الدرس الأول : المتطابقات المثلثية 1

Trigonometric Identities 1

1. المتطابقات المثلثية الأساسية

تعلَّمْتُ سابقًا أنَّه إذا رُسِمت الزاوية θ في الوضع القياسي، فإنَّ ضلع انتهائها يقطع دائرة الوحدة في نقطة وحيدة هي $P(x,y)$ كما يظهر في الشكل المجاور. ومنه، فإن: $x=\cos\theta$ ، $y=\sin\theta$.

أُلاحِظ أنَّ النقطة $P(x,y)$ تقع على دائرة مركزها نقطة الأصل، ونصف قُطرها وحدة واحدة ، لذا تنتج المعادلتان الآتيتان:

$$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1 \quad , \quad x^2+y^2=1$$

أُلاحِظ أيضًا أنَّ المعادلة: $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ صحيحة لجميع قِيَم θ ؛ لذا تُسمّى متطابقة مثلثية.

في ما يأتي المتطابقات المثلثية الأساسية الناتجة بصورة مباشرة من تعريف الاقترانات المثلثية الستة التي درستُها سابقًا.

مفهوم أساسي: المتطابقات المثلثية الأساسية.

- **متطابقات المقلوب :**

$$\csc\theta=\frac{1}{\sin\theta} \qquad \sec\theta=\frac{1}{\cos\theta} \qquad \cot\theta=\frac{1}{\tan\theta}$$

- **المتطابقات النسبية :**

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta} \qquad \cot\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

- **متطابقات فيثاغورس :**

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$$
$$1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$$
$$1+\cot^2\theta=\csc^2\theta$$

- **متطابقات الزاويتين المتتامتين :**

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta$$
$$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cot\theta \qquad \cot\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\tan\theta$$
$$\sec\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\csc\theta \qquad \csc\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sec\theta$$

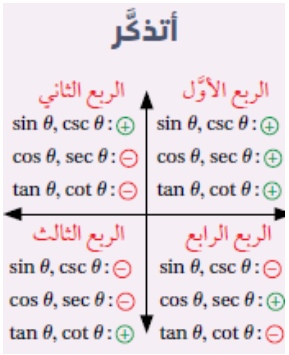
- **متطابقات الزاوية السالبة :**

$$\sin(-\theta)=-\sin\theta$$
$$\cos(-\theta)=\cos\theta$$
$$\tan(-\theta)=-\tan\theta$$

أتعلَّم : يُمكِن أيضًا كتابة متطابقات الزاويتين المتتامتين بالدرجات، مثل:

$$\sin(90^\circ-\theta)=\cos\theta$$

أتذكَّر



مثال 1 : أجد قيمة $\sec\theta$ إذا كان:

$$\sin\theta=\frac{3}{5} \quad , \quad \frac{\pi}{2}<\theta<\pi$$

الحل :

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$$
$$\left(\frac{3}{5}\right)^2+\cos^2\theta=1$$
$$\cos^2\theta=\frac{16}{25}$$
$$\cos\theta=\pm\frac{4}{5}$$
$$\cos\theta=-\frac{4}{5} \qquad \text{(جيب التمام سالب في الربع الثاني)}$$
$$\frac{1}{\cos\theta}=-\frac{5}{6}$$
$$\sec\theta=-\frac{5}{6}$$

مثال 2 : أجد قيمة $\tan\theta$ إذا كان:

$$\sec\theta=-\frac{3}{2} \quad , \quad \pi<\theta<\frac{3\pi}{2}$$

الحل :

$$1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$$
$$1+\tan^2\theta=\left(-\frac{3}{2}\right)^2$$
$$1+\tan^2\theta=\frac{9}{4}$$
$$\tan^2\theta=\frac{9}{4}-1$$
$$\tan^2\theta=\frac{5}{4}$$
$$\tan\theta=\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$$
$$\tan\theta=\frac{\sqrt{5}}{2} \qquad \text{(الظل موجب في الربع الثالث)}$$

مثال 3 : أجد قيمة كلٍّ من النسب المثلثية الآتية ضمن الفترة المعطاة :

(1) $\cot\theta \quad , \quad \sin\theta = \frac{1}{3} \quad , \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

$0 < \theta < \frac{\pi}{2} \longrightarrow \cos\theta > 0 \quad , \quad \cot\theta > 0$

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \implies \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cos^2\theta = 1$

$\implies \cos^2\theta = \frac{8}{9} \implies \cos\theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\implies \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{\frac{2\sqrt{2}}{3}}{\frac{1}{3}} = 2\sqrt{2}$

---

(2) $\sec\theta \quad , \quad \tan\theta = -\frac{3}{7} \quad , \quad \frac{\pi}{2} < \theta < \pi$

$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi \longrightarrow \sec\theta < 0$

$\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta \implies \sec^2\theta = 1 + \left(\frac{-3}{7}\right)^2$

$\implies \sec^2\theta = 1 + \frac{9}{49} \implies \sec^2\theta = 1 + \frac{9}{49}$

$\implies \sec^2\theta = \frac{58}{49} \implies \sec\theta = -\frac{\sqrt{58}}{7}$

---

(3) $\tan\theta \quad , \quad \csc\theta = -\frac{5}{3} \quad , \quad \pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$

$\pi < \theta < \frac{3\pi}{2} \longrightarrow \tan\theta > 0 \quad , \quad \cos\theta < 0$

$\sin\theta = \frac{1}{\csc\theta} = -\frac{3}{5}$

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \implies \left(\frac{-3}{5}\right)^2 + \cos^2\theta = 1$

$\implies \cos^2\theta = \frac{16}{25} \implies \cos\theta = -\frac{4}{5}$

$\implies \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{-\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}$

---

(4) $\sin\theta \quad , \quad \sec\theta = \frac{9}{4} \quad , \quad \frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$

$\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi \longrightarrow \sin\theta < 0 \quad , \quad \cos\theta < 0$

$\cos\theta = \frac{1}{\sec\theta} = \frac{4}{9}$

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \implies \sin^2\theta + \left(\frac{4}{9}\right)^2 = 1$

$\implies \sin^2\theta = \frac{65}{81} \implies \sin\theta = -\frac{\sqrt{65}}{9}$

2. تبسيط المقادير المثلثية وإعادة كتابتها

تبسيط المقادير المثلثية هو كتابة المقادير بدلالة اقتران مثلثي واحد فقط (إنْ أمكن) ، ويُمكِن ذلك باستعمال المتطابقات المثلثية.

مثال 1 : أُبسِّط كُلًّا من المقادير المثلثية الآتية :

(1) $\sin x \cos^2 x - \sin x$

الحل :

$\sin x \cos^2 x - \sin x = \sin x (\cos^2 x - 1)$

$= -\sin x (1 - \cos^2 x)$

$= -\sin x \sin^2 x$

$= -\sin^3 x$

---

(2) $\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{1 + \sin x}$

الحل :

$\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{1 + \sin x} = \frac{\sin x (1 + \sin x) + \cos^2 x}{\cos x (1 + \sin x)}$

$= \frac{\sin x + \sin^2 x + \cos^2 x}{\cos x (1 + \sin x)}$

$= \frac{\sin x + 1}{\cos x (1 + \sin x)}$

$= \frac{1}{\cos x} = \sec x$

---

(3) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cot x$

الحل :

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cot x = \sin x \cot x$

$= \sin x \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)$

$= \cos x$

مثال 2 : أُبسِّط كُلًّا من المقادير المثلثية الآتية :

(a) $\sin x (\csc x - \sin x)$

الحل :

$\sin x (\csc x - \sin x) = \sin x \csc x - \sin^2 x$

$= \sin x \left(\frac{1}{\sin x}\right) - \sin^2 x$

$= 1 - \sin^2 x$

$= \cos^2 x$

(3) $\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\csc x}+\cos^2 x$

الحل:

$$\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\csc x}+\cos^2 x=\frac{\sin x}{\frac{1}{\sin x}}+\cos^2 x$$
$$=\sin^2 x+\cos^2 x$$
$$=1$$

---

(4) $\dfrac{\sin x-\cos x}{\cos x}+\dfrac{\sin x-\sin x}{\sin x}$

الحل:

$$=\frac{\sin x}{\cos x}-\frac{\cos x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{\sin x}{\sin x}$$
$$=\tan x+1+\cot x-1$$
$$=\tan x+\cot x$$

---

(5) $\dfrac{(\sin x+\cos x)^2-1}{\sin x\cos x}$

الحل:

$$=\frac{\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x-1}{\sin x\cos x}$$
$$=\frac{2\sin x\cos x}{\sin x\cos x}$$
$$=2$$

---

(6) $\dfrac{\sec x-\cos x}{\tan x}$

الحل:

$$\frac{\sec x-\cos x}{\tan x}=\frac{\frac{1}{\cos x}-\cos x}{\frac{\sin x}{\cos x}}$$
$$=\frac{1-\cos^2 x}{\sin x}$$
$$=\frac{\sin^2 x}{\sin x}$$
$$=\sin x$$

(b) $1+\dfrac{\sin x}{\cos x}+\dfrac{\cos x}{1+\sin x}$

الحل:

$$\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{1+\sin x}=1+\frac{\sin x(1+\sin x)+\cos^2 x}{\cos x(1+\sin x)}$$
$$=1+\frac{\sin x+\sin^2 x+\cos^2 x}{\cos x(1+\sin x)}$$
$$=1+\frac{\sin x+1}{\cos x(1+\sin x)}$$
$$=1+\frac{1}{\cos x}$$
$$=1+\sec x$$

(c) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\sec x$

الحل:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\sec x=\cos x\sec x$$
$$=\cos x\left(\frac{1}{\cos x}\right)$$
$$=1$$

مثال 3 : أبسّط كُلًّا من العبارات المثلثية الآتية :

(1) $\cos x\tan x$

الحل:

$$\cos x\tan x=\cos x\frac{\sin x}{\cos x}=\sin x$$

---

(2) $\dfrac{\sec x-\cos x}{\sin x}$

الحل:

$$\frac{\sec x-\cos x}{\sin x}=\frac{\frac{1}{\cos x}-\cos x}{\sin x}$$
$$=\frac{1-\cos^2 x}{\sin x\cos x}$$
$$=\frac{\sin^2 x}{\sin x\cos x}$$
$$=\frac{\sin x}{\cos x}=\tan x$$

3. كتابة المقادير المثلثية بحيث لا تحوي كسرًا

أحتاج في بعض المسائل إلى إعادة كتابة المقادير المثلثية بحيث لا تحوي كسرًا، ويُمكِن عمل ذلك أحيانًا باستعمال الضرب في المُرافِق. فمثلًا، عندما يكون المقام في صورة $1 \pm u$، أو صورة $u \pm 1$، فإنّي أَضرِب البسط والمقام في مُرافِق المقام، ثمَّ أُطبِّق متطابقات فيثاغورس

مثال 1 : أعيد كتابة $\frac{1}{1+\sin x}$ بحيث لا يحوي كسراً .

الحل :

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+\sin x} &= \frac{1}{1+\sin x}\times\frac{1-\sin x}{1-\sin x}\\ &= \frac{1-\sin x}{1-\sin^2 x}\\ &= \frac{1-\sin x}{\cos^2 x}\\ &= \frac{1}{\cos^2 x}-\frac{\sin x}{\cos^2 x}\\ &= \frac{1}{\cos^2 x}-\frac{\sin x}{\cos x}\times\frac{1}{\cos x}\\ &= \sec^2 x-\tan x\sec x\end{aligned}$$

مثال 2 : أعيد كتابة $\frac{1}{1+\cos x}$ بحيث لا يحوي كسراً .

الحل :

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+\cos x} &= \frac{1}{1+\cos x}\times\frac{1-\cos x}{1-\cos x}\\ &= \frac{1-\cos x}{1-\cos^2 x}\\ &= \frac{1-\cos x}{\sin^2 x}\\ &= \frac{1}{\sin^2 x}-\frac{\cos x}{\sin^2 x}\\ &= \frac{1}{\sin^2 x}-\frac{\cos x}{\sin x}\times\frac{1}{\sin x}\\ &= \csc^2 x-\cot x\csc x\end{aligned}$$

4. إثبات صِحَّة متطابقة مثلثية.

يُمكِن استعمال المتطابقات المثلثية الأساسية، إضافةً إلى تعريف الاقترانات المثلثية، لإثبات صِحَّة متطابقات مثلثية أُخرى، عن طريق تحويل أحد طرفي المتطابقة المثلثية المراد إثبات صِحَّتها إلى الطرف الآخر باتِّباع سلسلة من الخطوات، كلٌّ منها تُعَدُّ متطابقة . في ما يأتي بعض المبادئ العامة التي تساعدني على إثبات صِحَّة المتطابقات المثلثية :

- البَدْء بأحد طرفي المتطابقة: أختار أحد طرفي المتطابقة، الذي يكون أكثر تعقيدًا فيها غالبًا.
- استعمال المتطابقات المثلثية المعروفة: يُمكِنني استعمال المتطابقات المثلثية التي أعرفها، إضافةً إلى بعض المهارات الجبرية، لتحويل الطرف الذي اخترته بدايةً.
- التحويل إلى اقتران الجيب أو جيب التمام: من المفيد أحيانًا إعادة كتابة جميع الاقترانات بدلالة اقتران الجيب وجيب التمام.

مثال 1 : أثبت صحة كل من المتطابقات الآتية :

(1) $\sin x\tan x = \sec x - \cos x$

الحل :

أُلاحِظ أنَّ طرف المتطابقة الأيسر أكثر تعقيدًا، لذا أبدأ بالمقدار المثلثي الموجود فيه:

$$\begin{aligned}\sin x\tan x &= \sin x\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)=\frac{\sin^2 x}{\cos x}\\ &= \frac{1-\cos^2 x}{\cos x}=\frac{1}{\cos x}-\cos x = \sec x-\cos x\end{aligned}$$

---

(2) $\sec x+\tan x=\frac{\cos x}{1-\sin x}$

أُلاحِظ أنَّ طرف المتطابقة الأيمن أكثر تعقيدًا، لذا أبدأ بالمقدار المثلثي الموجود فيه:

$$\begin{aligned}\frac{\cos x}{1-\sin x} &= \frac{\cos x}{1-\sin x}\times\frac{1+\sin x}{1+\sin x}\\ &= \frac{\cos x\,(1+\sin x)}{1-\sin^2 x}\\ &= \frac{\cos x\,(1+\sin x)}{\cos^2 x}=\frac{1+\sin x}{\cos x}\\ &= \frac{1}{\cos x}+\frac{\sin x}{\cos x}\\ &= \sec x+\tan x\end{aligned}$$

(3) $\dfrac{\sin x}{1+\cos x}+\dfrac{1+\cos x}{\sin x}=2\csc x$

الحل :

$$\frac{\sin x}{1+\cos x}+\frac{1+\cos x}{\sin x}=\frac{\sin^2 x+(1+\cos x)^2}{(1+\cos x)\sin x}$$
$$=\frac{\sin^2 x+1+2\cos x+\cos^2 x}{(1+\cos x)\sin x}$$
$$=\frac{\sin^2 x+\cos^2 x+1+2\cos x}{(1+\cos x)\sin x}$$
$$=\frac{2+2\cos x}{(1+\cos x)\sin x}$$
$$=\frac{2(1+\cos x)}{(1+\cos x)\sin x}$$
$$=\frac{1}{\sin x}=2\csc x$$

مثال 2 : أثبت صحة كل من المتطابقات الآتية :

(a) $\cot x\cos x=\csc x-\sin x$

الحل :

$$\cot x\cos x=\frac{\cos x}{\sin x}\times\cos x$$
$$=\frac{\cos^2 x}{\sin x}$$
$$=\frac{1-\sin^2 x}{\sin x}$$
$$=\frac{1}{\sin x}-\sin x=\csc x-\sin x$$

(b) $\dfrac{1-\cos x}{\sin x}=\dfrac{\sin x}{1+\cos x}$

الحل :

$$\frac{1-\cos x}{\sin x}=\frac{1-\cos x}{\sin x}\times\frac{1+\cos x}{1+\cos x}$$
$$=\frac{1-\cos^2 x}{\sin x\,(1+\cos x)}$$
$$=\frac{\sin^2 x}{\sin x\,(1+\cos x)}=\frac{\sin x}{1+\cos x}$$

(c) $\dfrac{1}{1-\cos x}+\dfrac{1}{1+\cos x}=2\csc^2 x$

$$\frac{1}{1-\cos x}+\frac{1}{1+\cos x}=\frac{1+\cos x+1-\cos x}{1-\cos^2 x}$$
$$=\frac{2}{\sin^2 x}=2\csc^2 x$$

مثال 3 : أُثبِت صِحَّة كلٍّ من المتطابقات الآتية :

(1) $\cot(-x)\cos(-x)+\sin(-x)=-\csc x$

الحل :

$$=-\cot x\cos x-\sin x$$
$$=-\frac{\cos x}{\sin x}\times\cos x-\sin x$$
$$=\frac{-\cos^2 x-\sin^2 x}{\sin x}$$
$$=\frac{-1}{\sin x}=-\csc x$$

---

(2) $(\sin x+\cos x)^2=1+2\sin x\cos x$

الحل :

$$(\sin x+\cos x)^2=\sin^2 x+2\cos x\sin x+\cos^2 x$$
$$=1+2\sin x\cos x$$

---

(3) $\dfrac{(\sin x+\cos x)^2}{\sin^2 x-\cos^2 x}=\dfrac{\sin^2 x-\cos^2 x}{(\sin x-\cos x)^2}$

الحل :

$$\frac{(\sin x+\cos x)^2}{\sin^2 x-\cos^2 x}=\frac{(\sin x+\cos x)^2}{(\sin x+\cos x)(\sin x-\cos x)}$$
$$=\frac{(\sin x+\cos x)}{(\sin x-\cos x)}$$
$$=\frac{(\sin x+\cos x)}{(\sin x-\cos x)}\times\frac{(\sin x-\cos x)}{(\sin x-\cos x)}$$
$$=\frac{\sin^2 x-\cos^2 x}{(\sin x-\cos x)^2}$$

---

(4) $\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}=(\sec x-\tan x)^2$

الحل :

$$\frac{1-\sin x}{1+\sin x}=\frac{1-\sin x}{1+\sin x}\times\frac{1-\sin x}{1-\sin x}$$
$$=\frac{(1-\sin x)^2}{1-\sin^2 x}$$
$$=\frac{(1-\sin x)^2}{\cos^2 x}$$
$$=\left(\frac{1-\sin x}{\cos x}\right)^2$$
$$=(\sec x-\tan x)^2$$

(5) $\sin^4 x - \cos^4 x = \sin^2 x - \cos^2 x$

الحل :

$$\begin{aligned}&\sin^4 x - \cos^4 x\\&= (\sin^2 x - \cos^2 x)(\sin^2 x + \cos^2 x)\\&= (\sin^2 x - \cos^2 x)(1)\\&= \sin^2 x - \cos^2 x\end{aligned}$$

---

(6) $\dfrac{1}{1-\sin x} - \dfrac{1}{1+\sin x} = 2\sec x \tan x$

الحل :

$$\begin{aligned}&\frac{1}{1-\sin x} - \frac{1}{1+\sin x}\\&= \frac{1+\sin x - 1 + \sin x}{1-\sin^2 x}\\&= \frac{2\sin x}{\cos^2 x}\\&= \sin^2 x - \cos^2 x\end{aligned}$$

---

(7) $\ln|\tan\theta| = \ln|\sin\theta| - \ln|\cos\theta|$

الحل :

$$\begin{aligned}\ln|\tan\theta| &= \ln\left|\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right|\\&= \ln\frac{|\sin\theta|}{|\cos\theta|}\\&= \ln|\sin\theta| - \ln|\sin\theta|\end{aligned}$$

---

(8) $\ln|\sec\theta + \tan\theta| + \ln|\sec\theta - \tan\theta| = 0$

الحل :

$$\begin{aligned}&\ln|\sec\theta + \tan\theta| + \ln|\sec\theta - \tan\theta|\\&= \ln|\sec\theta + \tan\theta||\sec\theta - \tan\theta|\\&= \ln|(\sec\theta + \tan\theta)(\sec\theta - \tan\theta)|\\&= \ln|\sec^2\theta - \tan^2\theta|\\&= \ln|1|\\&= 0\end{aligned}$$

5. تحويل كل طرف إلى مقدار مثلثي وسيط.

يُفضَّل أحيانًا تحويل كل طرف من المتطابقة المثلثية المراد إثبات صِحَّتها إلى مقدار مثلثي وسيط.

مثال 1 : أثبت صحة المتطابقة الآتية :

$$\frac{1+\cos x}{\cos x} = \frac{\tan^2 x}{\sec x - 1}$$

الحل :

أُلاحِظ أنَّ طرفي المتطابقة مُعقَّدان؛ لذا أُحوِّل كلا الطرفين إلى مقدار مثلثي وسيط، بَدْءًا بالطرف الأيسر :

$$\frac{1+\cos x}{\cos x} = \frac{1}{\cos x} + \frac{\cos x}{\cos x} = \sec x + 1$$

الآن، أُحوِّل الطرف الأيمن إلى المقدار المثلثي الوسيط $\sec x + 1$

$$\begin{aligned}\frac{\tan^2 x}{\sec x - 1} &= \frac{\sec^2 x - 1}{\sec x - 1}\\&= \frac{(\sec x - 1)(\sec x + 1)}{\sec x - 1}\\&= \sec x + 1\end{aligned}$$

بما أنَّ الطرفين يساويان المقدار المثلثي نفسه، إذن المتطابقة صحيحة

مثال 2 : أثبت صحة المتطابقة الآتية :

$$(\tan x + \cot x)^2 = \sec^2 x + \csc^2 x$$

الحل :

أُلاحِظ أنَّ طرفي المتطابقة مُعقَّدان؛ لذا أُحوِّل كلا الطرفين إلى مقدار مثلثي وسيط، بَدْءًا بالطرف الأيسر :

$$\begin{aligned}(\tan x + \cot x)^2 &= \left(\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x}\right)^2\\&= \left(\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos x \sin x}\right)^2\\&= \left(\frac{1}{\cos x \sin x}\right)^2\\&= \frac{1}{\cos^2 x \sin^2 x}\end{aligned}$$

الآن، أُحوِّل الطرف الأيمن إلى المقدار المثلثي الوسيط $\frac{1}{\cos^2 x \sin^2 x}$

$$\begin{aligned}\sec^2 x + \csc^2 x &= \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x}\\&= \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x \sin^2 x}\\&= \frac{1}{\cos^2 x \sin^2 x}\end{aligned}$$

بما أنَّ الطرفين يساويان المقدار المثلثي نفسه، إذن المتطابقة صحيحة

6. متطابقات المجموع والفرق.

تعلَّمْتُ في الأمثلة السابقة كيفية استعمال المتطابقات المثلثية لإيجاد قِيَم اقترانات مثلثية، وتبسيط عبارات مثلثية، وإثبات صِحَّة متطابقات أُخرى. وسأتعلَّم الآن كيفية استعمال مجموعة من المتطابقات لإيجاد قيمة اقتران مثلثي لمجموع زاويتين أو الفرق بينهما.

مفهوم أساسي: متطابقات المجموع والفرق.

- **متطابقات المجموع :**

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$
$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$
$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

- **متطابقات الفرق :**

$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$
$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$
$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$$

مثال 1 : أجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي من دون استعمال الآلة الحاسبة :

(1) $\sin 15^\circ$

الحل :

$$\sin 15^\circ = \sin(60^\circ - 45^\circ)$$
$$= \sin 60^\circ \cos 45^\circ - \cos 60^\circ \sin 45^\circ$$
$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$
$$= \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

---

(2) $\tan \frac{5\pi}{12}$

الحل :

$$\tan \frac{5\pi}{12} = \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right)$$
$$= \frac{\tan\frac{\pi}{4} + \tan\frac{\pi}{6}}{1 - \tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{\pi}{6}}$$
$$= \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 - 1\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)} = \frac{\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}}{\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$$

(3) $\cos 20^\circ \cos 40^\circ - \sin 20^\circ \sin 40^\circ$

$$= \cos(40^\circ + 20^\circ)$$
$$= \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

مثال 2 : أجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي من دون استعمال الآلة الحاسبة :

(a) $\cos 75^\circ$

$$= \cos(45^\circ + 30^\circ)$$
$$= \cos 45^\circ \cos 30^\circ - \sin 45^\circ \sin 30^\circ$$
$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$= \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

(b) $\tan \frac{\pi}{12}$

$$= \tan\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)$$
$$= \frac{\tan\frac{\pi}{3} + \tan\frac{\pi}{4}}{1 - \tan\frac{\pi}{3}\tan\frac{\pi}{4}}$$
$$= \frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}}$$

(c) $\sin 80^\circ \cos 20^\circ - \cos 80^\circ \sin 20^\circ$

$$= \sin(80^\circ - 20^\circ)$$
$$= \sin 60^\circ$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2}$$

مثال 3 : أجد قيمة كلٍّ من النسب المثلثية الآتية من دون استعمال الآلة الحاسبة:

(1) $\sin 165^\circ$

$$= \sin(180^\circ - 165^\circ)$$
$$= \sin 15^\circ$$
$$= \sin(45^\circ - 30^\circ)$$
$$= \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ$$
$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$= \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

(2) $\tan 195^\circ$

$= \tan(195^\circ - 180^\circ)$

$= \tan 15^\circ$

$= \tan(60^\circ - 45^\circ)$

$= \dfrac{\tan 60^\circ - \tan 45^\circ}{1 + \tan 60^\circ \tan 45^\circ}$

$= \dfrac{\sqrt{3} - 1}{1 + \sqrt{3}}$

---

(3) $\sec\left(-\dfrac{\pi}{12}\right)$

$= \sec\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{1}{\cos\frac{\pi}{12}} = \dfrac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right)}$

$= \dfrac{1}{\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}}$

$= \dfrac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2}}$

$= \dfrac{1}{\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}$

---

(4) $\sin\left(\dfrac{17\pi}{12}\right)$

$= \sin\left(\pi + \dfrac{5\pi}{12}\right) = -\sin\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{6}\right)$

$= -\left(\sin\dfrac{\pi}{4}\cos\dfrac{\pi}{6} + \cos\dfrac{\pi}{4}\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$

$= -\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} \times \dfrac{1}{2}\right)$

$= \dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$

---

(5) $\sin\dfrac{\pi}{18}\cos\dfrac{5\pi}{18} + \cos\dfrac{\pi}{18}\sin\dfrac{5\pi}{18}$

$= \sin\left(\dfrac{\pi}{18} + \dfrac{5\pi}{18}\right) = \sin\dfrac{6\pi}{18} = \sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

---

(24) $\dfrac{\tan 40^\circ - \tan 10^\circ}{1 + \tan 40^\circ \tan 10^\circ}$

$= \tan(40^\circ - 10^\circ) = \tan 30^\circ$

$= \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

7. إثبات صِحَّة متطابقات مثلثية أُخرى.

يُمكِنني أيضًا استعمال متطابقات المجموع والفرق لإثبات صِحَّة متطابقات مثلثية أُخرى.

مثال 1 : أُثبِت صِحَّة كل متطابقة ممّا يأتي:

(1) $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$

الحل :

ألاحِظ أنَّ طرف المتطابقة الأيسر أكثر تعقيدًا، لذا أبدأ بالمقدار المثلثي الموجود فيه:

$\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \cos\dfrac{\pi}{2}\cos x + \sin\dfrac{\pi}{2}\sin x$

$= (0)\cos x + (1)\sin x$

$= \sin x$

---

(2) $\dfrac{1 + \tan x}{1 - \tan x} = \tan\left(\dfrac{\pi}{4} + x\right)$

الحل :

أبدأ بالمقدار المثلثي الموجود في طرف المتطابقة الأيمن

$\tan\left(\dfrac{\pi}{4} + x\right) = \dfrac{\tan\frac{\pi}{4} + \tan x}{1 - \tan\frac{\pi}{4}\tan x}$

$= \dfrac{1 + \tan x}{1 - \tan x}$

مثال 2 : أُثبِت صِحَّة كل متطابقة ممّا يأتي:

(a) $\tan\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \cot x$

الحل :

ألاحِظ أنَّ طرف المتطابقة الأيسر أكثر تعقيدًا، لذا أبدأ بالمقدار المثلثي الموجود فيه:

$\tan\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = \dfrac{\cos x}{\sin x} = \cos x$

(b) $\dfrac{\tan x - 1}{\tan x + 1} = \tan\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$

الحل :

أبدأ بالمقدار المثلثي الموجود في طرف المتطابقة الأيمن

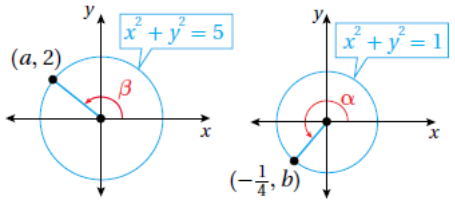
$\tan\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\tan x - \tan\frac{\pi}{4}}{1 + \tan x \tan\frac{\pi}{4}}$

$= \dfrac{\tan x - 1}{1 + \tan x}$

أسئلة متنوعة

سؤال 1 : أستعمل الشكل المجاور لإيجاد قيمة كلٍّ من الاقترانات الآتية، علمًا بأنَّ :

$$f(x)=\sin x \quad , \quad g(x)=\cos x \quad , \quad h(x)=\tan x$$



(1) $f(\alpha+\beta)$

الحل :

$a^2+4=5 \quad \rightarrow \quad a=-1$ (لأن النقطة في الربع الثاني)

$\left(-\frac{1}{4}\right)^2+b^2=1 \quad \rightarrow \quad b=-\frac{\sqrt{15}}{4}$

$\sin\alpha=-\frac{\sqrt{15}}{4} \quad , \quad \cos\alpha=-\frac{1}{4} \quad , \quad \tan\alpha=\sqrt{15}$

$\sin\beta=\frac{2}{5} \quad , \quad \cos\beta=-\frac{1}{5} \quad , \quad \tan\beta=-2$

$$\begin{aligned} f(\alpha+\beta) &= \sin(\alpha+\beta) \\ &= \sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta \\ &= \frac{\sqrt{15}}{20}-\frac{2}{20} \\ &= \frac{\sqrt{15}-2}{20} \end{aligned}$$

---

(2) $g(\alpha-\beta)$

الحل :

$$\begin{aligned} g(\alpha+\beta) &= \cos(\alpha-\beta) \\ &= \cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta \\ &= \frac{1-2\sqrt{15}}{20} \end{aligned}$$

---

(3) $h(\alpha+\beta)$

الحل :

$$h(\alpha+\beta)=\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

$$=\frac{\sqrt{15}-2}{1+2\sqrt{15}}$$

سؤال 2 : منشور: يُمكِن قياس معامل انكسار الضوء الأبيض في المنشور باستعمال المعادلة الآتية :

$$n=\frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

إذا كانت $\alpha=60^\circ$ ، فأُثبِت أنَّ معادلة معامل الانكسار تُكتَب في صورة:

$$n=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\cot\frac{\theta}{2}$$

الحل :

$$\begin{aligned} n &= \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{60^\circ}{2}\right)}{\sin\frac{\theta}{2}}=\frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}+30^\circ\right)}{\sin\frac{\theta}{2}} \\ &= \frac{\sin\frac{\theta}{2}\cos 30^\circ+\cos\frac{\theta}{2}\sin 30^\circ}{\sin\frac{\theta}{2}} \\ &= \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{\theta}{2}+\frac{1}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\cot\frac{\theta}{2} \end{aligned}$$

سؤال 3 : إذا كان $g(x)=\cos x$ ، فأُثبِت أنَّ:

$$\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=-\cos x\left(\frac{1-\cos h}{h}\right)-\sin x\left(\frac{\sin h}{h}\right)$$

الحل :

$$\begin{aligned} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} &= \frac{\cos(x+h)-\cos x}{h} \\ &= \frac{\cos x\cos h-\sin x\sin h-\cos x}{h} \\ &= \frac{\cos x\cos h-\cos x}{h}-\frac{\sin x\sin h}{h} \\ &= -\cos x\left(\frac{1-\cos h}{h}\right)-\cos x\left(\frac{\sin h}{h}\right) \end{aligned}$$

سؤال 4 : إذا كان: $\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=a\sin x+b\cos x$ ، فأجد قيمة كلٍّ من a و b.

$$\begin{aligned} \sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right) &= \sin x\cos\frac{\pi}{6}+\cos x\sin\frac{\pi}{6} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x \end{aligned}$$

$$a=\frac{\sqrt{3}}{2} \quad , \quad b=\frac{1}{2}$$

سؤال 5 : أُثبِت صِحَّة كلٍّ من المتطابقات الآتية :

(1) $\sin(A+B)+\sin(A-B)=2\sin A\cos B$

$=\sin A\cos B+\cos A\sin B+\sin A\cos B-\cos A\sin B$

$=2\sin A\cos B$

---

(2) $\sin A+\cos A=\sqrt{2}\sin\left(A+\frac{\pi}{4}\right)$

الحل :

$\sqrt{2}\sin\left(A+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\left(\sin A\cos\frac{\pi}{4}+\cos A\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin A+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos A\right)$

$=\sin A+\cos A$

---

(3) $\frac{\sin(A-B)}{\cos A\cos B}+\frac{\sin(B-C)}{\cos B\cos C}+\frac{\sin(C-A)}{\cos C\cos A}=0$

الحل :

$\frac{\sin(A-B)}{\cos A\cos B}+\frac{\sin(B-C)}{\cos B\cos C}+\frac{\sin(C-A)}{\cos C\cos A}$

$=\frac{\sin A\cos B-\cos A\sin B}{\cos A\cos B}+\frac{\sin B\cos C-\cos B\sin C}{\cos B\cos C}$

$+\frac{\sin C\cos A-\cos C\sin A}{\cos C\cos A}$

$=\frac{\sin A\cos B}{\cos A\cos B}-\frac{\cos A\sin B}{\cos A\cos B}+\frac{\sin B\cos C}{\cos B\cos C}-\frac{\cos B\sin C}{\cos B\cos C}$

$+\frac{\sin C\cos A}{\cos C\cos A}-\frac{\cos C\sin A}{\cos C\cos A}$

$=\tan A-\tan B+\tan B-\tan C+\tan C-\tan A$

$=0$

---

(4) $\cos(x+y)\cos(x-y)=\cos^2 x-\sin^2 y$

الحل :

$\cos(x+y)\cos(x-y)$

$=(\cos x\cos y-\sin x\sin y)(\cos x\cos y-\sin x\sin y)$

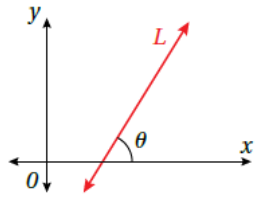
$=\cos^2 x\cos^2 y-\sin^2 x\sin^2 y$

$=\cos^2 x(1-\sin^2 y)-(1-\cos^2 x)\sin^2 y$

$=\cos^2 x-\cos^2 x\sin^2 y-\sin^2 y+\cos^2 x\sin^2 y$

$=\cos^2 x-\sin^2 y$

سؤال 6 : زاوية الميل: إذا كان L مستقيمًا في المستوى الإحداثي، و θ الزاوية التي يصنعها المستقيم مع المحور x الموجب، فإنَّ الزاوية θ تُسمّى زاوية ميل المستقيم L. أُثبِت أنَّ ميل المستقيم m يعطى بالمعادلة: $m=\tan\theta$ حيث: $0<\theta<\pi$.



الحل :

نفرض نقطتين على المستقيم L احداثياهما $(x_1,y_1)\,,(x_2,y_2)$

ميل المستقيم L يساوي:

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

وظل الزاوية θ يساوي:

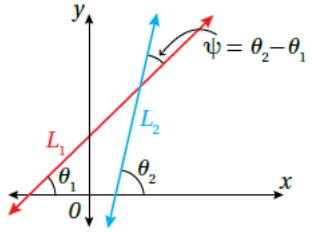
$$\tan\theta=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

إذن، ميل المستقيم يساوي ظل زاوية ميله، أي: $m=\tan\theta$

سؤال 7 : إذا كان L_1 و L_2 مستقيمين غير متوازيين في المستوى الإحداثي، وميل كلٍّ منهما m_1 و m_2 على الترتيب، وكانت ψ هي الزاوية الناتجة من تقاطع المستقيمين كما في الشكل المجاور، فأستعمل النتيجة من السؤال السابق لإثبات أنَّ:

$$\tan\psi=\frac{m_2-m_1}{1+m_1m_2}$$

ملحوظة: الرمز ψ هو حرف يوناني يُقرَأ : (بساي) .



الحل :

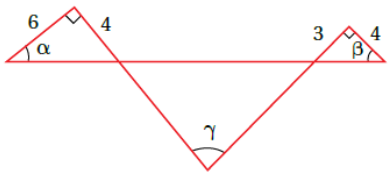
$\psi=\theta_2-\theta_1$

$\tan\psi=\tan(\theta_2-\theta_1)=\frac{\tan\theta_2-\tan\theta_1}{1+\tan\theta_2\tan\theta_1}$

$=\frac{m_2-m_1}{1+m_1m_2}$

مهارات التفكير العليا

سؤال 8 : تحدَّ: اعتمادًا على الشكل الآتي، أُثبِت أنَّ: $\alpha + \beta = \gamma$ ، ثمَّ أجد $\tan\gamma$.



الحل : الزاوية ACB والزاوية DCG متقابلتان بالرأس، فهما متساويتان في القياس، وكذلك الزاويتان EDF و CDG ، إذن: قياس الزاوية DCG يساوي $90^\circ - \beta$ وقياس الزاوية CDG يساوي $90^\circ - \alpha$

$$\gamma + 90^\circ - \beta + 90^\circ - \alpha = 180^\circ$$
$$\gamma = \alpha + \beta$$
$$\tan\gamma = \tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$
$$= \frac{\frac{4}{6} + \frac{3}{4}}{1 - \left(\frac{4}{6}\right)\left(\frac{3}{4}\right)} = \frac{17}{6}$$

سؤال 9 : تبرير: إذا كان: $\tan\alpha = x + 1$ ، و $\tan\beta = x - 1$ ، فأُثبِت أنَّ: $2\cot(\alpha - \beta) = x^2$ ، ثمَّ أُبرِّر إجابتي.

$$2\cot(\alpha-\beta) = \frac{2}{\tan(\alpha-\beta)}$$
$$= \frac{2(1+\tan\alpha\tan\beta)}{\tan\alpha - \tan\beta}$$
$$= \frac{2(1+(x+1)(x-1))}{(x+1)-(x-1)}$$
$$= \frac{2(1+x^2-1)}{2} = x^2$$

سؤال 9 : تبرير: أجد قيمة $\sin\left(\cos^{-1}\frac{1}{2} + \sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ، ثمَّ أُبرِّر إجابتي.

$$\sin\left(\cos^{-1}\frac{1}{2} + \sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right)$$
$$= \sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}$$
$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$
$$= \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

سؤال 10 : أكتشف الخطأ: أكتشف الخطأ في المسألة الآتية، ثمَّ أُصحِّحه:

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{4}\cos x - \cos\frac{\pi}{4}\sin x$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x - \sin x)$$

الحل :

الخطأ منذ بداية الحل، وذلك في تطبيق القانون.

الحل الصحيح هو :

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin x\cos\frac{\pi}{4} + \cos x\sin\frac{\pi}{4}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\sin x + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin x + \cos x)$$

أُبسِّط كُلًّا من العبارات المثلثية الآتية:

1. $\cos^3 x + \sin^2 x \cos x$
2. $\frac{1}{1-\cos x} + \frac{1}{1+\cos x}$
3. $\frac{\sec^2 x - 1}{\sec^2 x}$
4. $\frac{\cos^2 x - 1}{\cos^2 x - \cos x}$
5. $\frac{1+\cos x}{1+\sec x}$
6. $\frac{3\sin^2 x + 4\sin x + 1}{\sin^2 x + 2\sin x + 1}$

أُثبِت صِحَّة كلٍّ من المتطابقات الآتية:

7. $\frac{\cos x}{\sec x} + \frac{\sin x}{\csc x} = 1$
8. $\ln|1+\cos\theta| + \ln|1-\cos\theta| = 2\ln|\sin\theta|$
9. $\frac{1}{1-\sin^2 x} = 1 + \tan^2 x$
10. $\tan A + \tan B = \frac{\sin(A+B)}{\cos A \cos B}$

أجد قيمة كلٍّ من النسب المثلثية الآتية من دون استعمال الآلة الحاسبة:

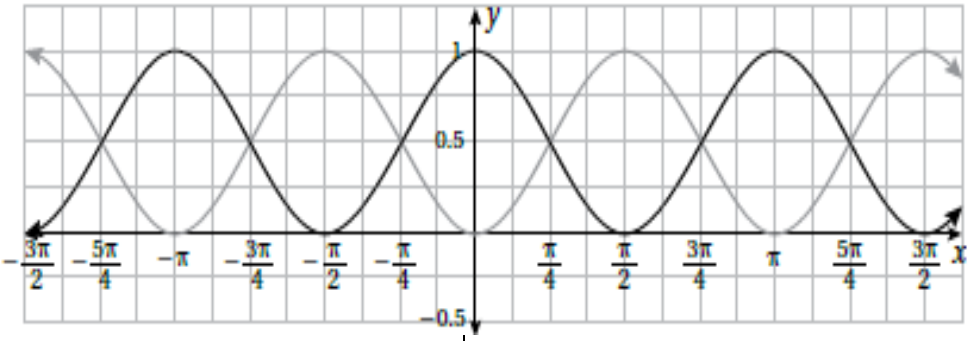
11. $\sin 105^\circ$
12. $\tan \frac{19\pi}{12}$
13. $\cos 10^\circ \cos 80^\circ - \sin 10^\circ \sin 80^\circ$

14. إذا كان: $\sin x + \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$، فأُثبِت أنَّ: $\tan x = 2 - \sqrt{3}$.

15. إذا كان: $A + B = \frac{\pi}{4}$، فأُثبِت أنَّ: $\tan A = \frac{1-\tan B}{1+\tan B}$.

16. تبرير: أُثبِت صِحَّة المتطابقة: $\tan(s+t) = \frac{\sin(t)\cos(s) + \sin(s)\cos(t)}{\cos(t)\cos(s) - \sin(s)\sin(t)}$، ثمَّ أُبرِّر إجابتي.

17. تبرير: يُبيِّن التمثيل البياني الآتي منحنيي الاقترانين: $y = \sin^2 x$، و $y = \cos^2 x$، حيث الزوايا بالراديان. أستعمل هذا التمثيل لإثبات أنَّ: $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$.



الدرس الثاني : المتطابقات المثلثية 2

Trigonometric Identities 2

1. المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية.

تُستعمَل متطابقات ضعف الزاوية لإيجاد قيمة اقتران مثلثي عند الزاوية 2θ باستعمال قيمة الاقتران عند الزاوية θ.

مفهوم أساسي: المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية.

صيغة الجيب	صيغ جيب التمام	صيغة الظلّ
$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$	$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$ $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$ $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$	$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$

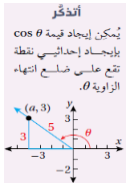
مثال 1 : اذا كان: $\sin\theta = \frac{3}{5}$ ، حيث: $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ فأجد قيمة كل مما يأتي :

(1) $\sin 2\theta$

بما أن $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ ، وقيمة $\sin\theta$ معلومة ، إذن أجد أولاً قيمة $\cos\theta$.

الخطوة 1 : أجد قيمة $\cos\theta$.

تذكّر
يُمكن إيجاد قيمة $\cos\theta$ بإيجاد إحداثيي نقطة تقع على ضلع انتهاء الزاوية θ.



$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$
$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \cos^2\theta = 1 \rightarrow \cos^2\theta = \frac{16}{25}$$
$$\rightarrow \cos\theta = \pm\frac{4}{5}$$

بما أنَّ جيب التمام في الربع الثاني سالب، إذن: $\cos\theta = -\frac{4}{5}$.

الخطوة 2 : أجد قيمة $\sin 2\theta$.

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = 2\left(\frac{3}{5}\right)\left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{24}{25}$$

---

(2) $\cos 2\theta$

$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 2\left(-\frac{4}{5}\right)^2 - 1 = \frac{7}{25}$$

---

(3) $\tan 2\theta$

الحل :

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4}$$

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = \frac{2\left(-\frac{3}{4}\right)}{1-\left(-\frac{3}{4}\right)^2} = -\frac{24}{7}$$

مثال 2 : اذا كان: $\cos\theta = -\frac{2}{3}$ ، حيث: $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ ، فأجد قيمة كل مما يأتي :

(a) $\sin 2\theta$

الحل :

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$
$$\sin^2\theta + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 = 1$$
$$\sin^2\theta = 1 - \frac{4}{9} = \frac{9}{9} - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$$
$$\sin\theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$$
$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = 2\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)\left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{4\sqrt{5}}{9}$$

(b) $\cos 2\theta$

الحل :

$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 2\left(\frac{4}{9}\right) - 1 = -\frac{1}{9}$$

(c) $\tan 2\theta$

الحل :

$$\tan 2\theta = \frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta} = \frac{-\frac{4\sqrt{5}}{9}}{-\frac{1}{9}} = 4\sqrt{5}$$

طريقة ثانية :

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{3}}{-\frac{2}{3}} = -\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = \frac{2\left(-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)}{1-\left(-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2} = 4\sqrt{5}$$

2. المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية.

يُمكِنني استعمال متطابقات ضعف الزاوية ومتطابقات مجموع زاويتين لإيجاد قيمة اقتران مثلثي عند 3θ باستعمال قيمة الاقتران عند θ.

مثال 1 (صفحة 52) : اكتب $\cos 3\theta$ بدلالة $\cos\theta$.

الحل :

$$\begin{aligned}\cos 3\theta &= \cos(2\theta+\theta)\\ &= \cos 2\theta\cos\theta - \sin 2\theta\sin\theta\\ &= (2\cos^2\theta - 1)\cos\theta - (2\sin\theta\cos\theta)\sin\theta\\ &= 2\cos^3\theta - \cos\theta - 2\sin^2\theta\cos\theta\\ &= 2\cos^3\theta - \cos\theta - 2\cos\theta(1-\cos^2\theta)\\ &= 2\cos^3\theta - \cos\theta - 2\cos\theta + 2\cos^3\theta\\ &= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta\end{aligned}$$

مثال 2 : اكتب $\sin 3\theta$ بدلالة $\cos\theta$ و $\sin\theta$

الحل :

$$\begin{aligned}\sin 3\theta &= \sin(2\theta+\theta)\\ &= \sin 2\theta\cos\theta + \cos 2\theta\sin\theta\\ &= (2\sin\theta\cos\theta)\cos\theta + (2\cos^2\theta - 1)\sin\theta\\ &= 2\sin\theta\cos^2\theta + 2\sin\theta\cos^2\theta - \sin\theta\\ &= 4\sin\theta\cos^2\theta - \sin\theta\end{aligned}$$

---

3. المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية.

يُمكِن استعمال المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية في كتابة المقادير المثلثية التي تتضمَّن قوى للجيب وجيب التمام والظلّ بدلالة القوَّة الأولى لجيب التمام فقط .

مفهوم أساسي: المتطابقات المثلثية لتقليص القوة.

$$\sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2} \qquad \cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$$

$$\tan^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{1+\cos 2\theta}$$

مثال 1 : أعيد كتابة $\sin^2 x\cos^2 x$ بدلالة القوة الأولى لجيب التمام.

الحل :

$$\begin{aligned}\sin^2 x\cos^2 x &= \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)\\ &= \frac{1-\cos^2 2x}{4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos^2 2x\\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(\frac{1-\cos 4x}{2}\right)\\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \frac{\cos 4x}{8}\\ &= \frac{1}{8} - \frac{\cos 4x}{8} = \frac{1}{8}(1-\cos 4x)\end{aligned}$$

حل آخر :

يُمكِن حلُّ المثال السابق باستعمال متطابقة جيب ضعف الزاوية على النحو الآتي :

$$\begin{aligned}\sin^2 x\cos^2 x &= \frac{1}{4}\sin^2 2x = \frac{1}{4}\left(\frac{1-\cos 4x}{2}\right)\\ &= \frac{1}{8}(1-\cos 4x)\end{aligned}$$

مثال 2 : أعيد كتابة $\sin^4 x\cos^2 x$ بدلالة القوة الأولى لجيب التمام.

الحل :

$$\begin{aligned}\sin^4 x\cos^2 x &= (\sin^2 x)^2\cos^2 x\\ &= \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)\\ &= \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)\\ &= \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)\left(\frac{1-\cos^2 2x}{4}\right)\\ &= \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos^2 2x\right)\\ &= \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(\frac{1-\cos 4x}{2}\right)\right)\\ &= \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{8} - \frac{\cos 4x}{8}\right)\\ &= \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)\left(\frac{1}{8} - \frac{\cos 4x}{8}\right)\\ &= \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)\left(\frac{1-\cos 4x}{8}\right)\\ &= \frac{1-\cos 2x-\cos 4x+\cos 2x\cos 4x}{16}\\ &= \frac{1}{16}(1-\cos 2x-\cos 4x+\cos 2x\cos 4x)\\ &= \frac{1}{16}\left(1-\cos 2x-\cos 4x+\frac{1}{2}(\cos 2x+\cos 6x)\right)\\ &= \frac{1}{16} - \frac{1}{32}\cos 2x - \frac{1}{16}\cos 4x + \frac{1}{32}\cos 6x\end{aligned}$$

4. المتطابقات المثلثية لنصف الزاوية.

تُعَدُّ المتطابقات المثلثية لنصف الزاوية نتيجة مباشرة لمتطابقات تقليص القوَّة، وذلك بأخذ الجذر التربيعي لطرفي كل متطابقة، واستعمال الزاوية $\frac{\theta}{2}$ بدلاً من الزاوية θ.

مفهوم أساسي: المتطابقات المثلثية لنصف الزاوية .

$$\cos\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos 2\theta}{2}} \qquad \sin\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{2}}$$

$$\tan\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{1+\cos 2\theta}}$$

أتعلَّم: تتضمَّن كل متطابقة الرمز $\pm$، وتُختار الإشارة المناسبة للمتطابقة بحسب الربع الذي يقع فيه ضلع انتهاء الزاوية θ.

مثال 1: أجد قيمة $\sin 22.5^\circ$ من دون استعمال الآلة الحاسبة .

الحل:

بما أنَّ 22.5° هي نصف 45°، فإنَّه يُمكِنني استعمال متطابقة جيب نصف الزاوية، حيث $x=45^\circ$. وبما أنَّ ضلع انتهاء الزاوية 22.5° يقع في الربع الأوَّل، فإنَّني أختار الإشارة الموجبة للمتطابقة:

$$\sin\frac{45^\circ}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos 45^\circ}{2}}=\sqrt{\frac{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}{2}}=\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}}$$

$$=\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

مثال 2: أجد قيمة $\cos 112.5^\circ$ من دون استعمال الآلة الحاسبة

الحل:

بما أنَّ 112.5° هي نصف 225°، فإنَّه يُمكِنني استعمال متطابقة جيب التمام نصف الزاوية، حيث $x=225^\circ$. وبما أنَّ ضلع انتهاء الزاوية 112.5° يقع في الربع الثاني، فإنَّني أختار الإشارة سالبة للمتطابقة:

$$\cos\frac{225^\circ}{2}=-\sqrt{\frac{1+\cos 225^\circ}{2}}=-\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}$$

$$=-\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}=-\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

5. المتطابقات المثلثية لنصف الزاوية.

مثال 1: اذا كان: $\cos x=-\frac{3}{5}$ حيث $\pi<x<\frac{3\pi}{2}$: فأجد قيمة كل مما يأتي.

(1) $\sin\frac{x}{2}$

الحل:

بما أنَّ $\pi<x<\frac{3\pi}{2}$، فإن $\frac{\pi}{2}<\frac{x}{2}<\frac{3\pi}{4}$، وهذا يعني أن ضلع انتهاء الزاوية $\frac{x}{2}$ يقع في الربع الثاني:

هنا أختار الإشارة الموجبة لمتطابقة جيب نصف الزاوية (لأن ضلع انتهاء الزاوية $\frac{x}{2}$ يقع في الربع الثاني)

$$\sin\frac{x}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}=\sqrt{\frac{1-\left(-\frac{3}{5}\right)}{2}}$$

$$=\sqrt{\frac{\frac{8}{5}}{2}}=\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

---

(2) $\cos\frac{x}{2}$

الحل:

هنا أختار الإشارة السالبة لمتطابقة جيب تمام نصف الزاوية (لأن ضلع انتهاء الزاوية $\frac{x}{2}$ يقع في الربع الثاني)

$$\cos\frac{x}{2}=-\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}=-\sqrt{\frac{1+\left(-\frac{3}{5}\right)}{2}}$$

$$=-\sqrt{\frac{\frac{2}{5}}{2}}=-\frac{1}{\sqrt{5}}=-\frac{\sqrt{5}}{5}$$

---

(3) $\tan\frac{x}{2}$

الحل:

هنا أختار الإشارة السالبة لمتطابقة ظل نصف الزاوية (لأن ضلع انتهاء الزاوية $\frac{x}{2}$ يقع في الربع الثاني)

$$\tan\frac{x}{2}=-\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}=-\sqrt{\frac{1-\left(-\frac{3}{5}\right)}{1+\left(-\frac{3}{5}\right)}}$$

$$=-\sqrt{\frac{\frac{8}{5}}{\frac{2}{5}}}=-\sqrt{\frac{8}{2}}=-\sqrt{4}=-2$$

مثال 2 : اذا كان: $\sin x = \frac{2}{5}$ حيث $\frac{\pi}{2} < x < \pi$: فأجد قيمة كل مما يأتي.

(1) $\sin\frac{x}{2}$

أولاً: نجد قيمة $\cos x$.

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$
$$\left(\frac{2}{5}\right)^2 + \cos^2 x = 1$$
$$\frac{4}{25} + \cos^2 x = 1$$
$$\cos^2 x = 1 - \frac{4}{25} = \frac{25}{25} - \frac{4}{25} = \frac{21}{25}$$
$$\cos x = -\sqrt{\frac{21}{25}}$$
$$= -\frac{\sqrt{21}}{5} \qquad (\text{قيمة } \cos x \text{ سالبة})$$

بما أنَّ $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ ، فإن $\frac{\pi}{4} < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{2}$ ، وهذا يعني أن ضلع انتهاء الزاوية $\frac{x}{2}$ يقع في الربع الأول:

هنا أختار الإشارة الموجبة لمتطابقة جيب نصف الزاوية (لأن ضلع انتهاء الزاوية $\frac{x}{2}$ يقع في الربع الأول)

$$\sin\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}} = \sqrt{\frac{1-\left(-\frac{\sqrt{21}}{5}\right)}{2}} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{21}}{10}}$$

---

(2) $\cos\frac{x}{2}$

هنا أختار الإشارة الموجبة لمتطابقة جيب تمام نصف الزاوية (لأن ضلع انتهاء الزاوية $\frac{x}{2}$ يقع في الربع الأول)

$$\cos\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} = -\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{21}}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{5-\sqrt{21}}{10}}$$

---

(3) $\tan\frac{x}{2}$

هنا أختار الإشارة الموجبة لمتطابقة ظل نصف الزاوية (لأن ضلع انتهاء الزاوية $\frac{x}{2}$ يقع في الربع الأول)

$$\tan\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{21}}{5}}{1-\frac{\sqrt{21}}{5}}} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{21}}{5-\sqrt{21}}}$$

6. متطابقات تحويل الضرب إلى مجموع أو فرق.

يُمكِن كتابة مقدار ضرب، مثل $\cos v$, $\sin u$ ، في صورة حاصل جمع اقترانات مثلثية أو طرحها، وذلك باستعمال متطابقات تحويل الضرب إلى جمع .

مفهوم أساسي: متطابقات تحويل الضرب إلى مجموع أو فرق.

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]$$
$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)]$$
$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)]$$

مثال 1 : أعيد كتابة $\sin 3x \sin 5x$ في صورة مجموع أو فرق.

الحل :

$$\sin 3x \sin 5x = \frac{1}{2}[\cos(3x-5x) - \cos(3x+5x)]$$
$$= \frac{1}{2}[\cos(-2x) - \cos(8x)]$$
$$= \frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{2}\cos 8x$$

مثال 2 : أعيد كتابة $\sin 7x \cos x$ في صورة مجموع أو فرق.

الحل :

$$\sin 7x \cos x = \frac{1}{2}[\sin(7x-x) + \sin(7x+x)]$$
$$= \frac{1}{2}[\sin 6x + \sin 8x]$$
$$= \frac{1}{2}\sin 6x + \frac{1}{2}\sin 8x$$

7. متطابقات تحويل المجموع أو الفرق إلى ضرب.

ترتبط كلٌّ من متطابقات تحويل الضرب إلى مجموع أو فرق بإحدى متطابقات تحويل المجموع أو الفرق إلى ضرب.

مفهوم أساسي: متطابقات تحويل المجموع أو الفرق إلى ضرب.

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$
$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$
$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$
$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

مثال 1: أعيد كتابة $\sin 5x-\sin 3x$ في صورة ضرب.

$$\sin 5x-\sin 3x=2\cos\left(\frac{5x+3x}{2}\right)\sin\left(\frac{5x-3x}{2}\right)$$
$$=2\cos\left(\frac{8x}{2}\right)\sin\left(\frac{2x}{2}\right)$$
$$=2\cos 4x\sin x$$

مثال 2: أعيد كتابة $\cos 3x+\cos 2x$ في صورة ضرب.

$$\sin 5x-\sin 3x=2\cos\left(\frac{5x+3x}{2}\right)\cos\left(\frac{5x-3x}{2}\right)$$
$$=2\cos\left(\frac{8x}{2}\right)\cos\left(\frac{2x}{2}\right)$$
$$=2\cos 4x\cos x$$

---

8. إثبات متطابقات مثلثية.

يُمكِن استعمال المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية، والمتطابقات المثلثية لنصف الزاوية، ومتطابقات تحويل الضرب إلى مجموع أو فرق، في إثبات متطابقات مثلثية أُخرى.

مثال 1: أثبت صحة كل متطابقة مما يأتي:

(1) $\dfrac{\sin 3x}{\sin x\cos x}=4\cos x-\sec x$

$$\frac{\sin 3x}{\sin x\cos x}=\frac{\sin(x+2x)}{\sin x\cos x}$$
$$=\frac{\sin x\cos 2x+\cos x\sin 2x}{\sin x\cos x}$$
$$=\frac{\sin x\left(2\cos^2 x-1\right)+\cos x\left(2\sin x\cos x\right)}{\sin x\cos x}$$
$$=\frac{2\cos^2 x-1}{\cos x}+2\cos x$$
$$=\frac{2\cos^2 x}{\cos x}-\frac{1}{\cos x}+2\cos x$$
$$=2\cos x-\frac{1}{\cos x}+2\cos x$$
$$=4\cos x-\sec x$$

---

(2) $\dfrac{\sin 3x-\sin x}{\cos 3x+\cos x}=\tan x$

الحل:

$$\frac{\sin 3x-\sin x}{\cos 3x+\cos x}=\frac{2\cos\left(\frac{3x+x}{2}\right)\sin\left(\frac{3x-x}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{3x+x}{2}\right)\cos\left(\frac{3x-x}{2}\right)}$$
$$=\frac{2\cos 2x\sin x}{2\cos 2x\cos x}=\frac{\sin x}{\cos x}=\tan x$$

مثال 2: أثبت صحة كل متطابقة مما يأتي:

(a) $\dfrac{2\tan x}{1+\tan^2 x}=\sin 2x$

$$\frac{2\tan x}{1+\tan^2 x}=\frac{\frac{2\sin x}{\cos x}}{1+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}=\frac{\frac{2\sin x}{\cos x}}{\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x}+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}$$
$$=\frac{\frac{2\sin x}{\cos x}}{\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}}=\frac{\frac{2\sin x}{\cos x}}{\frac{1}{\cos^2 x}}$$
$$=\frac{\frac{2\sin x\cos x}{\cos^2 x}}{\frac{1}{\cos^2 x}}$$
$$=2\sin x\cos x=\sin 2x$$

(b) $\dfrac{\sin x+\sin y}{\cos x+\cos y}=\tan\left(\dfrac{x+y}{2}\right)$

$$\frac{\sin x+\sin y}{\cos x+\cos y}=\frac{2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)}$$
$$=\frac{\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)}$$
$$=\tan\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

أسئلة متنوعة

أجد قيمة كلٍّ من $\cos\frac{\theta}{2}$ و $\sin\frac{\theta}{2}$ و $\sin 2\theta$ و $\cos 2\theta$ للزاوية في الفترة المعطاة:

(1) $\sin\theta=\frac{5}{13}$, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$

$0<\theta<\frac{\pi}{2} \rightarrow \sin\theta>0 \ , \ \cos\theta>0$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

$\left(\frac{5}{13}\right)^2+\cos^2\theta=1 \rightarrow \frac{25}{169}+\cos^2\theta=1$

$\rightarrow \cos^2\theta=\frac{144}{169}$

$\rightarrow \cos\theta=\frac{12}{13}$

$\cos 2\theta=1-2\sin^2\theta=1-2\left(\frac{15}{169}\right)=\frac{119}{169}$

$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=2\left(\frac{5}{13}\right)\left(\frac{12}{13}\right)=\frac{120}{169}$

$\sin\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}=\sqrt{\frac{1-\frac{12}{13}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{26}}$

$\cos\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{12}{13}}{2}}=\frac{5}{\sqrt{26}}$

---

(2) $\cos\theta=-\frac{\sqrt{6}}{3}$, $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$

$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi \rightarrow \sin\theta>0 \ , \ \cos\theta<0$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

$\sin^2\theta+\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2=1 \rightarrow \sin^2\theta+\frac{6}{9}=1$

$\rightarrow \sin^2\theta=\frac{3}{9}$

$\rightarrow \sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1=2\left(\frac{6}{9}\right)-1=\frac{1}{3}$

$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\sin\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{6}}{3}}{2}}=\sqrt{\frac{3+\sqrt{6}}{6}}$

$\cos\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}=\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{6}}{3}}{2}}=\sqrt{\frac{3-\sqrt{6}}{6}}$

(3) $\tan\theta=\frac{1}{2}$, $\pi<\theta<\frac{3\pi}{2}$

الحل:

$\pi<\theta<\frac{3\pi}{2} \rightarrow \sin\theta<0 \ , \ \cos\theta<0$

$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta} \rightarrow \frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{1}{2} \rightarrow \cos\theta=2\sin\theta$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

$\sin^2\theta+4\sin^2\theta=1 \rightarrow 5\sin^2\theta=1$

$\rightarrow \sin^2\theta=\frac{1}{5} \rightarrow \sin\theta=-\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta} \rightarrow \frac{1}{2}=\frac{-\frac{1}{\sqrt{5}}}{\cos\theta} \rightarrow \cos\theta=-\frac{2}{\sqrt{5}}$

$\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1=2\left(\frac{4}{5}\right)-1=\frac{3}{5}$

$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=2\left(\frac{-1}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{-2}{\sqrt{5}}\right)=\frac{4}{5}$

$\sin\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{2}{\sqrt{5}}}{2}}=\sqrt{\frac{2+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}}$

$\cos\frac{\theta}{2}=-\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}=-\sqrt{\frac{1-\frac{2}{\sqrt{5}}}{2}}=-\sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{2\sqrt{5}}}$

---

(4) $\csc\theta=-\sqrt{5}$, $\cos\theta<0$

الحل:

$\csc\theta=-\sqrt{5} \rightarrow \sin\theta=-\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

$\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2+\cos^2\theta=1 \rightarrow \cos^2\theta=\frac{4}{5}$

$\rightarrow \cos\theta=-\frac{2}{\sqrt{5}}$

$\cos 2\theta=1-2\sin^2\theta=1-2\left(\frac{1}{5}\right)=\frac{3}{5}$

$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=2\left(\frac{-1}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{-2}{\sqrt{5}}\right)=\frac{4}{5}$

$\sin\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{2}{\sqrt{5}}}{2}}=\sqrt{\frac{2+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}}$

$\cos\frac{\theta}{2}=-\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}=-\sqrt{\frac{1-\frac{2}{\sqrt{5}}}{2}}=-\sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{2\sqrt{5}}}$

(5) $\cot\theta = \frac{2}{3}$, $\sin\theta > 0$

$\cot\theta = \frac{2}{3} \rightarrow \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{2}{3} \rightarrow \cos\theta = \frac{2}{3}\sin\theta$

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$\sin^2\theta + \frac{4}{9}\sin^2\theta = 1 \rightarrow \frac{13}{9}\sin^2\theta = 1$

$\rightarrow \sin^2\theta = \frac{9}{13}$

$\rightarrow \sin\theta = \frac{3}{\sqrt{13}}$

$\cos\theta = \frac{2}{3}\sin\theta = \frac{2}{3}\left(\frac{3}{\sqrt{13}}\right) = \frac{2}{\sqrt{13}}$

$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 2\left(\frac{4}{13}\right) - 1 = -\frac{5}{13}$

$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = 2\left(\frac{3}{\sqrt{13}}\right)\left(\frac{2}{\sqrt{13}}\right) = \frac{12}{13}$

$\sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{2}{\sqrt{13}}}{2}} = \sqrt{\frac{\sqrt{13}-2}{2\sqrt{13}}}$

$\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{2}{\sqrt{13}}}{2}} = \sqrt{\frac{\sqrt{13}+2}{2\sqrt{13}}}$

---

(6) $\sec\theta = 3$, $\sin\theta > 0$

$\sec\theta = 3 \rightarrow \frac{1}{\cos\theta} = 3 \rightarrow \cos\theta = \frac{1}{3}$

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$\sin^2\theta + \frac{1}{9} = 1 \rightarrow \sin^2\theta = \frac{8}{9}$

$\rightarrow \sin\theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 2\left(\frac{1}{9}\right) - 1 = -\frac{7}{9}$

$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = 2\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{4\sqrt{2}}{9}$

$\sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{1}{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$

$\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{1}{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{6}}$

أستعمل المتطابقات المثلثية لتقليص القوّة في كتابة المقادير الآتية بدلالة القوّة الأولى لجيب التمام :

(7) $\sin^4 x$

$\sin^4 x = (\sin^2 x)^2$

$= \left(\frac{1}{2}(1-\cos 2x)\right)^2$

$= \frac{1}{4}(1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x)$

$= \frac{1}{4}\left(1 - 2\cos 2x + \frac{1}{2}(1+\cos 4x)\right)$

$= \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x$

---

(8) $\cos^4 x$

الحل :

$\cos^4 x = (\cos^2 x)^2$

$= \left(\frac{1}{2}(1+\cos 2x)\right)^2$

$= \frac{1}{4}(1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x)$

$= \frac{1}{4}\left(1 + 2\cos 2x + \frac{1}{2}(1+\cos 4x)\right)$

$= \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x$

---

(9) $\cos^4 x \sin^2 x$

$\cos^4 x \sin^2 x = (\cos^2 x)^2 \sin^2 x$

$= \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)$

$= \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)$

$= \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)\left(\frac{1-\cos^2 2x}{4}\right)$

$= \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)\left(\frac{1}{4} - \frac{\cos^2 2x}{4}\right)$

$= \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)\left(\frac{1}{4} - \frac{1+\cos 4x}{8}\right)$

$= \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)\left(\frac{1-\cos 4x}{8}\right)$

$= \frac{1}{16}(1 + \cos 2x - \cos 4x - \cos 2x + \cos 4x)$

$= \frac{1}{16}(1 + \cos 2x - \cos 4x - \frac{1}{2}(\cos 2x + \cos 6x)$

$= \frac{1}{16} - \frac{1}{32}\cos 2x - \frac{1}{16}\cos 4x - \frac{1}{32}\cos 6x$

أجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي من دون استعمال الآلة الحاسبة :

(10) $\cos 22.5^\circ$

الحل :

$$\cos 22.5^\circ = \cos\frac{45^\circ}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos 45^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{2}} = \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}}$$

---

(11) $\sin 195^\circ$

الحل :

$$\sin 195^\circ = -\cos(195^\circ - 180^\circ) = -\sin 15^\circ = -\sin\frac{30^\circ}{2} = -\sqrt{\frac{1-\cos 30^\circ}{2}} = -\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = -\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}$$

---

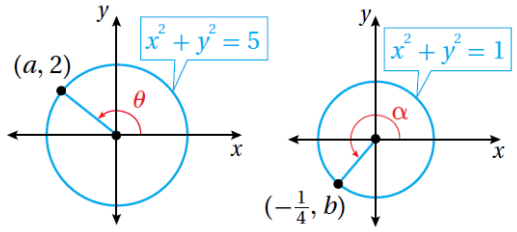
(12) $\tan\frac{7\pi}{8}$

الحل :

$$\tan\frac{7\pi}{8} = -\tan\left(\frac{\pi}{8}\right) = -\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{1+\cos\frac{\pi}{4}}} = -\sqrt{\frac{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}} = -\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}} = 1-\sqrt{2}$$

أستعمل الشكل المجاور لإيجاد قيمة كلٍّ من الاقترانات الآتية، علمًا بأنَّ :

$f(x) = \sin x \quad , \quad g(x) = \cos x \quad , \quad h(x) = \tan x$



(13) $g(2\theta)$

الحل :

$a^2 + 4 = 5 \quad \rightarrow \quad a = -1$ (لأن النقطة في الربع الثاني)

$\left(-\frac{1}{4}\right)^2 + b^2 = 1 \quad \rightarrow \quad b$

$= -\frac{\sqrt{15}}{4}$ لأن النقطة في الربع الثالث

$\sin\alpha = -\frac{\sqrt{15}}{4} \quad , \quad \cos\alpha = -\frac{1}{4} \quad , \quad \tan\alpha = \sqrt{15}$

$\sin\theta = \frac{2}{5} \quad , \quad \cos\theta = \frac{-1}{5} \quad , \quad \tan\theta = -2$

$g(2\theta) = \cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$

$= 2\left(\frac{1}{25}\right) - 1 = -\frac{23}{25}$

---

(14) $g\left(\frac{\theta}{2}\right)$

الحل :

$$g\left(\frac{\theta}{2}\right) = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{1}{5}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{10}}$$

(15) $f(2\alpha)$

الحل :

$$f(2\alpha) = \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2\left(\frac{-\sqrt{15}}{4}\right)\left(\frac{-1}{4}\right) = \frac{\sqrt{15}}{8}$$

---

(16) $h\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

$$h\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \tan\frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}} = -\sqrt{\frac{1+\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}}} = -\sqrt{\frac{5}{3}}$$

أُعيد كتابة كل مقدار ممّا يأتي في صورة مجموع أو فرق :

(17) $\sin 2x \cos 3x$

الحل :

$$\sin 2x \cos 3x = \frac{1}{2}(\sin(2x-3x)+\sin(2x+3x))$$
$$= \frac{1}{2}(\sin(-x)+\sin 5x)$$
$$= \frac{1}{2}(-\sin x+\sin 5x)$$
$$= \frac{1}{2}(\sin 5x-\sin x)$$

---

(18) $\sin x \sin 5x$

الحل :

$$\sin x \sin 5x = \frac{1}{2}(\cos(x-5x)+\cos(x+5x))$$
$$= \frac{1}{2}(\cos(-4x)+\cos(6x))$$
$$= \frac{1}{2}(\cos 4x+\cos 6x)$$

---

(19) $3\cos 4x \cos 7x$

الحل :

$$= \frac{3}{2}(\cos(4x-7x)+\cos(4x+7x))$$
$$= \frac{3}{2}(\cos(-3x)+\cos 11x)$$
$$= \frac{3}{2}(\cos 3x+\cos 11x)$$

أُعيد كتابة كل مقدار ممّا يأتي في صورة ضرب :

(20) $\sin x - \sin 4x$

$$\sin x - \sin 4x = 2\cos\left(\frac{x+4x}{2}\right)\sin\left(\frac{x-4x}{2}\right)$$
$$= 2\cos\frac{5x}{2}\sin\left(\frac{-3x}{2}\right)$$
$$= -2\cos\frac{5x}{2}\sin\frac{3x}{2}$$

---

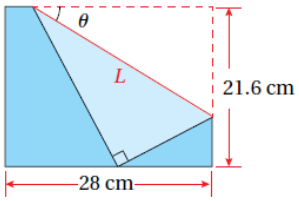
(21) $\cos 9x - \cos 2x$

$$= -2\sin\left(\frac{9x+2x}{2}\right)\sin\left(\frac{9x-2x}{2}\right)$$
$$= -2\sin\left(\frac{11x}{2}\right)\sin\left(\frac{7x}{2}\right)$$
$$= -2\cos\frac{11x}{2}\sin\frac{7x}{2}$$

(22) $\sin 3x + \sin 4x$

$$\sin 3x + \sin 4x = 2\cos\left(\frac{3x+4x}{2}\right)\sin\left(\frac{3x-4x}{2}\right)$$
$$= 2\sin\frac{7x}{2}\cos\left(\frac{-x}{2}\right)$$
$$= 2\sin\frac{7x}{2}\cos\frac{x}{2}$$

الأوريغامي: يقوم فن الأوريغامي (فن طيّ الورق) الياباني على طيّ قطعة واحدة من الورق بصورة مُتكرِّرة لصنع أشكال فنية. فعند طيّ الجزء الأيمن إلى الأسفل من ورقة مستطيلة، بُعداها: 21.6 cm و 28 cm، كما في الشكل المجاور، فإنَّ طول خطّ الطيّ L يرتبط بالزاوية θ عن طريق العلاقة:



$$L = \frac{10.8}{\sin\theta\cos^2\theta}$$

(23) أُثبِت أنَّ علاقة طول خطّ الطيّ تُكافِئ العلاقة :

$$L = \frac{21.6\sec\theta}{\sin 2\theta}$$

$$L = \frac{10.8}{\sin\theta\cos^2\theta} = \frac{2}{2}\times\frac{10.8}{\sin\theta\cos\theta}\times\frac{1}{\cos\theta}$$
$$= \frac{21.6}{\sin 2\theta}\times\sec x$$
$$= \frac{21.6\sec\theta}{\sin 2\theta}$$

---

(24) أجد طول خطّ الطيّ L إذا كانت $\theta = 30^\circ$.

$$L = \frac{10.8}{\sin 30^\circ\cos^2 30^\circ} = 28.8\text{ cm}$$

أُثبِت صِحَّة كلٍّ من المتطابقات الآتية :

(25) $\cos^2 5x - \sin^2 5x = \cos 10x$

$$\cos 10x = \cos 2(5x) = \cos^2 5x - \sin^2 5x$$

---

(26) $\cos x = \frac{1}{2}(\sin x \sin 2x + 2\cos^3 x)$

$$\frac{1}{2}(\sin x \sin 2x + 2\cos^3 x)$$
$$= \frac{1}{2}(2\sin^2 x\cos x + 2\cos^3 x)$$
$$= \frac{1}{2}\times 2\cos x(\sin^2 x+\cos^2 x)$$
$$= \cos x$$

(27) $\cos 2x + 2\cos x + 1 = 2\cos x\,(\cos x + 1)$

الحل:

$$\begin{aligned}\cos 2x + 2\cos x + 1 &= 2\cos^2 x - 1 + 2\cos x + 1\\ &= 2\cos^2 x + 2\cos x\\ &= 2\cos x\,(\cos x + 1)\end{aligned}$$

---

(28) $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$

الحل:

$$\begin{aligned}\sin 3x &= \sin(2x + x)\\ &= \sin 2x\cos x + \cos 2x\sin x\\ &= 2\sin x\cos^2 x + (1 - 2\sin^2 x)\sin x\\ &= 2\sin x\cos^2 x + \sin x - 2\sin^3 x\\ &= 2\sin x\,(1 - \sin^2 x) + \sin x - 2\sin^3 x\\ &= 2\sin x - 2\sin^3 x + \sin x - 2\sin^3 x\\ &= 3\sin x - 4\sin^3 x\end{aligned}$$

---

(29) $\tan 3x = \dfrac{3\tan x - \tan^3 x}{1 - 3\tan^2 x}$

الحل:

$$\begin{aligned}\tan 3x &= \tan(2x + x)\\ &= \frac{\tan 2x + \tan x}{1 - \tan 2x\tan x} = \frac{\dfrac{2\tan x}{1 - \tan^2 x} + \tan x}{1 - \dfrac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}\tan x}\\ &= \frac{2\tan x + \tan x - \tan^3 x}{1 - \tan^2 x - 2\tan^2 x}\\ &= \frac{3\tan x - \tan^3 x}{1 - 3\tan^2 x}\end{aligned}$$

---

(30) $\sin x = 4\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{4}\sin\dfrac{x}{4}$

الحل:

$$\begin{aligned}\sin x &= 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\left(2\sin\frac{x}{4}\cos\frac{x}{4}\right)\cos\frac{x}{2}\\ &= 4\sin\frac{x}{4}\cos\frac{x}{4}\cos\frac{x}{2}\end{aligned}$$

---

(31) $\dfrac{\cos 2x}{\cos^2 x} + \tan^2 x = 1$

الحل:

$$\begin{aligned}\frac{\cos 2x}{\cos^2 x} + \tan^2 x &= \frac{2\cos^2 x - 1}{\cos^2 x} + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\\ &= \frac{\cos^2 x + \cos^2 x - 1 + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1\end{aligned}$$

---

(32) $\cos^2 2x = 4\cos^4 x - 4\cos^2 x + 1$

$$\begin{aligned}\cos^2 2x &= (\cos 2x)^2 = (2\cos^2 x - 1)^2\\ &= 4\cos^4 x - 4\cos^2 x + 1\end{aligned}$$

---

(33) $\dfrac{2(\tan x - \cot x)}{\tan^2 x - \cot^2 x} = \sin 2x$

الحل:

$$\begin{aligned}\frac{2(\tan x - \cot x)}{\tan^2 x - \cot^2 x} &= \frac{2(\tan x - \cot x)}{(\tan x - \cot x)(\tan x + \cot x)}\\ &= \frac{2}{\dfrac{\sin x}{\cos x} + \dfrac{\cos x}{\sin x}}\\ &= \frac{2\sin x\cos x}{\sin^2 x + \cos^2 x} = \sin 2x\end{aligned}$$

---

(34) $\tan^2\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1 + \sin x}{1 - \sin x}$

الحل:

$$\begin{aligned}\tan^2\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) &= \tan^2\left(\frac{1}{2}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right)\\ &= \frac{1 - \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}{1 + \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}\\ &= \frac{1 - \left(\cos x\cos\frac{\pi}{2} - \sin x\sin\frac{\pi}{2}\right)}{1 + \left(\cos x\cos\frac{\pi}{2} - \sin x\sin\frac{\pi}{2}\right)}\\ &= \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}\end{aligned}$$

---

(35) $\cot^2\dfrac{x}{2} = \dfrac{\sec x + 1}{\sec x - 1}$

الحل:

$$\cot^2\frac{x}{2} = \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x} = \frac{\dfrac{1}{\cos x} + \dfrac{\cos x}{\cos x}}{\dfrac{1}{\cos x} - \dfrac{\cos x}{\cos x}} = \frac{\sec x + 1}{\sec x - 1}$$

---

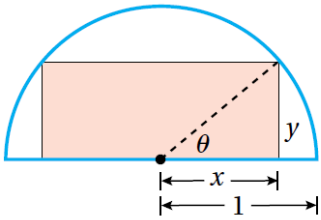
(36) $\ln|\sin x| = \dfrac{1}{2}(\ln|1 - \cos 2x| - \ln 2)$

الحل:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(\ln|1 - \cos 2x| - \ln 2) &= \frac{1}{2}\ln\frac{|1 - \cos 2x|}{2}\\ &= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1 - \cos 2x}{2}\right|\\ &= \frac{1}{2}\ln|\sin^2 x|\\ &= \ln|\sin x|\end{aligned}$$

مهارات التفكير العليا

تبرير: يُبيِّن الشكل المجاور مستطيلا مرسومًا في نصف دائرة، طول نصف قُطرها وحدة واحدة:



(37) أُعبِّر باقترانٍ بدلالة الزاوية θ عن المساحة A للمستطيل المُوضَّح في الشكل المجاور، ثمَّ أُبرِّر إجابتي .

الحل :

$$\sin\theta = \frac{y}{1} = y \quad , \quad \cos\theta = \frac{x}{1} = x$$
$$A = 2xy = 2\sin\theta\cos\theta$$

---

(38) أُثبِت أنَّ $A(\theta) = \sin 2\theta$ ، ثمَّ أُبرِّر إجابتي .

$$A = 2xy = 2\sin\theta\cos\theta = \sin 2\theta$$

تحدَّ: أُثبِت صِحَّة كلٍّ ممّا يأتي :

(39) $\cos 4x = 1 - 8\sin^2 x\cos^2 x$

$$\cos 4x = 1 - 2\sin^2 2x$$
$$= 1 - 2(2\sin x\cos x)^2$$
$$= 1 - 8\sin^2 x\cos^2 x$$

---

(40) $\cos^4 x = \frac{1}{8}(3 + \cos 4x + 4\cos 2x)$

الحل :

$$\cos^4 x = (\cos^2 x)^2 = \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2$$
$$= \frac{1}{4}(1+\cos 2x)^2$$
$$= \frac{1}{4}(1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x)$$
$$= \frac{1}{4}\left(1 + 2\cos 2x + \frac{1+\cos 4x}{2}\right)$$
$$= \frac{1}{4}\left(1 + 2\cos 2x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 4x\right)$$
$$= \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2} + 2\cos 2x + \frac{1}{2}\cos 4x\right)$$
$$= \frac{1}{8}(3 + 4\cos 2x + \cos 4x)$$

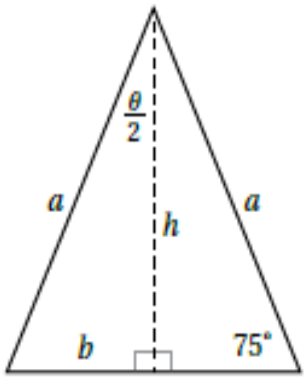
أُبسِّط كُلًّا من العبارات المثلثية الآتية باستعمال المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية، أو المتطابقات المثلثية لنصف الزاوية:

1. $2 \sin 3x \cos 3x$
2. $\dfrac{2 \tan 7x}{1 - \tan^2 7x}$
3. $\dfrac{1 - \cos 4x}{\sin 4x}$

أجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي من دون استعمال الآلة الحاسبة:

4. $\dfrac{2 \tan 15^\circ}{1 - \tan^2 15^\circ}$
5. $\sin\left(\dfrac{\pi}{8}\right) \cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$
6. $\cos^2 37.5^\circ - \sin^2 37.5^\circ$
7. $\sin 75^\circ$
8. $\cos\left(\dfrac{23\pi}{12}\right)$
9. $\tan 202.5^\circ$
10. $2 \sin 52.5^\circ \sin 97.5^\circ$
11. $\sin 75^\circ \sin 15^\circ$
12. $\cos 37.5^\circ \sin 7.5^\circ$

يُبيِّن الشكل المجاور مثلثًا متطابق الضلعين، طول كلٍّ منهما a:



13. أكتب قاعدة لمساحة المثلث بدلالة الضلع a.
14. أجد مساحة المثلث إذا كان طول الضلع a هو 7 cm

أُثبِت صِحَّة كلٍّ من المتطابقات الآتية:

15. $\cos^4 2x - \sin^4 2x = 1 - 2\sin^2 2x$
16. $\csc 2x = \dfrac{1}{2} \csc x \sec x$
17. $\cos\theta = \dfrac{1 - \tan^2 \frac{\theta}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\theta}{2}}$
18. $\dfrac{\cot\theta - \tan\theta}{\cot\theta + \tan\theta} = \cos 2\theta$
19. $\dfrac{\sin 10x}{\sin 9x + \sin x} = \dfrac{\cos 5x}{\cos 4x}$
20. $\dfrac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x} - \dfrac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} = 2 \tan 2x$

الدرس الثالث : حل المعادلات المثلثية

Solving Trigonometric Equations

1. حل المعادلات المثلثية الأساسية.

المعادلة المثلثية الأساسية هي معادلة في صورة $T(\theta) = c$ ، حيث: $T(\theta)$ اقتران مثلثي، و c ثابت. لحلّ أيّ معادلة مثلثية، يجب تبسيطها بحيث تصبح معادلة مثلثية أساسية؛ لذا من المُهِمّ أوّلًا إتقان حلّ المعادلات المثلثية الأساسية.

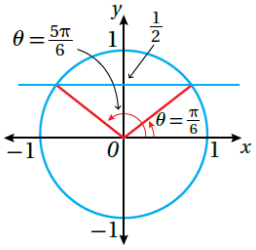
مثال 1 : أحل كل معادلة مما يأتي :

$$(1)\quad \sin x = \frac{1}{2}$$

الحل :

الخطوة 1 : أجد الحلّ ضمن دورة واحدة .

بما أنَّ طول دورة اقتران الجيب هو 2π ، فإنّني أبدأ أوّلًا بإيجاد حلّ المعادلة ضمن الفترة $[0, 2\pi)$.وبالرجوع إلى دائرة الوحدة، أجد أنَّ $\sin x = \frac{1}{2}$ في الربعين: الأوّل، والثاني، حيث يكون اقتران الجيب موجباً .



إذن، يوجد حلّان للمعادلة في الفترة $[0, 2\pi)$ ، هما:

$$x = \frac{\pi}{6} \quad , \quad x = \frac{5\pi}{6}$$

أتعلّم : لإيجاد الحلّ الواقع في الربع الثاني، أطرح الزاوية المرجعية $\frac{\pi}{6}$ من π :

$$\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$$

الخطوة 2 : أجد جميع حلول المعادلة.

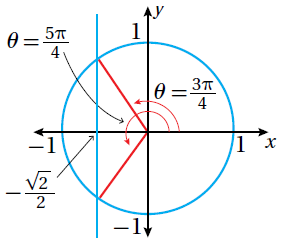
بما أنَّ قِيَم اقتران الجيب تتكرَّر كل 2π وحدة، فإنّني أجد جميع حلول المعادلة بإضافة مضاعفات العدد 2π الصحيحة إلى كلٍّ من الحلَّيْنِ السابقيْنِ على النحو الآتي :

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad , \quad x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

$$(2)\quad \cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

الخطوة 1 : أجد الحلّ ضمن دورة واحدة .

بما أنَّ طول دورة اقتران جيب التمام هو 2π ، فإنّني أبدأ أولاً بإيجاد حلّ المعادلة ضمن الفترة $[0, 2\pi)$.وبالرجوع إلى دائرة الوحدة، أجد أنَّ $\cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ في الربعين: الثاني، والثالث، حيث يكون اقتران جيب التمام سالباً .



إذن، يوجد حلّان للمعادلة في الفترة $[0, 2\pi)$ ، هما:

$$x = \frac{3\pi}{4} \quad , \quad x = \frac{5\pi}{4}$$

أتعلّم : لإيجاد الحلّ الواقع في الربع الثاني، أطرح الزاوية المرجعية $\frac{\pi}{4}$ من π :

$$\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

لإيجاد الحلّ الواقع في الربع الثالث، أضيف الزاوية المرجعية $\frac{\pi}{4}$ الى π

$$\pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$$

الخطوة 2 : أجد جميع حلول المعادلة.

بما أنَّ قِيَم اقتران جيب التمام تتكرَّر كل 2π وحدة، فإنّني أجد جميع حلول المعادلة بإضافة مضاعفات العدد 2π الصحيحة إلى كلٍّ من الحلَّيْنِ السابقيْنِ على النحو الآتي :

$$x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \quad , \quad x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$$

مثال 2 : أحل كل معادلة مما يأتي :

$$(a)\quad \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \quad , \quad x = \frac{7\pi}{3} + 2k\pi$$

$$(b)\quad \cos x = \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad , \quad x = \frac{7\pi}{3} + 2k\pi$$

مثال 3 : أحُلُّ كُلًّا من المعادلات الآتية لقِيَم x جميعها:

(1) $2\sin x + 3 = 2$

الحل :

$2\sin x + 3 = 2 \quad \Rightarrow \quad \sin x = -\frac{1}{2}$

$x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \quad , \quad x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi \quad ,$ عدد صحيح k

---

(2) $1 - \cos x = \frac{1}{2}$

الحل :

$1 - \cos x = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \cos x = \frac{1}{2}$

$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad , \quad x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \quad ,$ عدد صحيح k

---

(3) $\sin x = -0.3$

الحل :

$x = 3.45 + 2k\pi \quad , \quad x = 5.98 + 2k\pi \quad ,$ عدد صحيح k

---

(4) $\cos x = 0.32$

الحل :

$x = 1.25 + 2k\pi \quad , \quad x = 5.04 + 2k\pi \quad ,$ عدد صحيح k

---

(5) $\tan x = 5$

الحل :

$x = 1.37 + k\pi \quad , \quad x = -1.37 + k\pi \quad ,$ عدد صحيح k

---

(6) $\sec^2 x - 2 = 0$

الحل :

$\sec^2 x - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \sec^2 x = 2$

$\Rightarrow \quad \sec x = \pm\sqrt{2}$

$\Rightarrow \quad \cos x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad , \quad x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$

$x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \quad , \quad x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \quad ,$ عدد صحيح k

---

(7) $\cot x + 1 = 0$

الحل :

$\cot x + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \cot x = -1$

$\Rightarrow \quad \tan x = -1$

$x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \quad ,$ عدد صحيح k

---

(8) $\csc^2 x - 4 = 0$

الحل :

$\csc^2 x - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \csc^2 x = 4$

$\Rightarrow \quad \csc x = \pm 2$

$\Rightarrow \quad \sin x = \pm\frac{1}{2}$

$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad , \quad x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$

$x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \quad , \quad x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi \quad ,$ عدد صحيح k

---

(9) $2\sqrt{2}\cos x + 2 = -1$

الحل :

$2\sqrt{2}\cos x + 2 = -1 \quad \Rightarrow \quad \cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \quad , \quad x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \quad ,$ عدد صحيح k

2. حل المعادلات المثلثية الأساسية (الزوايا غير معروفة).

تعلَّمْتُ في المثال السابق حلَّ معادلات مثلثية أساسية لنسب مثلثية ذات زوايا خاصة. ولكنْ، إذا لم تكن الزوايا معروفة، فيُمكِنني استعمال الآلة الحاسبة لإيجادها.

مثال 1 : أحل كل معادلة مما يأتي :

(1) $\cos x = 0.65$

الحل :

الخطوة 1 : أجد الزاوية المرجعية باستعمال الآلة الحاسبة.

$$\cos x = 0.65$$
$$x = \cos^{-1}(0.65)$$
$$\approx 0.86$$

أتذكَّر : لإيجاد قياس الزاوية، أضبط الآلة الحاسبة على نظام الراديان.

بما أنَّ طول دورة اقتران جيب التمام هو 2π ، فإنَّني أبدأ أوَّلًا بإيجاد حلِّ المعادلة ضمن الفترة $[0, 2\pi)$.وبالرجوع إلى دائرة الوحدة، أجد أنَّ $\cos x = 0.65$ في الربعين: الأوَّل، والرابع

إذن، يوجد حلّان للمعادلة في الفترة $[0, 2\pi)$ ، هما:

$$x \approx 0.86 \quad , \quad x \approx 5.42$$

أتعلَّم : لإيجاد الحلِّ الواقع في الربع الرابع، أطرح الزاوية المرجعية 0.86 من 2π :

$$2\pi - 0.86 \approx 5.42$$

الخطوة 2 : أجد جميع حلول المعادلة.

بما أنَّ قِيَم اقتران جيب التمام تتكرَّر كل 2π وحدة، فإنَّني أجد جميع حلول المعادلة بإضافة مضاعفات العدد 2π الصحيحة إلى كلٍّ من الحلَّيْنِ السابقيْنِ على النحو الآتي :

$$x \approx 0.86 + 2k\pi \quad , \quad x \approx 5.42 + 2k\pi$$

---

(2) $\tan x = -2$

الحل :

الخطوة 1 : أجد الزاوية المرجعية باستعمال الآلة الحاسبة.

$$\tan x = -2$$
$$x = \tan^{-1}(-2)$$
$$\approx -1.11$$

بما أنَّ طول دورة اقتران الظلِّ هو π ، فإنَّني أجد حلَّ المعادلة ضمن الفترة $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. للمعادلة حلٌّ وحيد ضمن هذه الفترة، هو: $x \approx -1.11$

أتذكَّر : أجد جميع حلول المعادلة.

بما أنَّ قِيَم اقتران الظلِّ تتكرَّر كل π وحدة، فإنَّني أجد جميع حلول المعادلة بإضافة مضاعفات العدد π الصحيحة إلى الحلِّ السابق على النحو الآتي:

$$x \approx -1.11 + k\pi$$

مثال 2 : أحل كل معادلة مما يأتي :

(a) $\sin x = 0.23$

الحل :

$$x \approx 0.23 + 2k\pi \quad , \quad x \approx 2.91 + 2k\pi$$

(b) $\tan x = -2$

الحل :

$$x \approx 1.67 + k\pi \quad , \quad x \approx -1.47 + k\pi$$

3. حلُّ معادلات مثلثية تحوي اقترانًا مثلثيًّا واحدًا

يُمكِن حلُّ معادلات مثلثية تحوي اقترانًا مثلثيًّا واحدًا عن طريق فصل هذا الاقتران في أحد طرفي المعادلة أوَّلًا، ثمَّ إيجاد حلِّ للمعادلة .

مثال 1 : أحل كل معادلة مما يأتي :

(1) $3\sin x - 2 = 5\sin x - 1$

الخطوة 1 : أفصل الاقتران المثلثي في أحد طرفي المعادلة.

$$3\sin x - 2 = 5\sin x - 1$$
$$-2\sin x - 2 = -1$$
$$-2\sin x = 1$$
$$\sin x = -\frac{1}{2}$$

الخطوة 2 : أجد الحلَّ ضمن دورة واحدة.

بما أنَّ طول دورة اقتران الجيب هو 2π ، فإنَّني أبدأ أوَّلًا بإيجاد حلِّ المعادلة ضمن الفترة $[0, 2\pi)$. وبالرجوع إلى دائرة الوحدة، أجد أنَّ $\sin x = -\frac{1}{2}$ في الربعين: الثالث، والرابع.

إذن، يوجد حلّان للمعادلة في الفترة $[0, 2\pi)$ ، هما:

$$x = \frac{7\pi}{6} \quad , \quad x = \frac{11\pi}{6}$$

أتعلَّم : لإيجاد الحلِّ الواقع في الربع الثالث، أضيف الزاوية المرجعية $\frac{\pi}{6}$ من π

$$\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$$

لإيجاد الحلِّ الواقع في الربع الرابع، أطرح الزاوية المرجعية $\frac{\pi}{6}$ من 2π

$$2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$$

الخطوة 3 : أجد جميع حلول المعادلة.

بما أنَّ قِيَم اقتران الجيب تتكرَّر كل 2π وحدة، فإنَّني أجد جميع حلول المعادلة بإضافة مضاعفات العدد 2π الصحيحة إلى كلٍّ من الحلَّيْنِ السابقيْنِ على النحو الآتي :

$$x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \quad , \quad x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi$$

---

(2) $\tan^2 x - 3 = 0$

الحل :

الخطوة 1 : أفصل الاقتران المثلثي في أحد طرفي المعادلة.

$$\tan^2 x - 3 = 0$$
$$\tan^2 x = 3$$
$$\tan x = \pm\sqrt{3}$$

الخطوة 2 : أجد الحلَّ ضمن دورة واحدة.

بما أنَّ طول دورة اقتران الظل هو π ، فإنَّني أجد حلَّ المعادلة ضمن الفترة $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

إذن، يوجد حلّان للمعادلة ضمن هذه الفترة ، هما:

$$x = \frac{\pi}{3} \quad , \quad x = -\frac{\pi}{3}$$

الخطوة 3 : أجد جميع حلول المعادلة.

بما أنَّ قِيَم اقتران الظل تتكرَّر كل π وحدة، فإنَّني أجد جميع حلول المعادلة بإضافة مضاعفات العدد 2π الصحيحة إلى كلٍّ من الحلَّيْنِ السابقيْنِ على النحو الآتي :

$$x = \frac{\pi}{3} + k\pi \quad , \quad x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

مثال 2 : أحل كل معادلة مما يأتي :

(a) $5\sin x = 3\sin x + \sqrt{3}$

الحل :

$$5\sin x = 3\sin x + \sqrt{3}$$
$$2\sin x = \sqrt{3}$$
$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad , \quad x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$$

(b) $2\cos^2 x - 1 = 0$

الحل :

$$2\cos^2 x - 1 = 0$$
$$2\cos^2 x = 1$$
$$\cos^2 x = \frac{1}{2}$$
$$\cos x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad , \quad x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$$
$$x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \quad , \quad x = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi$$

4. حلُّ المعادلات المثلثية بالتحليل.

يُمكِن حلُّ بعض المعادلات المثلثية باستعمال التحليل، مثل المعادلات التي في صورة معادلة تربيعية، والمعادلات التي تتطلَّب إخراج عامل مشترك .

مثال 1 : أحل كل معادلة مما يأتي في الفترة $[0, 2\pi)$:

(1) $2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$

الحل :

$2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$
$(2\sin x - 1)(\sin x - 1) = 0$
$2\sin x - 1 = 0 \quad or \quad \sin x - 1 = 0$
$\sin x = \frac{1}{2} \quad or \quad \sin x = 1$
$x = \frac{\pi}{6} \ , \ \frac{5\pi}{6} \quad or \quad x = \frac{\pi}{2}$

إذن، حلول المعادلة في الفترة $[0, 2\pi)$ هي :

$$x = \frac{\pi}{6} \ , \ x = \frac{5\pi}{6} \ , \ x = \frac{\pi}{2}$$

---

(2) $\cos x \sin x = 3\cos x$

الحل :

$\cos x \sin x = 3\cos x$
$\cos x \sin x - 3\cos x = 0$
$\cos x (\sin x - 3) = 0$
$\cos x = 0 \quad or \quad \sin x - 3 = 0$
$\cos x = 0 \quad or \quad \sin x = 3$
$x = \frac{\pi}{2} \ , \ \frac{3\pi}{2}$

لا يوجد حلول للمعادلة: $\sin x = 3$، لأن القيمة العظمى لاقتران $\sin x$ هي 1 .

إذن، يوجد حلان للمعادلة في الفترة $[0, 2\pi)$ هما :

$$x = \frac{\pi}{2} \ , \ x = \frac{3\pi}{2}$$

مثال 2 : أحل كل معادلة مما يأتي في الفترة $[0, 2\pi)$:

(a) $2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$

الحل :

$(2\sin x + 1)(\sin x - 1) = 0$
$2\sin x + 1 = 0 \quad or \quad \sin x - 1 = 0$
$\sin x = \frac{-1}{2} \quad or \quad \sin x = 1$
$x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \ , \ x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi \ , \ x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

(b) $\cos x \sin x = 2\sin x$
$\cos x \sin x = 2\sin x$
$\cos x \sin x - 2\sin x = 0$
$\sin x (\cos x - 2) = 0$
$\sin x = 0 \quad or \quad \cos x = 2$
$x = 2k\pi \quad , \quad x = \pi + 2k\pi$

أحُلُّ كُلًّا من المعادلات الآتية في الفترة $[0, 2\pi)$:

(1) $\cos^2 x - \sin^2 x + \sin x = 0$
$\cos^2 x - \sin^2 x + \sin x = 0$
$\Rightarrow 1 - \sin^2 x - \sin^2 x + \sin x = 0$
$\Rightarrow -2\sin^2 x + \sin x + 1 = 0$
$\Rightarrow \quad 2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$
$\Rightarrow \quad (2\sin x + 1)(\sin x - 1) = 0$
$\Rightarrow \quad \sin x = -\frac{1}{2} \ , \ 1$
$x = \frac{7\pi}{6} \quad , \quad x = \frac{11\pi}{6} \quad , \quad x = \frac{\pi}{2}$

---

(2) $3\sin^2 x - 7\sin x + 2 = 0$
$3\sin^2 x - 7\sin x + 2 = 0$
$\Rightarrow \quad (3\sin x + 1)(\sin x - 2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin x = \frac{1}{3}$
$x = 0.34 \quad , \quad x = 2.8$

---

(3) $2\cos^2 x + \cos x = 0$
$2\cos^2 x + \cos x = 0$
$\Rightarrow \quad \cos x (2\cos x + 1) = 0$
$\Rightarrow \quad \cos x = -\frac{1}{2} \ , \ 0$
$x = \frac{\pi}{2} \quad , \quad x = \frac{3\pi}{2} \quad , \quad x = \frac{2\pi}{3} \quad , \quad x = \frac{4\pi}{3}$

---

(4) $\tan^4 x - 13\tan^2 x + 36 = 0$
$\tan^4 x - 13\tan^2 x + 36 = 0$
$\Rightarrow \quad (\tan^2 x - 9)(\tan^2 x - 4) = 0$
$\Rightarrow \quad \tan^2 x = 4 \ , \ 9$
$\Rightarrow \quad \tan x = \pm 2 \ , \pm 3$
$x = 1.11 \ , \ x = 2.03 \ , \ x = 4.25 \ , \ x = 5.18$
$x = 1.25 \ , \ x = 1.89 \ , \ x = 4.39 \ , \ x = 5.03$

---

(5) $\sin x + 2\sin x \cos x = 0$
$\sin x + 2\sin x \cos x = 0$
$\Rightarrow \quad \sin x (1 + 2\cos x) = 0$
$\Rightarrow \quad \sin x = 0 \ , \ \sin x = -\frac{1}{2}$
$x = 0 \quad , \quad x = \pi \quad , \quad x = \frac{2\pi}{3} \quad , \quad x = \frac{4\pi}{3}$

5. حلُّ المعادلات المثلثية باستعمال المتطابقات المثلثية 1.

تحوي بعض المعادلات المثلثية اقترانًا مثلثيًا أو أكثر، ولكنْ يتعذَّر فصل هذه الاقترانات بالتحليل؛ لذا يُمكِن حلُّها باستعمال المتطابقات المثلثية، إضافةً إلى بعض العمليات الجبرية.

مثال 1 : أحل كل معادلة مما يأتي في الفترة $[0, 2\pi)$:

(1) $2\cos^2 x + 3\sin x = 0$

$2\cos^2 x + 3\sin x = 0$
$2(1 - \sin^2 x) + 3\sin x = 0$
$2 - 2\sin^2 x + 3\sin x = 0$
$2\sin^2 x - 3\sin x - 2 = 0$
$(2\sin x + 1)(\sin x - 2) = 0$
$2\sin x + 1 = 0 \quad or \quad \sin x - 2 = 0$
$\sin x = -\frac{1}{2} \quad or \quad \sin x = 2$
$x = \frac{7\pi}{6} \ , \ \frac{11\pi}{6}$

لا يوجد حلول للمعادلة: $\sin x = 2$، لأن القيمة العظمى لاقتران $\sin x$ هي 1 .

أتحقَّق :

للتحقُّق، أُعوِّض قيمتي x في المعادلة الأصلية .

عندما $x = \frac{7\pi}{6}$	عندما $x = \frac{11\pi}{6}$
$2\cos^2\left(\frac{7\pi}{6}\right) + 3\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) \stackrel{?}{=} 0$	$2\cos^2\left(\frac{11\pi}{6}\right) + 3\sin\left(\frac{11\pi}{6}\right) \stackrel{?}{=} 0$
$2\left(\frac{3}{4}\right) + 3\left(-\frac{1}{2}\right) \stackrel{?}{=} 0$	$2\left(\frac{3}{4}\right) + 3\left(-\frac{1}{2}\right) \stackrel{?}{=} 0$
$\frac{3}{2} + -\frac{3}{2} \stackrel{?}{=} 0$	$\frac{3}{2} + -\frac{3}{2} \stackrel{?}{=} 0$
$0 = 0$ ✓	$0 = 0$ ✓

إذن، يوجد حلان للمعادلة في الفترة $[0, 2\pi)$ هما :

$$x = \frac{7\pi}{6} \ , \ x = \frac{11\pi}{6}$$

---

(2) $\sin 2x - \cos x = 0$

الحل :

$\sin 2x - \cos x = 0$
$2\sin x\cos x - \cos x = 0$
$\cos x\,(2\sin x - 1) = 0$
$\cos x = 0 \quad or \quad 2\sin x - 1 = 0$
$\cos x = 0 \quad or \quad \sin x = \frac{1}{2}$
$x = \frac{\pi}{2} \ , \ \frac{3\pi}{2} \qquad x = \frac{\pi}{6} \ , \ \frac{5\pi}{6}$

أتحقَّق :

عندما $x = \frac{\pi}{6}$	عندما $x = \frac{5\pi}{6}$	عندما $x = \frac{\pi}{2}$	عندما $x = \frac{3\pi}{2}$
$\sin 2\left(\frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \stackrel{?}{=} 0$	$\sin 2\left(\frac{5\pi}{6}\right) - \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) \stackrel{?}{=} 0$	$\sin 2\left(\frac{\pi}{2}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \stackrel{?}{=} 0$	$\sin 2\left(\frac{3\pi}{2}\right) - \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) \stackrel{?}{=} 0$
$\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \stackrel{?}{=} 0$	$-\frac{\sqrt{3}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \stackrel{?}{=} 0$	$0 - 0 \stackrel{?}{=} 0$	$0 - 0 \stackrel{?}{=} 0$
$0 = 0$ ✓	$0 = 0$ ✓	$0 = 0$ ✓	$0 = 0$ ✓

إذن، حلول المعادلة في الفترة $[0, 2\pi)$ هي :

$$x = \frac{\pi}{6} \ , \ x = \frac{5\pi}{6} \ , \ x = \frac{\pi}{2} \ , \ x = \frac{3\pi}{2}$$

مثال 2 : أحل كل معادلة مما يأتي في الفترة $[0, 2\pi)$:

(a) $2\sin^2 x - 3\cos x = 0$

الحل :

$2\sin^2 x - 3\cos x = 0$
$2(1 - \cos^2 x) - 3\cos x = 0$
$-2\cos^2 x - 3\cos x + 2 = 0$
$2\cos^2 x + 3\cos x - 2 = 0$
$(2\cos x - 1)(\cos x + 2) = 0$
$2\cos x - 1 = 0 \quad or \quad \cos x + 2 = 0$
$\cos x = \frac{1}{2} \quad or \quad \cancel{\cos x = -2}$
$x = \frac{\pi}{6} \ , \ \frac{11\pi}{6}$

لا يوجد حلول للمعادلة: $\cos x = -2$، لأن القيمة العظمى لاقتران $\sin x$ هي 1 .

إذن، يوجد حلان للمعادلة في الفترة $[0, 2\pi)$ هما :

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad , \quad x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi$$

(b) $2\sin 2x - 3\sin x = 0$

الحل :

$2\sin 2x - 3\sin x = 0$
$2\sin x\cos x - 3\sin x = 0$
$\sin x\,(2\cos x - 3) = 0$
$\sin x = 0 \quad or \quad 2\cos x - 3 = 0$
$\sin x = 0 \quad or \quad \cos x = \frac{3}{2}$

لا يوجد حلول للمعادلة: $\cos x = \frac{3}{2}$، لأن القيمة العظمى لاقتران $\sin x$ هي 1 .

إذن، حلول المعادلة في الفترة $[0, 2\pi)$ هي :

$$x = 2k\pi \quad , \quad x = \pi + 2k\pi$$

مثال2 : أحُلُّ كُلًّا من المعادلات الآتية في الفترة $[0, 2\pi)$:

(1) $2\cos^2 x + \sin x = 1$

$2\cos^2 x + \sin x = 1$

$\Rightarrow \quad 2(1 - \sin^2 x) + \sin x = 1$

$\Rightarrow \quad 2 - 2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$

$\Rightarrow \quad -2\sin^2 x + \sin x + 1 = 0$

$\Rightarrow \quad 2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$

$\Rightarrow \quad (2\sin x + 1)(\sin x - 1) = 0$

$\Rightarrow \quad \sin x = -\frac{1}{2} \ , \ \sin x = 1$

$x = \frac{7\pi}{6} \quad , \quad x = \frac{11\pi}{6} \quad , \quad x = \frac{\pi}{2}$

---

(2) $\tan^2 x - 2\sec x = 2$

$\Rightarrow \quad \tan^2 x - 2\sec x - 2 = 0$

$\Rightarrow \quad \sec^2 x - 1 - 2\sec x - 2 = 0$

$\Rightarrow \quad \sec^2 x - 2\sec x - 3 = 0$

$\Rightarrow \quad (\sec x - 3)(\sec x + 1) = 0$

$\Rightarrow \quad \sec x = 3 \ , \ \sec x = -1$

$\Rightarrow \quad \cos x = \frac{1}{3} \ , \ \cos x = -1$

$x = \pi \quad , \quad x = 1.23 \quad , \quad x = 5.05$

---

(3) $\csc^2 x = \cot x + 3$

$\Rightarrow \quad \csc^2 x - \cot x - 3 = 0$

$\Rightarrow \quad \cot^2 x + 1 - \cot x - 3 = 0$

$\Rightarrow \quad \cot^2 x - \cot x - 2 = 0$

$\Rightarrow \quad (\cot x - 2)(\cot x + 1) = 0$

$\Rightarrow \quad \cot x = 2 \ , \ \cot x = -1$

$\Rightarrow \quad \tan x = \frac{1}{2} \ , \ \tan x = -1$

$x = 0.46 \quad , \quad x = 3.61 \quad , \quad x = \frac{3\pi}{4} \ , \ x = \frac{7\pi}{4}$

---

(4) $\sin 2x = 3\cos 2x$

$\Rightarrow \quad \tan 2x = 3$

$\Rightarrow \ 2x = 1.25 \ , \ 2x = 4.39 \ , \ 2x = 7.53 \ , \ 2x = 10.67$

$x = 0.62 \quad , \quad x = 2.2 \quad , \quad x = 3.77 \ , \ x = 5.34$

---

(5) $4\sin x\cos x + 2\sin x - 2\cos x - 1 = 0$

$\Rightarrow \quad 2\sin x(2\cos x + 1) - (2\cos x + 1) = 0$

$\Rightarrow \quad (2\sin x - 1)(2\cos x + 1) = 0$

$\Rightarrow \quad \sin x = \frac{1}{2} \ , \ \cos x = -\frac{1}{2}$

$x = \frac{\pi}{6} \quad , \quad x = \frac{5\pi}{6} \quad , \quad x = \frac{2\pi}{3} \ , \ x = \frac{4\pi}{3}$

6. حلُّ المعادلات المثلثية باستعمال المتطابقات المثلثية 2.

يتطلَّب حلُّ بعض المعادلات المثلثية تربيع طرفي المعادلة أوَّلًا، ثمَّ استعمال المتطابقات . وقد لا يُحقِّق الناتج المعادلة الأصلية؛ لذا يجب التحقُّق من صِحَّة الحلِّ.

مثال1 : أحل المعادلة: $\cos x + 1 = \sin x$ في الفترة $[0, 2\pi)$.

الحل:

$\cos x + 1 = \sin x$

$\cos^2 x + 2\cos x + 1 = \sin^2 x$

$\cos^2 x + 2\cos x + 1 = 1 - \cos^2 x$

$2\cos^2 x + 2\cos x = 0$

$2\cos x(\cos x + 1) = 0$

$2\cos x = 0 \quad or \quad \cos x + 1 = 0$

$\cos x = 0 \quad or \quad \cos x = -1$

$x = \frac{\pi}{2} \ , \ \frac{3\pi}{2} \quad x = \pi$

أتحقَّق:

للتحقُّق، أُعوِّض قِيَم x في المعادلة الأصلية.

عندما $x = \frac{3\pi}{2}$	عندما $x = \frac{\pi}{2}$	عندما $x = \pi$
$\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + 1 \stackrel{?}{=} \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)$	$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + 1 \stackrel{?}{=} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$	$\cos(\pi) + 1 \stackrel{?}{=} \sin(\pi)$
$0 + 1 \stackrel{?}{=} -1$	$0 + 1 \stackrel{?}{=} 1$	$-1 + 1 \stackrel{?}{=} 0$
$1 \neq -1$ ✗	$1 = 1$ ✓	$0 = 0$ ✓

إذن، يوجد حلان للمعادلة في الفترة $[0, 2\pi)$ هما :

$$x = \frac{\pi}{2} \ , \ x = \pi$$

أتذكَّر: الحلُّ الدخيل هو حلٌّ لا يُحقِّق المعادلة الأصلية.

مثال2 : أحل المعادلة: $\cos x - \sin x = 1$ في الفترة $[0, 2\pi)$.

الحل:

$\cos x - \sin x = 1$

$(\cos x - \sin x)^2 = 1$

$\cos^2 x + 2\sin x\cos x + \sin^2 x = 1$

$1 - 2\sin x\cos x = 1$

$-2\sin x\cos x = 0$

$\sin x = 0 \quad or \quad \cos x = 0$

إذن، يوجد حلان للمعادلة في الفترة $[0, 2\pi)$ هما :

$$x = 0 \ , \ x = \frac{3\pi}{2}$$

بقية الحلول لا تحقق المعادلة الأصلية .

7. حلُّ معادلات مثلثية تحوي اقترانات لضعف الزاوية.

يُمكِن حلُّ معادلة مثلثية تحوي اقترانًا مثلثيًّا لضعف الزاوية، بحلّ المعادلة لإيجاد قيمة النسبة المثلثية لضعف الزاوية أوَّلًا، ثمَّ إجراء عملية القسمة لإيجاد قياس الزاوية .

مثال 1 : أحل المعادلة: $\cos x \sin x = -\frac{1}{2}$ في الفترة $[0, 2\pi)$.

$$\cos x \sin x = -\frac{1}{2}$$
$$2 \cos x \sin x = -1$$
$$\sin 2x = -1$$

بما أنَّ الحلَّ الوحيد للمعادلة $\sin x = -1$ في الفترة $[0, 2\pi)$ هو $\frac{3\pi}{2}$، فإن $2x = \frac{3\pi}{2}$.

ومنه، فإنَّ جميع حلول المعادلة $\sin 2x = -1$ تُكتَب في صورة :

$$2x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \quad \rightarrow \quad x = \frac{3\pi}{4} + k\pi$$

يُمكِن إيجاد حلول المعادلة $\sin 2x = -1$ في الفترة $[0, 2\pi)$ على النحو الآتي :

$$x = \frac{3\pi}{4} + (0)\pi = \frac{3\pi}{4}$$
$$x = \frac{3\pi}{4} + (1)\pi = \frac{3\pi}{4} + \pi = \frac{7\pi}{4}$$
$$x = \frac{3\pi}{4} + (2)\pi = \frac{3\pi}{4} + 2\pi = \frac{11\pi}{4}$$

إذن، يوجد حلان للمعادلة في الفترة $[0, 2\pi)$ هما :

$$x = \frac{3\pi}{4} \ , \ x = \frac{7\pi}{4}$$

مثال 2 : أحل المعادلة: $2 \cos 2x = 1$ في الفترة $[0, 2\pi)$.

$$2 \cos 2x = 1 \quad \rightarrow \quad \cos 2x = \frac{1}{2}$$
$$2x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad , \quad 2x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$$
$$x = \frac{\pi}{6} + k\pi \quad , \quad x = \frac{5\pi}{6} + k\pi$$
$$x = \frac{\pi}{6} + (0)\pi = \frac{\pi}{6}$$
$$x = \frac{\pi}{6} + (1)\pi = \frac{\pi}{6} + \pi = \frac{7\pi}{6}$$
$$x = \frac{5\pi}{6} + (0)\pi = \frac{5\pi}{6}$$
$$x = \frac{5\pi}{6} + (1)\pi = \frac{5\pi}{6} + \pi = \frac{11\pi}{6}$$

إذن، حلول المعادلة في الفترة $[0, 2\pi)$ هما :

$$x = \frac{\pi}{6} \ , \ x = \frac{5\pi}{6} \ , \ x = \frac{7\pi}{6} \ , \ x = \frac{11\pi}{6}$$

مثال 3 : أحُلُّ كُلًّا من المعادلات الآتية في الفترة $[0, 2\pi)$:

(1) $\sin 2x + \cos x = 0$

الحل :

$$\Rightarrow 2 \sin x \cos x + \cos x = 0$$
$$\Rightarrow \cos x (2 \sin x + 1) = 0$$
$$\Rightarrow \cos x = 0 \quad , \quad \sin x = -\frac{1}{2}$$
$$x = \frac{\pi}{2} \ , \ x = \frac{3\pi}{2} \ , \ x = \frac{7\pi}{6} \ , \ x = \frac{11\pi}{6}$$

---

(2) $2 \sin^2 x = 2 + \cos 2x$

الحل :

$$\Rightarrow 2 \sin^2 x = 2 + 1 - 2 \sin^2 x$$
$$\Rightarrow 4 \sin^2 x - 3 = 0$$
$$\Rightarrow \sin^2 x = \frac{3}{4}$$
$$\Rightarrow \sin x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$x = \frac{\pi}{6} \ , \ x = \frac{5\pi}{6} \ , \ x = \frac{7\pi}{6} \ , \ x = \frac{11\pi}{6}$$

---

(3) $\sin x - \sqrt{3} \cos x = 0$

الحل :

$$\Rightarrow \sin x = \sqrt{3} \cos x$$
$$\Rightarrow \tan x = \sqrt{3}$$
$$x = \frac{\pi}{3} \ , \ x = \frac{4\pi}{3}$$

---

(4) $\cos 2x = \cos x$

الحل :

$$\Rightarrow 2 \cos^2 x - 1 = \cos x$$
$$\Rightarrow 2 \cos^2 x - \cos x - 1 = 0$$
$$\Rightarrow (2 \cos x + 1)(\cos x - 1) = 0$$
$$\Rightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \ , \ \cos x = 1$$
$$x = 0 \ , \ x = \frac{2\pi}{3} \ , \ x = \frac{4\pi}{3}$$

8. حلُّ معادلات مثلثية تحوي اقترانات لنصف الزاوية.

يُمكِن حلُّ معادلة مثلثية تحوي اقترانًا مثلثيًا لنصف الزاوية، بحلّ المعادلة لإيجاد قيمة النسبة المثلثية لنصف الزاوية أوّلًا، ثمَّ إجراء عملية الضرب لإيجاد قياس الزاوية .

مثال 1 : أحل المعادلة: $2\sin\frac{x}{2}-\sqrt{3}=0$ في الفترة $[0,2\pi)$.

$$2\sin\frac{x}{2}-\sqrt{3}=0$$
$$2\sin\frac{x}{2}=\sqrt{3}$$
$$\sin\frac{x}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

بما أن حلي للمعادلة: $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ في الفترة $[0,2\pi)$ هما: $\frac{\pi}{3}$ ، $\frac{2\pi}{3}$ ، فإن :

$$\frac{x}{2}=\frac{\pi}{3}\quad,\quad\frac{x}{2}=\frac{2\pi}{3}$$

ومنه ، فإن جميع حلول المعادلة: $\sin\frac{x}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ تكتب في صورة :

$$\frac{x}{2}=\frac{\pi}{3}+2k\pi\quad,\quad\frac{x}{2}=\frac{2\pi}{3}+2k\pi$$
$$x=\frac{2\pi}{3}+4k\pi\quad,\quad x=\frac{4\pi}{3}+4k\pi$$

أُلاحِظ أنَّه عند تعويض $k=0$ في المعادلتين: $x=\frac{4\pi}{3}+4k\pi$ ، $x=\frac{2\pi}{3}+4k\pi$ ، فإنَّ الناتج هو $x=$

$x=\frac{4\pi}{3}$ ، $x=\frac{2\pi}{3}$ على الترتيب، ضمن الفترة $[0,2\pi)$. أمّا عند تعويض قِيَم أُخرى فإنَّ الناتج يكون خارج الفترة .

إذن، يوجد حلان للمعادلة في الفترة $[0,2\pi)$ هما :

$$x=\frac{2\pi}{3}\quad,\quad x=\frac{4\pi}{3}$$

مثال 2 : أحل المعادلة: $2\cos\frac{x}{2}-1=0$ في الفترة $[0,2\pi)$.

الحل :

$$2\cos\frac{x}{2}-1=0\quad\rightarrow\quad\cos\frac{x}{2}=\frac{1}{2}$$
$$\frac{x}{2}=\frac{\pi}{3}+2k\pi\quad,\quad\frac{x}{2}=\frac{5\pi}{3}+2k\pi$$
$$x=\frac{2\pi}{3}+4k\pi\quad,\quad x=\frac{10\pi}{3}+4k\pi$$
$$x=\frac{2\pi}{3}+(0)\pi=\frac{2\pi}{3}\quad,\quad x=\frac{10\pi}{3}+(0)\pi=\frac{10\pi}{3}$$

إذن، يوجد حلان للمعادلة في الفترة $[0,2\pi)$ هما :

$$x=\frac{2\pi}{3}\quad,\quad x=\frac{10\pi}{3}$$

مثال 3 : أحُلُّ كُلًّا من المعادلات الآتية في الفترة $[0,2\pi)$:

(1) $\tan\frac{x}{2}-\sin x=0$

الحل :

$$\Rightarrow\ \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}-2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}=0$$
$$\Rightarrow\ \sin\frac{x}{2}-2\sin\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}=0$$
$$\Rightarrow\ \sin\frac{x}{2}\left(1-2\cos^2\frac{x}{2}\right)=0$$
$$\Rightarrow\ \sin\frac{x}{2}=0\quad,\quad\cos^2\frac{x}{2}=\frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow\ \sin\frac{x}{2}=0\quad,\quad\cos\frac{x}{2}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\frac{x}{2}=0\quad,\quad\frac{x}{2}=\frac{\pi}{4}\quad,\quad\frac{x}{2}=\frac{3\pi}{4}$$
$$x=0\quad,\quad x=\frac{\pi}{2}\quad,\quad x=\frac{3\pi}{2}$$

---

(2) $2\sin^2\frac{x}{2}-3\cos\frac{x}{2}=0$

الحل :

$$\Rightarrow\ 2\left(1-\cos^2\frac{x}{2}\right)-3\cos\frac{x}{2}=0$$
$$\Rightarrow\ 2-2\cos^2\frac{x}{2}-3\cos\frac{x}{2}=0$$
$$\Rightarrow\ 2\cos^2\frac{x}{2}+3\cos\frac{x}{2}-2=0$$
$$\Rightarrow\ \left(2\cos\frac{x}{2}-1\right)\left(\cos\frac{x}{2}+2\right)=0$$
$$\Rightarrow\ \cos\frac{x}{2}=\frac{1}{2}$$
$$\frac{x}{2}=\frac{\pi}{3}\quad,\quad\frac{x}{2}=\frac{5\pi}{3}$$
$$x=\frac{2\pi}{3}\quad,\quad x=\frac{10\pi}{3}$$

أسئلة متنوعة

سؤال 1 : أطوار القمر: عندما يدور القمر حول الأرض، فإنَّ الجانب المُواجِه للأرض يكون في الغالب مضاءً جزئيًّا بواسطة الشمس. تَصِف أطوار القمر مقدار الجزء الظاهر من سطحه بسبب سقوط ضوء الشمس عليه، ويعطى مقياس فلكي للطور بالعلاقة: $F = \frac{1}{2}(1 - \cos\theta)$، حيث θ الزاوية بين الأرض والشمس والقمر $(0^\circ \le \theta \le 360^\circ)$. أجد قياس الزاوية θ لكل طور ممّا يأتي:

(1) القمر الجديد $(F = 0)$.

$$F = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}(1 - \cos\theta) = 0 \Rightarrow \cos\theta = 1 \Rightarrow \theta = 0^\circ$$

---

(2) الهلال $(F = 0.25)$.

$$F = 0.25 \Rightarrow \frac{1}{2}(1 - \cos\theta) = 0.25$$
$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 60^\circ \ , \ \theta = 300^\circ$$

---

(3) القمر المكتمل $(F = 1)$.

$$F = 1 \Rightarrow \frac{1}{2}(1 - \cos\theta) = 1$$
$$\Rightarrow \cos\theta = -1 \Rightarrow \theta = 180^\circ$$

سؤال 2 : زنبرك: تعطى الإزاحة لزنبرك نابض باستعمال العلاقة $y = 4e^{-3t}\sin 2\pi t$. ما الأوقات (قِيَم t) التي يكون فيها الزنبرك في وضعية الراحة $(y = 0)$؟

الحل :

$$y = 4e^{-3t}\sin 2\pi t$$
$$y = 0 \Rightarrow 4e^{-3t}\sin 2\pi t = 0$$
$$\Rightarrow \sin 2\pi t = 0$$
$$\Rightarrow 2\pi t = 0 + 2k\pi \ , \ 2\pi t = \pi + 2k\pi$$
$$\Rightarrow t = k \ , \ t = \frac{1}{2} + k$$

مهارات التفكير العليا

سؤال 3 : تبرير: اذا كان: $\tan x + \frac{k}{\tan x} = 2$، حيث k ثابت، فأُجيب عمّا يأتي :

(1) أُثبِت عدم وجود حلٍّ للمعادلة عندما $k > 1$، ثمَّ أُبرِّر إجابتي.

الحل :

$$\tan x + \frac{k}{\tan x} = 2$$
$$\tan^2 x + k = 2\tan x$$
$$\tan^2 x - 2\tan x + k = 0$$
$$\Delta = b^2 - 4ac$$
$$= 4 - 4k$$
$$\Delta < 0 \Rightarrow 4 - 4k < 0 \Rightarrow k > 1$$

اذا كان فإن المميز يكون سالباً والمعادلة لا حل لها

---

(2) أحُلُّ المعادلة عندما $k = -8$، حيث: $-\pi < x < \pi$، ثمَّ أُبرِّر خطوات الحلِّ.

الحل :

$$\tan^2 x - 2\tan x - 8 = 0$$
$$(\tan x - 4)(\tan x + 2) = 0$$
$$\tan x = 4 \ , \ \tan x = -2$$
$$x = 1.33 \ , \ x = -1.82 \ , \ x = -1.11 \ , \ x = 2.03$$

سؤال 4 : تبرير: أجد جميع الحلول المُمكِنة للمعادلة $\sin(\cos x) = 0$، ثمَّ أُبرِّر إجابتي .

الحل :

$$\sin(\cos x) = 0$$
$$\cos x = 0 \ \ or \ \ \cos x = \pi$$
$$\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} \ , \ x = \frac{3\pi}{2}$$

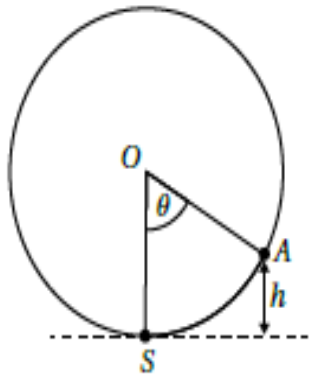
لا يوجد حل للمعادلة: $\cos x = \pi$ لأن القيمة العظمى لـ $\cos x$ هي 1

سؤال 5 : تحدٍّ: أحُلُّ المعادلة: $\tan x + \cot x = 5$، حيث: $0 \le x > 2\pi$.

$$\tan x + \cot x = 5$$
$$\tan x + \frac{1}{\tan x} = 5$$
$$\tan^2 x + 1 = 5\tan x$$
$$\tan^2 x - 5\tan x + 1 = 0$$
$$\tan x = \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$$
$$x = 1.37 \ , \ x = 4.51 \ , \ x = 0.21 \ , \ x = 3.35$$

أحُلُّ كُلًّا من المعادلات الآتية في الفترة $[0, 2\pi)$:

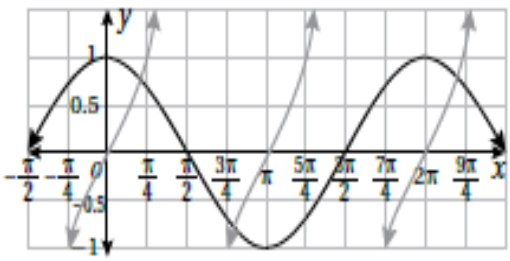
1. $\sin x + \cos x = \frac{\sqrt{6}}{2}$
2. $\cot x - \csc x = \sqrt{3}$
3. $\frac{1 + \cot^2 x}{\cot^2 x} = 2$
4. $3\cos^2 x = \sin^2 x$
5. $3\sin 3x + 4\cos 3x = 0$
6. $\sqrt{3}\tan\frac{x}{2} - 1 = 0$
7. $\cot^2 x + 5\csc x = 5$
8. $4\sec^2 x - 9\sec x = -2$
9. $\frac{1}{1 - \sin x} + \frac{1}{1 + \sin x} = 5$
10. $\cos 2x - 2\sin 2x \cos 2x = 0$
11. $4\sin x \cos x - 2\sqrt{3}\sin x - 2\cos x + \sqrt{3} = 0$
12. $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$



ترفيه: يُمثِّل الشكل المجاور دولابًا دوّارًا في مدينة ألعاب يدور بسرعة ثابتة، وتُمثِّل S نقطة صعود الراكب الذي موقعه الآن هو A، في حين تُمثِّل النقطة O مركز الدولاب. إذا دار الدولاب بزاوية θ، فإنَّ ارتفاع الراكب عن الأرض h بالأمتار يعطى بالعلاقة: $h = 67.5 - 67.5\cos\theta$، حيث θ بالراديان:

13. أجد طول قُطْر الدولاب.
14. إذا علمْتُ أنَّ الرحلة في هذه اللعبة تُمثِّل دورة واحدة، وأنَّها تستغرق 30 دقيقة، فكم دقيقةً تَلزم للوصول إلى ارتفاع 100 متر فوق سطح الأرض؟

يُمثِّل الشكل المجاور منحنيي المعادلتين: $y = \cos x$، و $y = \tan x$:



15. كم حلًّا يوجد للمعادلة: $\cos x = \tan x$ في الفترة $[0, 2\pi)$؟
16. أجد أصغر حلٍّ موجب للمعادلة.

تبرير: إذا كان: $\sin(A + B) = 2\sin(A - B)$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين، ثمَّ أُبرِّر إجابتي:

17. أُثبِت أنَّ: $\tan A = 3\tan B$.
18. أحُلُّ المعادلة: $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$، حيث: $0 \le x < 2\pi$.

اختبار نهاية الوحدة

أختار رمز الإجابة الصحيحة في كلٍّ ممّا يأتي:

1 إذا كان $\cot\theta = 1$، فإنَّ $\tan\theta$ تساوي:

a) -1 b) 1

c) 0 d) 3

2 إذا كان $\cos x = -0.45$، فـإنَّ قيمـة $\sin(\frac{\pi}{2} - x)$ هي:

a) -0.55 b) -0.45

c) 0.45 d) 0.55

3 المعادلة غير الصحيحة ممّا يأتي هي:

a) $\tan(-x) = -\tan x$

b) $\tan(-x) = \frac{1}{\cot(-x)}$

c) $\tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)}$

d) $\tan(-x) + 1 = \sec(-x)$

4 أحد الآتية مُكافِئ للمقدار: $\frac{1-\sin^2 x}{1-\cos^2 x} \times \tan x$:

a) $\tan x$ b) $\sin x$

c) $\cot x$ d) $\cos x$

5 أحد الآتية لا يُكافِئ $\cos x$، حيث: $0 < x < \frac{\pi}{2}$:

a) $\frac{\cos x}{\cos^2 x + \sin^2 x}$ b) $\cot x \sin x$

c) $\frac{1-\sin^2 x}{\cos x}$ d) $\tan x \csc x$

6 أحد الآتية يُكافِئ: $\sin x + \cot x \cos x$:

a) $2\sin x$ b) $\frac{1}{\sin x}$

c) $\cos^2 x$ d) $\frac{\sin x \cos x}{\sin^2 x}$

7 أحد الآتية لا يُعَدُّ حلًّا للمعادلة:

$\sin x + \cos x \tan^2 x = 0$:

a) $\frac{3\pi}{4}$ b) $\frac{7\pi}{4}$

c) 2π d) $\frac{5\pi}{2}$

8 أحد الآتية يُعَدُّ حلًّا للمعادلة: $2\cos x = 1$:

a) $\frac{8\pi}{3}$ b) $\frac{13\pi}{3}$

c) $\frac{10\pi}{3}$ d) $\frac{15\pi}{3}$

9 أحد الآتية مُكافِئ للمقدار: $\frac{\cos x(\cot^2 x + 1)}{\csc x}$:

a) $\tan x$ b) $\cot x$

c) $\sec x$ d) $\csc x$

10 أحد المقادير الآتية يُمكِن استعماله لتكوين متطابقة مع المقدار: $\frac{\sec x + \csc x}{1 + \tan x}$، حيث: $\tan x \neq -1$:

a) $\sin x$ b) $\cos x$

c) $\tan x$ d) $\csc x$

أجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي من دون استعمال الآلة الحاسبة:

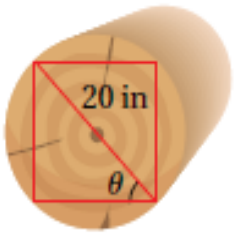
11 $3\cos 37.5^\circ \sin 37.5^\circ$

12 $\cos\frac{\pi}{12} + \cos\frac{5\pi}{12}$

13 $\cos 255^\circ - \cos 195^\circ$

اختبار نهاية الوحدة

14 عارضة خشبية: يراد قَصُّ قطعة خشبية على شكل منشور قاعدته مستطيلة من قطعة خشب على شكل أسطوانة، طول قُطْرها 20 in كما هو مُبيَّن في الشكل المجاور. أُثبِت أنَّه يُمكِن تمثيل مساحة المقطع العرضي للقطعة الخشبية باستعمال الاقتران:



$A(\theta) = 200 \sin 2\theta$

أُثبِت صِحَّة كلٍّ من المتطابقات الآتية:

15 $\tan y = \dfrac{\sin(x+y) - \sin(x-y)}{\cos(x+y) + \cos(x-y)}$

16 $4(\sin^6 x + \cos^6 x) = 4 - 3\sin^2 2x$

17 $\ln|\cos x| = \dfrac{1}{2}(\ln|1+\cos 2x| - \ln 2)$

18 $\sec 2x = \dfrac{\sec^2 x}{2 - \sec^2 x}$

19 $\tan\dfrac{x}{2} = \csc x - \cot x$

20 إذا كانت θ زاوية حادَّة، وكان $\cos\theta = \dfrac{4}{5}$، فأُثبِت أنَّ:

$$\cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{10}$$

أُثبِت صِحَّة كلٍّ من المتطابقات الآتية:

21 $\dfrac{\sec x - \cos x}{\sec x} = \sin^2 x$

22 $(\sin x + \cos x)^4 = (1 + 2\sin x \cos x)^2$

23 $\cot(x+y) = \dfrac{\cot x \cot y - 1}{\cot x + \cot y}$

24 $\dfrac{\sin x \sec x}{\tan x} = 1$

25 $\ln|\sec\theta| = -\ln|\cos\theta|$

أجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي من دون استعمال الآلة الحاسبة:

26 $\tan(-15°)$

27 $\sin\dfrac{7\pi}{12}$

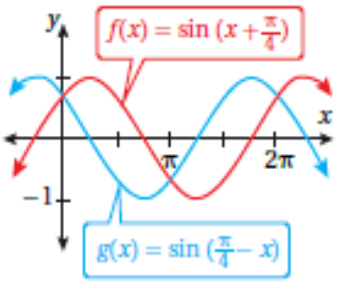
28 $\dfrac{\tan 20° + \tan 25°}{1 - \tan 20° \tan 25°}$

29 $\cos\dfrac{5\pi}{12}\cos\dfrac{7\pi}{12} - \sin\dfrac{5\pi}{12}\sin\dfrac{7\pi}{12}$

30 أحُلُّ المعادلة الآتية، وأستعين بالشكل التالي في عملية الحلّ:

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 0$$

حيث: $0 \le x \le 2\pi$.



أُبسِّط كُلًّا من المقادير الآتية باستعمال المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية، أو المتطابقات المثلثية لنصف الزاوية:

31 $\cos^2 5x - \sin^2 5x$

32 $2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}$

33 $\sqrt{\dfrac{1-\cos 8x}{2}}$

أحُلُّ كُلًّا من المعادلات الآتية في الفترة $[0, 2\pi)$:

34 $4\sin x - 3 = 0$

35 $\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x} = 3$

36 $\cos x \sin x - \sin x = 0$

37 $\sin x - 2\sin^2 x = 0$

38 $\sin x - \cos x - \tan x = -1$

39 $\sin x - \cos x = \dfrac{1}{2}$

40 $\tan 3x + 1 = \sec 3x$