=\begin{bmatrix}-2 & 7\\ 1 & 1\end{bmatrix}$$

$$D=|C|=\begin{vmatrix}-2 & 7\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-2(1)-7(1)=-9$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix}c_1 & b_1\\ c_2 & b_2\end{vmatrix}}{D} \qquad y=\frac{\begin{vmatrix}a_1 & c_1\\ a_2 & c_2\end{vmatrix}}{D}$$

$$=\frac{\begin{vmatrix}12 & 7\\ 3 & 1\end{vmatrix}}{-9} \qquad =\frac{\begin{vmatrix}-2 & 12\\ 1 & 3\end{vmatrix}}{-9}$$

$$=1 \qquad =2$$

---

(3) $4x-3y=29$

$2y+5x=-5$

$$C=\begin{bmatrix}4 & -3\\ 5 & 2\end{bmatrix}$$

$$D=|C|=\begin{vmatrix}4 & -3\\ 5 & 2\end{vmatrix}=4(2)-(-3)(5)=-7$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix}c_1 & b_1\\ c_2 & b_2\end{vmatrix}}{D} \qquad y=\frac{\begin{vmatrix}a_1 & c_1\\ a_2 & c_2\end{vmatrix}}{D}$$

$$=\frac{\begin{vmatrix}29 & -3\\ -5 & 2\end{vmatrix}}{-7} \qquad =\frac{\begin{vmatrix}4 & 29\\ 5 & -5\end{vmatrix}}{-7}$$

$$=\frac{43}{-7} \qquad =\frac{165}{7}$$

(4) $x+5y=-17$

$3x-4y=6$

$$C=\begin{bmatrix}1 & 5\\ 3 & -4\end{bmatrix}$$

$$D=|C|=\begin{vmatrix}1 & 5\\ 3 & -4\end{vmatrix}=1(-4)-5(3)=-19$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix}c_1 & b_1\\ c_2 & b_2\end{vmatrix}}{D} \qquad y=\frac{\begin{vmatrix}a_1 & c_1\\ a_2 & c_2\end{vmatrix}}{D}$$

$$=\frac{\begin{vmatrix}-17 & 5\\ 6 & -4\end{vmatrix}}{-19} \qquad =\frac{\begin{vmatrix}1 & -17\\ 3 & 6\end{vmatrix}}{-19}$$

$$=2 \qquad =3$$

اذن حل النظام هو: $(2,3)$

---

(5) $2x-3y=29$

$6y-4x=12$

$$C=\begin{bmatrix}2 & -3\\ -4 & 6\end{bmatrix}$$

$$D=|C|=\begin{vmatrix}2 & -3\\ -4 & 6\end{vmatrix}=12-12=0$$

المحددة = 0 (اذن لا يوجد حلول لهذا النظام)

---

(6) $5x-4y=22$

$4x+3y=-1$

$$C=\begin{bmatrix}5 & -4\\ 4 & 3\end{bmatrix}$$

$$D=|C|=\begin{vmatrix}5 & -4\\ 4 & 3\end{vmatrix}=5(3)-(-4)(4)=31$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix}c_1 & b_1\\ c_2 & b_2\end{vmatrix}}{D} \qquad y=\frac{\begin{vmatrix}a_1 & c_1\\ a_2 & c_2\end{vmatrix}}{D}$$

$$=\frac{\begin{vmatrix}22 & -4\\ -1 & 3\end{vmatrix}}{31} \qquad =\frac{\begin{vmatrix}5 & 22\\ 4 & -1\end{vmatrix}}{31}$$

$$=\frac{62}{31}=2 \qquad =\frac{-93}{31}=-3$$

اذن حل النظام هو: $(2,-3)$

(7) $6x-7y=-11$
$5x+4x=40$

$C=\begin{bmatrix}6 & -7\\ 5 & 4\end{bmatrix}$

$D=|C|=\begin{vmatrix}6 & -7\\ 5 & 4\end{vmatrix}=6(4)-(-7)(5)=59$

$y=\dfrac{\begin{vmatrix}a_1 & c_1\\ a_2 & c_2\end{vmatrix}}{D}=\dfrac{\begin{vmatrix}6 & -11\\ 5 & 40\end{vmatrix}}{59}=5$

$x=\dfrac{\begin{vmatrix}c_1 & b_1\\ c_2 & b_2\end{vmatrix}}{D}=\dfrac{\begin{vmatrix}-11 & -7\\ 40 & 4\end{vmatrix}}{59}=4$

اذن حل النظام هو: $(4,5)$

مثال 4 : ما قيمة c التي تجعل محددة مصفوفة المعاملات للنظام الآتي تساوي صفراً ؟

$2x+y=6 \rightarrow 2x+y=6$
$cy=3-x \rightarrow x+cy=3$

محددة مصفوفة المعاملات $=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & c\end{vmatrix}=2c-1$

$2c-1=0 \rightarrow 2c=1 \rightarrow c=\dfrac{1}{2}$

مهارات التفكير العليا

مسألة مفتوحة: أكتب مصفوفة مُربَّعة من الرتبة 2×2 تُحقِّق الشرط المُعطى في كلٍّ ممّا يأتي:

(15) مُحدِّدتها تساوي صفرًا.

الحـــــل:

$A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$

$|A|=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=1(-1)-(-1)(1)=0$

---

(16) مُحدِّدتها تساوي -1

الحـــــل:

$B=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{bmatrix}$

$|B|=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{vmatrix}=1(-1)-(0)(1)=-1$

(17) جميع عناصرها أعداد موجبة، ومُحدِّدتها -12

الحـــــل:

$A=\begin{bmatrix}2 & 6\\ 4 & 6\end{bmatrix}$

$|A|=\begin{vmatrix}2 & 6\\ 4 & 6\end{vmatrix}=2(6)-(6)(4)=-12$

---

(18) تحدَّ: عند حلّ نظام من معادلتين بمُتغيِّرين باستعمال قاعدة كريمر، فإنَّ الحلّ هو:

$y=\dfrac{\begin{vmatrix}7 & a\\ b & c\end{vmatrix}}{D}\ ,\ x=\dfrac{\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix}}{5}$

ما قيمة كلٍّ من a و b و c ؟

أولا : نكتب نظام المعادلات

$7x+2y=1$
$bx+4y=3$

ثانياً : نجد قيمة a,c (بحيث $\begin{vmatrix}7 & a\\ b & c\end{vmatrix}\ ,\ \begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix}$)

$a=1\ ,\ c=3$

ثالثاً : نجد قيمة x,y

$x=\dfrac{\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix}}{5}=\dfrac{-2}{5}$: $7\left(-\dfrac{2}{5}\right)+2y=1$

: $y=\dfrac{19}{10}$

ثالثاً : نجد قيمة b

$y=\dfrac{\begin{vmatrix}7 & a\\ b & c\end{vmatrix}}{5}=\dfrac{21-b}{5}$

$\dfrac{19}{10}=\dfrac{21-b}{5}$

$95=210-10b$

$10b=210-95$

$10b=115$

$b=\dfrac{115}{10}$

أجد قيمة كلٍّ من المُحدِّدات الآتية:

1. $\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$

2. $\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$

3. $\begin{vmatrix} -5 & 10 \\ -3 & 6 \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} 7 & -3 & 1 \\ 8 & 0 & 4 \\ 2 & -5 & 6 \end{vmatrix}$

5. $\begin{vmatrix} 4 & -2 & -4 \\ -6 & 3 & 6 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix}$

6. $\begin{vmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \\ -2 & 2 & 8 \end{vmatrix}$

7. إذا كان: $B = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$، فأجد قيمة كلٍّ من $|AB|$، و $|BA|$.

8. إذا كانت: $\begin{vmatrix} x & 8 \\ 2 & x \end{vmatrix} = 9$، فأجد قيمة x.

9. إذا كان: $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$، فأجد مُحدِّدة A^2، ثمَّ أُبيِّن علاقتها بمُحدِّدة A.

10. تُعطى معادلة المستقيم المارِّ بالنقطتين $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ بالقاعدة: $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$. أستعمل هذه القاعدة لإيجاد معادلة المستقيم المارِّ بالنقطتين $(-1, 3), (2, -5)$.

أحُلُّ كُلًّا من أنظمة المعادلات الآتية باستعمال قاعدة كريمر:

11 $3x - 5y = 22$
$2x + y = 6$

12 $3y + 5x = 7$
$2x - 4y = 8$

13 $3x = y + 10$
$4y = 6 + 5x$

14 حلَّت سلمى نظامًا من معادلتين خطِّيتين بالمُتغيِّرين x، وy باستعمال قاعدة كريمر، فوجدت أنَّ: $y = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}{D}$, $x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}}{D}$. ما قيمة كلٍّ من x، وy؟

15 أجد مساحة المُثلَّث الذي رؤوسه: $A(-2, 5), B(7, 11), C(1, 15)$ باستعمال المُحدِّدات.

16 **نقود:** يوجد في صندوق مُحاسِب 75 ورقة نقد أردنية من فئة الدينار وخمسة الدنانير وعشرة الدنانير، تبلغ قيمتها الإجمالية 460 JD. إذا كان عدد أوراق النقد من فئة خمسة الدنانير يساوي 4 أمثال عدد أوراق النقد من فئة الدينار، فأجد عدد ما في الصندوق من أوراق النقد لكل فئة باستعمال قاعدة كريمر.

الدرس الخامس : النظير الضربي للمصفوفة وأنظمة المعادلات الخطية

Inverse Matrix and Systems of Linear Equations

1. مصفوفة الوحدة، ونظير المصفوفة الضربي

معلوم أن ناتج ضرب أي عد عدد حقيقي في العدد 1 هو العدد نفسه ؛إذ إن $x(1) = 1(x) = x$ لأي عدد حقيقي x.

لذلك يُسمّى العدد 1 عنصرًا محايدا العملية ضرب الأعداد الحقيقية.

كذلك توجد مصفوفة مربعة تُسمى **مصفوفة الوحدة** ، ويُرمز إليها بالرمز I ، ويكون جميع عناصر قطرها الرئيس 1 ، وتكون بقية عناصرها أصفارًا ، وتمتاز بخاصية في ضرب المصفوفات تشبه خاصية العدد 1 في ضرب الأعداد الحقيقية.

يُمكن التحقق من أن ناتج ضرب المصفوفة I في أي مصفوفة مربعة A ، لها نفس رتبة I ،هو المصفوفة A نفسها؛ أي إنَّ :

$$I \times A = A \times I = A$$

مفهوم أساسي: المصفوفة المحايدة لعملية ضرب المصفوفات.

بالكلمات : مصفوفة الوحدة I هي المصفوفة المحايدة لعملية ضرب المصفوفات، التي إذا ضربت في أي مصفوفة أخرى من الرتبة نفسها كان ناتج الضرب هو المصفوفة الأخرى نفسها.

بالرموز : لأي مصفوفة مربعة A لها رتبة المصفوفة المحايدة I نفسها، فإنَّ :

$$I \times A = A \times I = A$$

أتعلَّم :

1. مصفوفة الوحدة من الرتبة 2×2 هي:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. مصفوفة الوحدة من الرتبة 3×3 هي:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

إذا كانت المصفوفتان A, B مربعتين من الرتبة نفسها، وكان:

$$A \times B = B \times A = I$$

فإنَّ المصفوفة A تُسمى **نظيرا ضربيًّا** للمصفوفة B ، وتُسمّى المصفوفة B أيضًا نظيرا ضربيًّا للمصفوفة A .

مفهوم أساسي: النظير الضربي للمصفوفة المربعة .

النظير الضربي للمصفوفة المربعة A هو المصفوفة A^{-1} ، حيث:

$$A \times A^{-1} = A^{-1} \times A = I$$

مثال 1 : أبين في كل مما يأتي ما إذا كانت كل مصفوفة تمثل نظيرًا ضربا للأخرى:

(1) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

الحـــــل:

الخطوة 1: أجد AB .

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 2(2)+3(-1) & 2(-3)+3(2) \\ 1(2)+2(-1) & 1(-3)+2(2) \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

الخطوة 2: أجد BA .

$$BA = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 2(2)+(-3)(1) & 2(3)+(-3)(2) \\ -1(2)+2(1) & -1(3)+2(2) \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

بما أن: $A \times B = B \times A = I$ ، فإنَّ كُلًّا من المصفوفة A والمصفوفة B تُمثل نظيرا ضربيًّا للأخرى.

(2) $F=\begin{bmatrix}6 & 5\\ 2 & 3\end{bmatrix}$, $G=\begin{bmatrix}\frac{3}{4} & \frac{5}{8}\\ \frac{1}{4} & \frac{3}{8}\end{bmatrix}$

الخطوة 1: أجد FG .

$$FG=\begin{bmatrix}6 & 5\\ 2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{3}{4} & \frac{5}{8}\\ \frac{1}{4} & \frac{3}{8}\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}6\left(\frac{3}{4}\right)+5\left(\frac{1}{4}\right) & 6\left(\frac{5}{8}\right)+5\left(\frac{3}{8}\right)\\ 2\left(\frac{3}{4}\right)+3\left(\frac{1}{4}\right) & 2\left(\frac{5}{8}\right)+3\left(\frac{3}{8}\right)\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}\frac{23}{4} & 6\\ \frac{9}{4} & \frac{19}{8}\end{bmatrix}$$

بما أن: $F\times G\neq I$ ، فإنَّ كُلًّا من المصفوفة F والمصفوفة G لا تُمثل نظيرا ضربيًّا للأخرى.

---

(3) $A=\begin{bmatrix}-2 & 3\\ -3 & 5\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}-5 & 3\\ -3 & 2\end{bmatrix}$

الخطوة 1: أجد AB .

$$AB=\begin{bmatrix}-2 & 3\\ -3 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-5 & 3\\ -3 & 2\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}-2(-5)+3(-3) & -2(3)+3(2)\\ -3(-5)+5(-3) & -3(3)+5(2)\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

الخطوة 2: أجد BA .

$$AB=\begin{bmatrix}-5 & 3\\ -3 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2 & 3\\ -3 & 5\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}-5(-2)+3(-3) & -5(3)+3(5)\\ -3(-2)+2(-3) & -3(3)+2(5)\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

بما أن: $A\times B=B\times A=I$ ، فإنَّ كُلًّا من المصفوفة A والمصفوفة B تُمثل نظيرا ضربيًّا للأخرى.

(4) $C=\begin{bmatrix}4 & 3\\ 6 & 5\end{bmatrix}$, $D=\begin{bmatrix}2.5 & -1.5\\ -3 & 2\end{bmatrix}$

الحـــــل:

الخطوة 1: أجد CD .

$$CD=\begin{bmatrix}4 & 3\\ 6 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2.5 & -1.5\\ -3 & 2\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}4(2.5)+3(-3) & 4(-1.5)+3(2)\\ 6(2.5)+5(-3) & 6(-1.5)+5(2)\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

الخطوة 2: أجد DC .

$$DC=\begin{bmatrix}2.5 & -1.5\\ -3 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & 3\\ 6 & 5\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}2.5(4)+(-1.5)(6) & 2.5(3)+(-1.5)(5)\\ -3(4)+2(6) & -3(3)+2(5)\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

بما أن: $D\times C=C\times D=I$ ، فإنَّ كُلًّا من المصفوفة D والمصفوفة C تُمثل نظيرا ضربيًّا للأخرى.

---

(5) $A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 5 & 4\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}4 & -1\\ -5 & 2\end{bmatrix}$

الحـــــل:

الخطوة 1: أجد AB .

$$AB=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 5 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & -1\\ -5 & 2\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}2(4)+1(-5) & 2(-1)+1(2)\\ 5(4)+4(-5) & 5(-1)+4(2)\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

بما أن: $A\times B\neq I$ ، فإنَّ كُلًّا من المصفوفة A والمصفوفة B لا تُمثل نظيرا ضربيًّا للأخرى.

(6) $C=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 3 & 5\end{bmatrix}$, $D=\begin{bmatrix}5 & -3\\ -3 & 2\end{bmatrix}$

الخطوة 1: أجد CD .

$$CD=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 3 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & -3\\ -3 & 2\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}2(5)+3(-3) & 2(-3)+3(2)\\ 3(5)+5(-3) & 3(-3)+5(2)\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

الخطوة 2: أجد DC .

$$DC=\begin{bmatrix}5 & -3\\ -3 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 3\\ 3 & 5\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}5(2)+(-3)(3) & 5(3)+(-3)(5)\\ -3(2)+2(3) & -3(3)+2(5)\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

بما أن: $CD=DC=I$ ، فإنَّ كُلًّا من المصفوفة C والمصفوفة D تُمثل نظيرا ضربيًّا للأخرى.

---

(7) $L=\begin{bmatrix}6 & 0\\ -2 & 1\end{bmatrix}$, $M=\begin{bmatrix}\frac{1}{6} & 0\\ \frac{1}{3} & 2\end{bmatrix}$

الخطوة 1: أجد LM .

$$LM=\begin{bmatrix}6 & 0\\ -2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{6} & 0\\ \frac{1}{3} & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}$$

بما أن: $L\times M\neq I$ ، فإنَّ كُلًّا من المصفوفة L والمصفوفة M لا تُمثل نظيرا ضربيًّا للأخرى.

---

(8) $G=\begin{bmatrix}-3 & -11\\ 1 & 3\end{bmatrix}$, $H=\begin{bmatrix}-1.5 & 5.5\\ -0.5 & 1.5\end{bmatrix}$

الخطوة 1: أجد GH .

$$GH=\begin{bmatrix}-3 & -11\\ 1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1.5 & 5.5\\ -0.5 & 1.5\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}10 & -33\\ -3 & 10\end{bmatrix}$$

بما أن: $G\times H\neq I$ ، فإنَّ كُلًّا من المصفوفة G والمصفوفة H لا تُمثل نظيرا ضربيًّا للأخرى.

2. مصفوفة الوحدة، ونظير المصفوفة الضربي

إذا كانت مُحدِّدة المصفوفة تساوي صفرًا، فلا نظيرَ ضربيًّا لها، وتُسمّى عندئذ **مصفوفة مُنفرِدة** ، أمّا المصفوفة التي مُحدِّدتها لا تساوي صفرًا، ولها نظير ضربي، فتُسمّى **مصفوفة غير مُنفرِدة**

مفهوم أساسي: النظير الضربي لمصفوفة من الرتبة 2×2 .

بالكلمات: إذا كانت مُحدِّدة المصفوفة المُربَّعة A ذات الرتبة 2×2 لا تساوي صفرًا ، فإنَّ لها نظيرًا ضربيًّا يُمكِن إيجاده باتِّباع الخطوات الآتية:

1. تبديل موقع كلٍّ من عنصري القُطر الرئيس.
2. ضرب عنصري القُطر الآخر في -1.
3. ضرب المصفوفة الناتجة في مقلوب المُحدِّدة، أو $\left(\frac{1}{|A|}\right)$.

بالرموز: اذا كانت $|A|\neq 0$ ، فإنَّ النظير الضربي للمصفوفة: $\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ هو:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}$$

مثال 1: أُبيِّن إذا كانت كل مصفوفة ممّا يأتي مُنفرِدة أو غير مُنفرِدة، ثمَّ أجد النظير الضربي للمصفوفة غير المُنفرِدة:

(1) $M=\begin{bmatrix}3 & 5\\ 6 & 10\end{bmatrix}$

$$|M|=\begin{vmatrix}3 & 5\\ 6 & 10\end{vmatrix}=3(10)-6(5)=0$$

بما ان: $|M|=0$ ، فإن المصفوفة M منفردة، ولا نظير ضربياً لها.

---

(2) $F=\begin{bmatrix}4 & 6\\ -3 & -2\end{bmatrix}$

$$|F|=\begin{vmatrix}4 & 6\\ -3 & -2\end{vmatrix}=4(-2)-6(-3)=10$$

بما ان: $|F|\neq 0$ ، فإن المصفوفة F غير منفردة، ولها نظير ضربي هو: F^{-1} ، ويمكن ايجاده كما يأتي:

$$F^{-1}=\frac{1}{|F|}\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}$$
$$=\frac{1}{10}\begin{bmatrix}-2 & -6\\ 3 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{5} & -\frac{3}{5}\\ \frac{3}{10} & \frac{2}{5}\end{bmatrix}$$

(3) $H=\begin{bmatrix}-2 & 6\\ -1 & 3\end{bmatrix}$

$|H|=\begin{vmatrix}-2 & 6\\ -1 & 3\end{vmatrix}=-2(3)-6(-1)=0$

بما ان: $|H|=0$ ، فإن المصفوفة H منفردة، ولا نظير ضربياً لها.

---

(4) $J=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$

$|J|=\begin{vmatrix}2 & 0\\ 0 & -1\end{vmatrix}=2(-1)-0(0)=-2$

بما ان: $|J|\neq 0$ ، فإن المصفوفة J غير منفردة، ولها نظير ضربي هو: J^{-1} ، ويمكن ايجاده كما يأتي:

$$J^{-1}=\frac{1}{|J|}\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{-2}\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$$

---

(5) $K=\begin{bmatrix}4 & 3\\ 5 & 7\end{bmatrix}$

$|K|=\begin{vmatrix}4 & 3\\ 5 & 7\end{vmatrix}=4(7)-3(5)=13$

بما ان: $|K|\neq 0$ ، فإن المصفوفة K غير منفردة، ولها نظير ضربي هو: K^{-1} ، ويمكن ايجاده كما يأتي:

$$K^{-1}=\frac{1}{|K|}\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{13}\begin{bmatrix}7 & -3\\ -5 & 4\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{7}{13} & -\frac{3}{13}\\ \frac{5}{13} & \frac{4}{13}\end{bmatrix}$$

---

(6) $P=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 4 & 5\end{bmatrix}$

$|P|=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 4 & 5\end{vmatrix}=2(5)-3(4)=-2$

$$P^{-1}=\frac{1}{|P|}\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}$$

$$=\frac{-1}{2}\begin{bmatrix}5 & -3\\ -4 & 2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{-5}{2} & \frac{3}{2}\\ 2 & -1\end{bmatrix}$$

(7) $Q=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3}\end{bmatrix}$

$|Q|=\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3}\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)-0\left(-\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{6}$

بما ان: $|Q|\neq 0$ ، فإن المصفوفة Q غير منفردة، ولها نظير ضربي هو: Q^{-1} ، ويمكن ايجاده كما يأتي:

$$Q^{-1}=\frac{1}{|Q|}\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}=6\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & 0\\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & 3\end{bmatrix}$$

---

(8) $S=\begin{bmatrix}3 & -3\\ -2 & -2\end{bmatrix}$

$|S|=\begin{vmatrix}3 & -3\\ -2 & -2\end{vmatrix}=3(-2)-(-3)(-2)=-12$

بما ان: $|S|\neq 0$ ، فإن المصفوفة S غير منفردة، ولها نظير ضربي هو: S^{-1} ، ويمكن ايجاده كما يأتي:

$$S^{-1}=\frac{1}{|S|}\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}=-\frac{1}{12}\begin{bmatrix}-2 & 3\\ 2 & 3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{1}{6} & \frac{-1}{4}\\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{4}\end{bmatrix}$$

---

(9) $V=\begin{bmatrix}8 & -1\\ 2 & 1\end{bmatrix}$

$|V|=\begin{vmatrix}8 & -1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=8(1)-(-1)(2)=10$

بما ان: $|V|\neq 0$ ، فإن المصفوفة V غير منفردة، ولها نظير ضربي هو: V^{-1} ، ويمكن ايجاده كما يأتي:

$$V^{-1}=\frac{1}{|V|}\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}=\frac{1}{10}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -2 & 8\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{1}{10} & \frac{1}{10}\\ -\frac{1}{5} & \frac{4}{5}\end{bmatrix}$$

3. المعادلة المصفوفية.

المعادلة المصفوفية : هي معادلة تتضمن مصفوفات مجهولة (أو تكون تتضمن عملية ضرب بعض عناصرها مجهولة)، ومصفوفات معلومة، إضافةً إلى عمليات على تلك المصفوفات.

أما طريقة حل المعادلة المصفوفية : $AX = B$ فتشبه طريقة حل المعادلة: $ax = b$، حيث x , b , a أعداد حقيقية كما هو مبين أدناه.

معادلة جبرية		معادلة مصفوفية	
$ax = b$		$AX = B$	
$\frac{1}{a}(ax) = \frac{1}{a}(b)$	بضرب الطرفين في $\frac{1}{a}$	$A^{-1}(AX) = A^{-1} \times B$	بضرب الطرفين في A^{-1} من اليسار
$(\frac{1}{a} \times a)x = \frac{b}{a}$	خاصية التجميع	$(A^{-1} \times A)X = A^{-1}B$	خاصية التجميع
$(1)x = \frac{b}{a}$	خاصية النظير الضربي	$(I)X = A^{-1}B$	خاصية النظير الضربي
$x = \frac{b}{a}$	خاصية العنصر المُحايد	$X = A^{-1}B$	خاصية الضرب في المصفوفة المُحايدة

لحل نظام من معادلتين خطيتين بمتغيرين، أُحوّلهما أولا إلى معادلة مصفوفية صورتها: $AX = B$، حيث A مصفوفة معاملات المُتغيّرين، و X مصفوفة المتغيرات في المعادلتين الخطيتين، و B مصفوفة الثوابت، فيكون حلها هو:

$$X = A^{-1}B$$

أتعلّم : سيقتصر هذا الدرس على المعادلة المصفوفية التي تتضمّن عملية ضرب المصفوفات فقط؛ أي المعادلة التي صورتها: $AX = B$ حيث A, B مصفوفتان معلومتان، و X مصفوفة مجهولة يُراد إيجادها.

أتذكّر : النظير الضربي للعدد الحقيقي a هو العدد $\frac{1}{a}$ حيث $a \neq 0$، وحاصل ضرب أي عدد حقيقي في نظيره الضربي هو العدد 1 وهو العنصر المُحايد لضرب الأعداد الحقيقية.

مثال 1 : أحلُّ نظام المعادلات الآتي باستعمال النظير الضربي (إن أمكن):

$$5x + 3y = 3$$
$$x - 2y = 11$$

الخطوة 1: أكتب المعادلة المصفوفية التي تمثل هذا النظام.

$$AX = B \quad : \quad \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 11 \end{bmatrix}$$

الخطوة 2: أجد مُحدِّدة مصفوفة المعاملات.

$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 5(-2) - 1(3) = -13$$

بما ان: $|A| \neq 0$ ، فإنه يوجد نظير ضربي للمصفوفة A :.

الخطوة 3: أجد A^{-1}.

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{-13}\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{13} & \frac{3}{13} \\ \frac{1}{13} & \frac{-5}{13} \end{bmatrix}$$

الخطوة 4: أحل المعادلة المصفوفية باستعمال: $X = A^{-1}B$.

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} \frac{2}{13} & \frac{3}{13} \\ \frac{1}{13} & \frac{-5}{13} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 \\ 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}$$

إذن، حلُّ هذا النظام هو: $(3, -4)$.

مثال 2 : أحلُّ نظام المعادلات الآتي باستعمال النظير الضربي (إن أمكن):

$$3x - y = 13$$
$$3y - 2x = 4$$

$$AX = B$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 3(3) - (-1)(-2) = 7$$

بما ان: $|A| \neq 0$ ، فإنه يوجد نظير ضربي للمصفوفة A :.

$$A^{-1} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{3}{7} \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{3}{7} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 13 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{43}{7} \\ \frac{38}{7} \end{bmatrix}$$

مثال 3 : احل كلا من أنظمة المعادلات الآتية باستعمال النظير الضربي (إن أمكن):

(1) $3x + 5y = 13$
$x - 2y = -3$

الحل:

$AX = B$

$\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ -3 \end{bmatrix}$

$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3(-2) - (5)(1) = -11$

بما ان: $|A| \neq 0$ ، فإنه يوجد نظير ضربي للمصفوفة A :

$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{-1}{11}\begin{bmatrix} -2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} \frac{2}{11} & \frac{5}{11} \\ \frac{1}{11} & \frac{-3}{11} \end{bmatrix}$

$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} \frac{2}{11} & \frac{5}{11} \\ \frac{1}{11} & \frac{-3}{11} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 13 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

---

(2) $-2x + 4y = 6$
$x + 2y = 7$

الحل:

$AX = B$

$\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \end{bmatrix}$

$|A| = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2(2) - 4(1) = 0$

بما ان: $|A| = 0$ ، اذن لا يوجد نظير ضربي للمصفوفة A

(3) $5x - 8y = 31$
$2y - 3x = -13$

الحل:

$AX = B$

$\begin{bmatrix} 5 & -8 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 31 \\ -13 \end{bmatrix}$

$|A| = \begin{vmatrix} 5 & -8 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 5(2) - (-8)(-3) = 34$

بما ان: $|A| \neq 0$ ، فإنه يوجد نظير ضربي للمصفوفة A :

$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{34}\begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

$X = A^{-1}B = \frac{1}{34}\begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 31 \\ -13 \end{bmatrix}$

$= \frac{1}{34}\begin{bmatrix} -42 \\ 28 \end{bmatrix}$

---

(4) $x + y = 20$
$x - 2y = -1$

الحل:

$AX = B$

$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ -1 \end{bmatrix}$

$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 1(-2) - (1)(1) = -3$

بما ان: $|A| \neq 0$ ، فإنه يوجد نظير ضربي للمصفوفة A :

$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{-1}{3}\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

$X = A^{-1}B = \frac{-1}{3}\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 20 \\ -1 \end{bmatrix}$

$= \frac{-1}{3}\begin{bmatrix} -39 \\ -21 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 13 \\ 7 \end{bmatrix}$

(5) $3x + 2y = 8 \rightarrow 3x + 2y = 8$
$x = y + 1 \rightarrow x - y = 1$

الحل:

$AX = B$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 3(-1) - (2)(1) = -5$$

بما ان: $|A| \neq 0$ ، فإنه يوجد نظير ضربي للمصفوفة A :

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{-1}{5}\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}B = \frac{-1}{5}\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{-1}{5}\begin{bmatrix} -10 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

---

(6) $2x + 7y = 24$
$4x + 12y = 46$

الحل:

$AX = B$

$$\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 12 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 \\ 46 \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 12 \end{vmatrix} = 2(12) - (7)(4) = -4$$

بما ان: $|A| \neq 0$ ، فإنه يوجد نظير ضربي للمصفوفة A :

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{-1}{4}\begin{bmatrix} 12 & -7 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}B = \frac{-1}{4}\begin{bmatrix} 12 & -7 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 24 \\ 46 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{-1}{4}\begin{bmatrix} 12(24) - 7(46) \\ -4(24) + 2(46) \end{bmatrix}$$

$$= -\frac{1}{4}\begin{bmatrix} -34 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{17}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

4. المسائل الكلامية.

يُمكِن استعمال المعادلات المصفوفية لحلّ مسائل عملية تؤول إلى نظام ذي معادلتين خطّيتين بمُتغيِّرين .

مثال 1 : كيمياء: يعمل يوسف في أحد مختبرات البحوث، وهو يريد تحضير 50 L من محلول حمض الهيدروكلوريك (HCL) بحيث تكون نسبة تركيزه 35%. إذا علمتُ أنَّ المختبر يحوي من هذا الحمض محلولا نسبة تركيزه 15%، وآخر نسبة تركيزه 40%، فكم لترا سيستعمل يوسف من كلا المحلولين؟ أكتب معادلة مصفوفية تمثل المسألة، ثم أحلُّها.

الحل:

أفترض أن يوسف سيستعمل x لترا تركيزها 15%، و y لترا تركيزها 40%

الخطوة 1 : أكتب نظام المعادلات الذي يمثل هذه المسألة.

- المعادلة الأولى : مجموع الكميتين هو 50 L . إذن، المعادلة التي تعبر عن ذلك هي: $x + y = 50$
- المعادلة الثانية: كمية الحمض في x لترًا مضافًا إليها كمية الحمض في y لترا تساوي كمية الحمض في 50 L . إذن، المعادلة التي تُعبر عن ذلك هي:

$$0.15x + 0.40y = 17.5$$

إذن، نظام المعادلات الذي يُعبر عن هذه المسألة هو:

$$x + y = 50$$
$$0.15x + 0.40y = 17.5$$

الخطوة 2: أكتب المعادلة المصفوفية التي تمثل هذا النظام.

$AX = B$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0.15 & 0.40 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \\ 17.5 \end{bmatrix}$$

الخطوة 3: أجد مُحدِّدة مصفوفة المعاملات.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0.15 & 0.40 \end{vmatrix} = 1(0.40) - 1(0.15)$$

$$= 0.25 = \frac{1}{4}$$

بما ان: $|A| \neq 0$ ، فإنه يوجد نظير ضربي للمصفوفة A :

الخطوة 4: أجد A^{-1}.

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$
$$=\frac{1}{\frac{1}{4}}\begin{bmatrix} 0.4 & -1 \\ -0.15 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1.6 & -4 \\ -0.6 & 4 \end{bmatrix}$$

الخطوة 5: أحل المعادلة المصفوفية باستعمال: $X = A^{-1}B$.

$$X=A^{-1}B=\begin{bmatrix} 1.6 & -4 \\ -0.6 & 4 \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} 50 \\ 17.5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 10 \\ 40 \end{bmatrix}$$

إذن، الحل هو $(10, 40)$، أي أن يوسف سيستعمل 10 L من المحلول الذي تركيزه 15%، و 40 L من المحلول الذي تركيزه 40% لتحقيق هدفه.

مثال 2 : يوجد في معمل للحلويات محلولان، تركيز السُّكَّر في أحدهما 12% وتركيزه في الآخر 20 % . يريد الطاهي تحضير 20 L من محلول، تركيز السُّكَّر فيه 15 % . كم لترًا سيستعمل الطاهي من كلا المحلولين المُتوافِرين في المعمل؟ أكتب معادلة مصفوفية تُمثِّل المسألة، ثمَّ أحُلُّها

الحل :

x : عدد اللترات من المحلول بتركيز 12%

y : عدد اللترات من المحلول بتركيز 20%

- المعادلة الأولى : $x+y=20$
- المعادلة الثانية: $0.12x+0.20y=3$

$$AX=B$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0.12 & 0.20 \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 20 \\ 3 \end{bmatrix}$$
$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0.12 & 0.20 \end{vmatrix}=1(0.20)-1(0.12)$$
$$=0.20-0.12=0.08$$

بما ان: $|A|\neq 0$ ، فإنه يوجد نظير ضربي للمصفوفة A :

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}=\frac{10}{8}\begin{bmatrix} 0.20 & -1 \\ -0.12 & 1 \end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix} \frac{2}{8} & -\frac{10}{8} \\ -\frac{6}{8} & \frac{40}{8} \end{bmatrix}$$

$$X=A^{-1}B=\begin{bmatrix} \frac{2}{8} & -\frac{10}{8} \\ -\frac{6}{8} & \frac{40}{8} \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} 20 \\ 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 12.5 \\ 7.5 \end{bmatrix}$$

مثال 3 : صيدلة: لدى صيدلي محلولان تركيز الملح في أحدهما 2% ، وتركيزه في الآخر 12%. وهو يريد تحضير 10 L من محلول، تركيز الملح فيه 10%. ما المعادلة المصفوفية التي يتعيَّن استعمالها لتحضير الكمية المطلوبة من المحلول؟ أكتب معادلة مصفوفية تُمثل المسألة، ثم أحلُّها.

الحل :

x : عدد اللترات من المحلول بتركيز 2%

y : عدد اللترات من المحلول بتركيز 12%

- المعادلة الأولى : $x+y=10$
- المعادلة الثانية: $0.02x+0.12y=1$

$$AX=B$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0.02 & 0.12 \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 10 \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0.02 & 0.12 \end{vmatrix}=1(0.12)-1(0.02)$$
$$=0.12-0.02=0.1$$

بما ان: $|A|\neq 0$ ، فإنه يوجد نظير ضربي للمصفوفة A :

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}=10\begin{bmatrix} 0.12 & -1 \\ -0.02 & 1 \end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix} 1.2 & -10 \\ -0.2 & 10 \end{bmatrix}$$

$$X=A^{-1}B=\begin{bmatrix} 1.2 & -10 \\ -0.2 & 10 \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} 10 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ 8 \end{bmatrix}$$

مثال 4 : أوراق نقدية : مع سعاد مجموعة من الأوراق النقدية من فئة JD 10 ، وفئة JD 20 تبلغ قيمتها الإجمالية JD 750 . إذا علمتُ أنَّ عدد أوراق فئة العشرين دينارًا يقل عن مثلي عدد أوراق فئة عشرة الدنانير بمقدار 5 أوراق، فأكتب معادلة مصفوفية تمثل المسألة، ثمّ أحلُّها لإيجاد عدد أوراق النقد التي مع سعاد من كلتا الفئتين.

الحل :

x : عدد أوراق فئة 10 دنانير

y : عدد أوراق فئة 20 ديناراً

- المعادلة الأولى : $10x + 20y = 750$
- المعادلة الثانية: $5 - 2x = y$

$$10x + 20y = 750$$
$$2x + y = 5$$

$$AX = B$$
$$\begin{bmatrix} 10 & 20 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 750 \\ 5 \end{bmatrix}$$
$$|A| = \begin{vmatrix} 10 & 20 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 10(1) - 20(2)$$
$$= 10 - 40 = -30$$

بما ان: $|A| \neq 0$ ، فإنه يوجد نظير ضربي للمصفوفة A :

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = -\frac{1}{30}\begin{bmatrix} 1 & -20 \\ -2 & 10 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}B = -\frac{1}{30}\begin{bmatrix} 1 & -20 \\ -2 & 10 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 750 \\ 5 \end{bmatrix}$$
$$= -\frac{1}{30}\begin{bmatrix} 650 \\ -1550 \end{bmatrix}$$

أسئلة متنوعة

سؤال 1 : ما قيمة x التي تجعل المصفوفة: $\begin{bmatrix} 5 & x \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ منفردة؟

$$A = \begin{bmatrix} 5 & x \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$
$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & x \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 20 - 2x$$
$$20 - 2x = 0$$
$$2x = 20$$
$$x = 10$$

سؤال 2 : ما قيمة a ، التي تجعل المصفوفة: $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ نظيرا ضربيًا لنفسها؟

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$a^2 = 1 \quad \rightarrow \quad a = \pm 1$$

سؤال 3 : أحل المعادلة المصفوفية:

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 12 & 8 \\ 20 & 14 \end{bmatrix}$$

الحل :

$$AX = B$$
$$\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 8 \\ 20 & 14 \end{bmatrix}$$
$$|A| = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = 20 - 18 = 2$$

بما ان: $|A| \neq 0$ ، فإنه يوجد نظير ضربي للمصفوفة A :

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -6 & 5 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -6 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 12 & 8 \\ 20 & 14 \end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -12 & -10 \\ 28 & 22 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -6 & -5 \\ 14 & 11 \end{bmatrix}$$

سؤال 4 : إذا كانت: $A=\begin{bmatrix}4 & 3\\ 1 & 1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}2 & -1\\ -3 & 5\end{bmatrix}$

فأجد المصفوفة C ، بحيث يكون $(B+C)^{-1}=A$.

الحل :

$$(B+C)^{-1}=A$$
$$(B+C)(B+C)^{-1}=(B+C)A$$
$$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\left(\begin{bmatrix}2 & -1\\ -3 & 5\end{bmatrix}+C\right)\begin{bmatrix}4 & 3\\ 1 & 1\end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -1\\ -3 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & 3\\ 1 & 1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}c_1 & c_2\\ c_3 & c_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & 3\\ 1 & 1\end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7 & 5\\ -7 & -4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}c_1 & c_2\\ c_3 & c_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & 3\\ 1 & 1\end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}7 & 5\\ -7 & -4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_1 & c_2\\ c_3 & c_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & 3\\ 1 & 1\end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix}-6 & -5\\ 7 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_1 & c_2\\ c_3 & c_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & 3\\ 1 & 1\end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix}-6 & -5\\ 7 & 5\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}4 & 3\\ 1 & 1\end{bmatrix}\right)^{-1}=\begin{bmatrix}c_1 & c_2\\ c_3 & c_4\end{bmatrix}$$
$$\left(\begin{bmatrix}4 & 3\\ 1 & 1\end{bmatrix}\right)^{-1}=\frac{1}{4(1)-3(1)}\begin{bmatrix}1 & -3\\ -1 & 4\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}1 & -3\\ -1 & 4\end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix}-6 & -5\\ 7 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -3\\ -1 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_1 & c_2\\ c_3 & c_4\end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix}-1 & -2\\ 2 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_1 & c_2\\ c_3 & c_4\end{bmatrix}$$

سؤال 5 : إذا كانت A مصفوفة من الرتبة 2×2 ، حيث: $A^2=2A-3I$ ، فأثبت أن $A^3=A-6I$.

الحل :

$$A^2=2A-3I$$
$$A^2(A)=(2A-3I)(A)$$
$$A^3=2A^2-3A$$
$$=2(2A-3I)-3A$$
$$=4A-6I-3A$$
$$=A-6I$$

مهارات التفكير العليا

سؤال 6 : تبرير: إذا كانت: $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ وكان: $|A|\neq 0$

وكانت: $a>0\,,d>0\,,b<0\,,c<0$ ، فهل توجد عناصر سالبة في A^{-1} ؟ أبرر إجابتي .

الحل :

لا يوجد عناصر سالبة في A^{-1} .

لأن :

- المميز $=ad-bc$ (وهذا عدد موجب)

$$A^{-1}=\underbrace{\frac{1}{ad-bc}}_{\text{عدد موجب}}\underbrace{\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}}_{\text{كل عنصر في المصفوفة موجب}}$$

سؤال 7 : برهان: إذا كانت $A=\begin{bmatrix}2 & -3\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ وكانت: $B=\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 3\end{bmatrix}$ ، فأثبت أن $(AB)^{-1}=B^{-1}\times A^{-1}$.

الحل :

$$AB=\begin{bmatrix}2 & -3\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 3\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}5 & -11\\ -1 & 3\end{bmatrix}$$
$$(AB)^{-1}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}3 & 11\\ 1 & 5\end{bmatrix}$$
$$A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 3\\ 0 & 2\end{bmatrix}\ ,\quad B^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}3 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$$
$$B^{-1}\times A^{-1}=\left(\frac{1}{2}\begin{bmatrix}3 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\right)\left(\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 3\\ 0 & 2\end{bmatrix}\right)$$
$$=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}3 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 3\\ 0 & 2\end{bmatrix}$$
$$=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}3 & 11\\ 1 & 5\end{bmatrix}$$

اذن: $(AB)^{-1}=B^{-1}\times A^{-1}$

سؤال 8 : أكتشف المختلف: أي المصفوفات الآتية مختلفة؟

أبرر إجابتي.

$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

الحل :

المصفوفة $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ هي المختلفة . لأن محددتها تساوي 1 بينما باقي المصفوفات محدداتها صفر .

سؤال 9 : تحد: إذا كانت: $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ ، فأجد المصفوفة B التي تحقق المعادلة: $BA^2 = A$.

الحل :

$$B\left(\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\right)^2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B\left(\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B\begin{bmatrix} 4 & 15 \\ 5 & 19 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} 4 & 15 \\ 5 & 19 \end{bmatrix}\right)^{-1}$$

$$\left(\begin{bmatrix} 4 & 15 \\ 5 & 19 \end{bmatrix}\right)^{-1} = \frac{1}{4(19) - 15(5)}\begin{bmatrix} 19 & -15 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 19 & -15 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 19 & -15 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

أُبيِّن إذا كانت كل مصفوفتين ممّا يأتي تُمثِّل إحداهما نظيرًا ضربيًّا للأُخرى:

1 $A=\begin{bmatrix}8 & 3\\5 & 2\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}2 & -3\\-5 & 8\end{bmatrix}$

2 $F=\begin{bmatrix}3 & 5\\-1 & 5\end{bmatrix}, G=\begin{bmatrix}0.25 & -0.25\\1 & 3\end{bmatrix}$

أُبيِّن إذا كانت كلٌّ من المصفوفات الآتية مُنفرِدة أو غير مُنفرِدة، ثمَّ أجد النظير الضربي لغير المُنفرِدة منها:

3 $M=\begin{bmatrix}4 & -10\\-2 & 5\end{bmatrix}$

4 $N=\begin{bmatrix}-3 & -11\\6 & 2\end{bmatrix}$

5 $R=\begin{bmatrix}3 & -4\\-2 & -3\end{bmatrix}$

أحُلُّ أنظمة المعادلات الآتية باستعمال النظير الضربي:

6 $\begin{aligned}-2x+y&=13\\x-2y&=-11\end{aligned}$

7 $\begin{aligned}4x+5y&=22\\3x+4y&=17\end{aligned}$

8 $\begin{aligned}3x-8y&=34\\2y-4x-28&=0\end{aligned}$

9 أجد قيمة x التي تجعل المصفوفة: $\begin{bmatrix}x & 1\\15 & x+2\end{bmatrix}$ مُنفرِدة.

10 إذا كان: $A=\begin{bmatrix}4 & -3\\2 & -1\end{bmatrix}$، فأجد مُحدِّدة A^{-1}، ثمَّ أُبيِّن العلاقة بين $|A|$ و $|A^{-1}|$.

11 إذا كان A و B مصفوفتيـن مُربَّعتين من الرتبـة 2×2، وكان: $AB = B^5A$، وكان: $B^6 = I$، حيث I المصفوفة المُحايِدة، فأُثبِت أنَّ: $B(AB) = A$.

12 إذا كان: $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$، وكان B مصفوفة مُربَّعة من الرتبة 2×2، حيث: $BA^2 = A$، فأجد المصفوفة B.

13 إذا كانت: $B = \begin{bmatrix} -5 & a \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$، حيث: $a \neq \frac{-25}{6}$، فأجد قيمة a التي تجعل $B^{-1} = B$.

14 تغذيـة: تُخطِّـط اختصاصيـة تغذيـة نظامًـا غذائيًّـا للاعـب كـرة قـدم، بحيـث يتيـح لـه اسـتهلاك 3600 سـعرة حراريـة يوميًّـا؛ بـأنْ يـأكل 750 g مـن البروتينـات والكربوهيـدرات والدهـون كل يـوم. إذا كان الغـرام الواحـد لـكلٍّ مـن البروتينـات والكربوهيـدرات يُـزوِّد الجسـم بنحـو 4 سـعرات، وكان الغـرام الواحـد مـن الدهـون يُـزوِّد الجسـم بنحـو 9 سـعرات، وبلغـت نسـبة السـعرات المُقـرَّرة التـي مصدرهـا البروتينـات والدهـون نحـو 60%؛ فأكتـب معادلـة مصفوفيـة، ثـمَّ أحُلُّهـا لإيجـاد مقـدار مـا يتناولـه هـذا اللاعـب مـن البروتينـات والكربوهيـدرات والدهـون يوميًّـا.

اختبار نهاية الوحدة

أختار رمز الإجابة الصحيحة في كلّ ممّا يأتي:

1 إذا كان: $A=\begin{bmatrix}15 & -8 & 0\\ 9 & 22 & -4\\ -3 & 6 & 12\end{bmatrix}$، فإنّ $a_{21}+a_{32}$ يساوي:

a) 15 b) -12

c) 5 d) -2

2 إذا كانت $A_{3\times2}$، وكانت $B_{2\times4}$، وكانت $C_{3\times2}$، فإنّ العملية التي يُمكِن إيجادها هي:

a) $A+B$ b) $B+C$

c) $5B-3C$ d) $(A+C)B$

3 إذا كانت: $\begin{bmatrix}4 & x\\ 7 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2x-y & 2\\ 4 & z\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}3 & 1\\ 1 & x-z\end{bmatrix}$، فإنّ قيمة $(x+y+z)$ تساوي:

a) 10 b) 19

c) 21 d) 26

4 إذا كانت: $\begin{bmatrix}-8 & x\\ 2 & 3\end{bmatrix}$ مصفوفة مُنفرِدة، فإنّ قيمة x تساوي:

a) -8 b) -12

c) 6 d) -26

5 إذا كان: $C=\begin{bmatrix}-2 & 4\\ 6 & -3\\ 8 & 5\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1 & 4 & 5\\ 9 & -2 & -3\end{bmatrix}$، فإنّ قيمة العنصر c_{23} تساوي:

a) 39 b) 22

c) 25 d) 27

6 إذا كانت $L_{3\times4}$، وكانت $M_{5\times3}$، وكانت $N_{2\times5}$، فإنّ رتبة المصفوفة T، حيث: $T=NML$، هي:

a) 2×3 b) 3×5

c) 3×4 d) 2×4

إذا كان: $A=\begin{bmatrix}a-3 & -2\\ 2 & a+2\end{bmatrix}$، حيث a عدد ثابت، فأُجيب عن الأسئلة الثلاثة الآتية تباعًا:

7 أجد مُحدِّدة A بدلالة a.

8 أجد قِيَم a التي تجعل المصفوفة A مُنفرِدة.

9 أجد A^{-1} عندما $a=3$.

إذا كان: $A=\begin{bmatrix}3 & -2\\ 0 & -1\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}6 & 2 & -5\\ 3 & 7 & 4\end{bmatrix}$

$C=\begin{bmatrix}3 & 9\\ -4 & 1\\ 0 & 8\end{bmatrix}, D=\begin{bmatrix}6 & 4 & 2\\ 1 & -2 & -3\end{bmatrix}$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي (إنْ أمكن):

10 $C(B+D)$ 11 AB

12 $B+C$ 13 $2B-3C$

14 أجد: $\begin{vmatrix} 3 & -7 & 6 \\ 1 & 0 & 8 \\ -2 & 11 & 9 \end{vmatrix}$.

15 يُبيِّن الجدول التالي توزيع سُكّان إحدى البلدات (بالآلاف) بحسب فئات العمر والجنس. أُنظِّم هذه البيانات في مصفوفة صفوفها فئات الأعمار، ثمَّ أُحدِّد رتبتها.

العمر	الذكور	الإناث
0 – 19	71	66
20 – 39	68	59
40 – 59	32	22
60 فأكثر	11	14

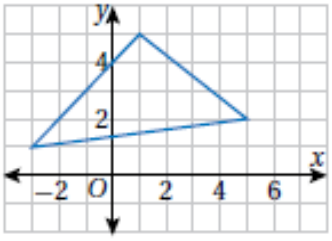
16 إذا كان: $A=\begin{bmatrix} x & 6 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$، فأجد قيمة x التي تجعل $AB = BA$.

17 إذا كان: $A=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$، فأجد قيمة كلٍّ من الثابت k والثابت h اللذين يجعلان $A^2 + kI = hA$.

18 إذا كانت: $A=[2\ \ -2], B=\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$، فأجد $BA - 2C^2$.

19 أحُلُّ المعادلة: $2X-\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}=3\begin{bmatrix} -1 & 7 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$.

20 أجد مساحة المُثلَّث الآتي باستعمال المُحدِّدات.



21 أحُلُّ نظام المعادلات الآتي باستعمال قاعدة كريمر:

$$3x - 2y = 8$$
$$5x + 3y = 13$$

22 أحُلُّ نظام المعادلات الآتي باستعمال النظير الضربي:

$$x - 5y = 14$$
$$3x - 8y = 28$$

23 إذا كان: $B=\begin{bmatrix} 2 & a \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$، حيث a عدد ثابت لا يساوي 2، وكان: $B + B^{-1} = I$، فأجد قيمة a.

24 **كيمياء**: لدى عائشة 3 محاليل حمضية، تركيز الحمض في المحلول الأوَّل 10%، وتركيزه في المحلول الثاني 20%، وتركيزه في المحلول الثالث 40%. أكتب معادلة مصفوفية تُمثِّل المسألة، ثمَّ أحُلُّها لإيجاد الكميات التي يتعيَّن على عائشة مزجها من المحاليل الثلاثة للحصول على 100 mL من محلول حمضي نسبة تركيزه 18%، علمًا بأنَّ الكمية التي ستُستعمَل من المحلول الذي تركيزه 10% تساوي أربعة أمثال ما سيُستعمَل من المحلول الذي تركيزه 40%.