الدرس الأول : مشتقة اقترانات خاصة

Differentiation of Special Functions

1. مشتقة الاقتران الأُسّي الطبيعي

نظرية: مشتقة الاقتران الأُسّي الطبيعي.

إذا كان $f(x) = e^x$ حيث e العدد النيبيري ، فإن:

$$f'(x) = e^x$$

مثال : أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي :

(1) $f(x) = 3e^x \rightarrow f'(x) = 3e^x$

---

(2) $f(x) = x^2 + e^x \rightarrow f'(x)$
$= 2x + e^x$

---

(3) $y = \dfrac{\sqrt[3]{x} - 2xe^x}{x}$

$$y = \frac{\sqrt[3]{x}}{x} - \frac{2xe^x}{x}$$
$$= \frac{x^{\frac{1}{3}}}{x} - 2e^x$$
$$= x^{-2/3} - 2e^x$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2}{3}x^{-\frac{5}{3}} - 2e^x$$
$$= \frac{-2}{3\sqrt[3]{x^5}} - 2e^x$$

---

(4) $f(x) = 5e^x + 3$
$f'(x) = 5e^x$

(5) $y = \sqrt{x} - 4e^x$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} - 4e^x$$

---

(6) $y = 8e^x + \dfrac{4}{\sqrt[5]{x}}$

$$y = 8e^x + \frac{4}{x^{\frac{1}{5}}}$$
$$= 8e^x + 4x^{-\frac{1}{5}}$$
$$\frac{dy}{dx} = 8e^x + 4\left(\frac{-1}{5}\right)x^{-\frac{1}{5}-1}$$
$$= 8e^x + \frac{-4}{5}x^{-\frac{6}{5}}$$
$$= 8e^x - \frac{4}{5\sqrt[5]{x^6}}$$

---

(7) $f(x) = 2\sin x - e^x$
$f'(x) = 2\cos x - e^x$

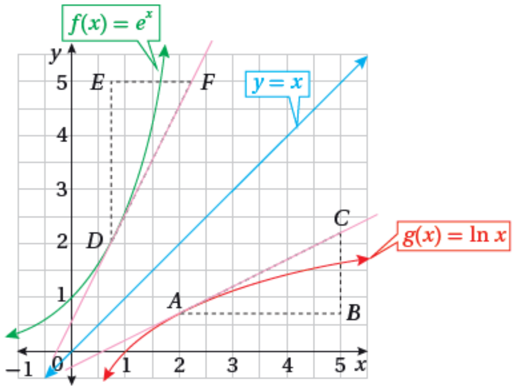
---

(8) $f(x) = e^{x+1} + 1$
$f(x) = e^x . e + 1$
$f'(x) = ee^x + 0$
$= e^{x+1}$

---

(9) $f(x) = e^x + x^e$
$f'(x) = e^x + ex^{e-1}$

2. مشتقة الاقتران اللوغاريتمي الطبيعي



نظرية : إذا كان $f(x) = \ln x$ حيث $x > 0$ ،

فإن:

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

مثال 1: أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي :

$(1)\ f(x) = \ln x^4$

$$f(x) = 4\ln x$$

$$f'(x) = 4\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{4}{x}$$

$(2)\ f(x) = \ln(xe^x) + \ln(7x)$

$$f(x) = \ln x + \ln e^x + \ln 7 + \ln x$$

$$= 2\ln x + x + \ln 7$$

$$f'(x) = 2\left(\frac{1}{x}\right) + 1 + 0$$

$$f'(x) = \frac{2}{x} + 1$$

$(3)\ f(x) = \ln(4x) + \sqrt{x}$

$$f(x) = \ln 4 + \ln x + \sqrt{x}$$

$$f'(x) = 0 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$(4)\ f(x) = \ln(2x^3)$

$$f(x) = \ln 2 + \ln x^3$$

$$f(x) = \ln 2 + 3\ \ln x$$

$$f'(x) = 0 + 3\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$f'(x) = 0 + \frac{3}{x} = \frac{3}{x}$$

$(5)\ f(x) = \ln\left(\frac{1}{x^3}\right) + x^4$

$$f(x) = \ln 1 - \ln x^3 + x^4$$

$$= 0 - 3\ln x + x^4$$

$$= -3\ln x + x^4$$

$$f'(x) = -3\left(\frac{1}{x}\right) + 4x^3$$

$$f'(x) = \frac{-3}{x} + 4x^3$$

$(6)\ f(x) = \ln\left(\frac{10}{x^n}\right)$

$$f(x) = \ln 10 - \ln x^n$$

$$= \ln 10 - n\ln x$$

$$f'(x) = 0 - n\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{-n}{x}$$

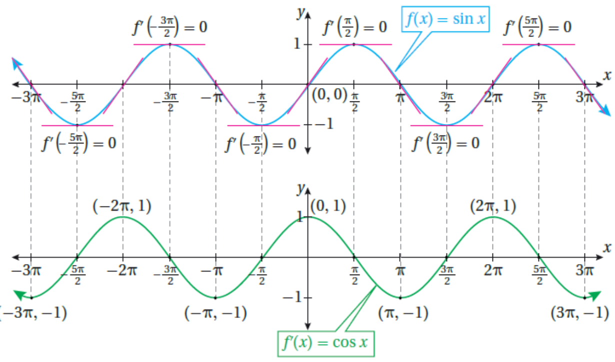
مثال 2: إذا كان: $f(x) = ln(kx)$ ، حيث k عدد حقيقي موجب ، و $x > 0$ ، فأُبيِّن أنَّ :

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$f(x) = ln(kx)$$
$$= ln(k) - ln(x)$$
$$f'(x) = 0 - \frac{1}{x} = \frac{-1}{x}$$

---

3. مشتقة اقتران الجيب، ومشتقة اقتران جيب التمام



يظهر من الشكل السابق أنَّ منحنى $f'(x)$ مُطابِق تمامًا لمنحنى جيب التمام ؛ ما يعني أنَّ $f'(x) = \cos x$ ويُمكِن بطريقة مشابهة استنتاج أنَّ مشتقة اقتران جيب التمام هي انعكاس منحنى اقتران الجيب حول المحور x

نظرية : مشتقة اقتران الجيب، ومشتقة اقتران جيب التمام

- إذا كان $f(x) = \sin x$ ، فإن:
$$f'(x) = \cos x$$
- إذا كان $f(x) = \cos x$ ، فإن:
$$f'(x) = \sin x$$

مثال : أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي :

(1) $f(x) = 3\sin x + 4$
$$f'(x) = 3\cos x + 0$$
$$f'(x) = 3\cos x$$

---

(2) $y = \frac{1}{2}e^x - 7\cos x$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}e^x - 7(-\sin x)$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}e^x + 7\sin x$$

---

(3) $y = \frac{\sin x}{2} + 3\cos x$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(\cos x) + 3(-\sin x)$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(\cos x) - 3\sin x$$

---

(4) $f(x) = x^2 + \cos x + \sin\frac{\pi}{2}$
$$f'(x) = 2x + (-\sin x) + 0$$
$$f'(x) = 2x - \sin x$$

---

(5) $f(x) = \frac{\ln x}{4} - \pi\cos x$
$$f'(x) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}\right) - \pi(-\sin x)$$
$$f'(x) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}\right) + \pi\sin x$$
$$f'(x) = \frac{1}{4x} + \pi\sin x$$

4. تطبيقات: معادلة المماس والعمودي عند نقطة ما

يُمكِن استعمال أيٍّ من قواعد الاشتقاق التي تعلَّمْتُها في هذا الدرس لإيجاد معادلة المماس عند نقطة ما على منحنى الاقتران.

مثال 1: اذا كان الاقتران:

$$f(x) = ln\left(\frac{x}{e}\right)$$

فأستعمل المشتقة لإيجاد كل مما يأتي:

(1) معادلة المماس عند النقطة $(1, -1)$.

الحل:

الخطوة 1: أجد ميل المماس عند النقطة $(1, -1)$

$$f(x) = ln\left(\frac{x}{e}\right)$$

$$= ln\, x - ln\, e = ln\, x - 1$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} \quad \rightarrow \quad m = f'(1) = \frac{1}{1} = 1$$

اذن ميل المماس هو 1.

الخطوة 2: أجد معادلة المماس عند النقطة $(1, -1)$.

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - (-1) = 1(x - 1)$$
$$y + 1 = x - 1$$
$$y = x - 2$$

اذن معادلة المماس هي: $y = x - 2$.

---

(2) معادلة العمودي على المماس عند النقطة $(1, -1)$

الحل:

بما أنَّ ميل المماس عند النقطة $(1, -1)$ هو 1، فإنَّ ميل العمودي على المماس هو -1

معادلة العمودي على المماس عند النقطة $(1, -1)$ هي:

$$y - (-1) = -1(x - 1)$$
$$y + 1 = -x + 1$$
$$\quad -1 \qquad\qquad -1$$
$$y = -x$$

مثال 2: اذا كان الاقتران: $f(x) = \ln \sqrt{x}$،

فأستعمل المشتقة لإيجاد كل مما يأتي:

(1) معادلة المماس عند النقطة $\left(e, \frac{1}{2}\right)$.

الحل:

الخطوة 1: أجد ميل المماس عند النقطة $\left(e, \frac{1}{2}\right)$.

$$f(x) = ln \sqrt{x} = ln\, x^{1/2} = \frac{1}{2}\, ln\, x$$

$$f'(x) = \frac{1}{2x} \quad \rightarrow \quad m = f'(e) = \frac{1}{2e}$$

اذن ميل المماس هو $\frac{1}{2e}$.

الخطوة 2: أجد معادلة المماس عند النقطة $\left(e, \frac{1}{2}\right)$.

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - \frac{1}{2} = \frac{1}{2e}(x - e)$$
$$y - \frac{1}{2} = \frac{1}{2e}x - \frac{e}{2e}$$
$$y - \frac{1}{2} = \frac{1}{2e}x - \frac{1}{2}$$
$$y = \frac{1}{2e}x$$

اذن معادلة المماس هي: $y = \frac{1}{2e}x$.

(2) معادلة العمودي على المماس عند النقطة $(e,\frac{1}{2})$.

بما أنَّ ميل المماس عند النقطة $(e,\frac{1}{2})$ هو $\frac{1}{2e}$، فإنَّ ميل العمودي على المماس هو $-2e$

ومنه، فإنَّ معادلة العمودي على المماس عند النقطة $(e,\frac{1}{2})$ هي:

$$y-\frac{1}{2}=-2e(x-e)$$

$$y-\frac{1}{2}=-2ex+2e^2$$

$$y=-2ex+2e^2+\frac{1}{2}$$

مثال 3: اذا كان: $f(x)=\sin x+\frac{1}{2}e^x$،

اجب عن الفرعين الاتيين:

(1) أجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران f عند النقطة $\left(\pi,\frac{1}{2}e^{\pi}\right)$

$$f'(x)=\cos x+\frac{1}{2}e^x$$

$$m=f'(\pi)=\cos\pi+\frac{1}{2}e^{\pi}$$

$$m=-1+\frac{1}{2}e^{\pi}$$

الان لنكتب معادلة المماس:

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

$$y-\frac{1}{2}e^{\pi}=\left(-1+\frac{1}{2}e^{\pi}\right)(x-\pi)$$

$$y=\left(-1+\frac{1}{2}e^{\pi}\right)x+\pi-\frac{\pi}{2}e^{\pi}+\frac{1}{2}e^{\pi}$$

(2) أجد معادلة العمودي على المماس لمنحنى الاقتران f عند النقطة $\left(\pi,\frac{1}{2}e^{\pi}\right)$.

$$f(x)=\sin x+\frac{1}{2}e^x$$

$$f'(x)=\cos x+\frac{1}{2}e^x$$

$$m=f'(\pi)=\cos\pi+\frac{1}{2}e^{\pi}$$

$$m=-1+\frac{1}{2}e^{\pi}$$

معادلة العمودي على المماس:

$$y-\frac{1}{2}e^{\pi}=\left(\frac{2}{2-e^{\pi}}\right)(x-\pi)$$

$$y-\frac{1}{2}e^{\pi}=\left(\frac{2}{2-e^{\pi}}\right)x-\frac{2\pi}{2-e^{\pi}}$$

$$y=\left(\frac{2}{2-e^{\pi}}\right)x-\frac{2\pi}{2-e^{\pi}}+\frac{1}{2}e^{\pi}$$

مثال 4: أجد قيمة x التي يكون عندها المماس افقياً لمنحنى الاقتران: $f(x)=e^x-2x$

الحل:

المماس افقي يعني الميل صفر: $f'(x)=0$

$$f'(x)=e^x-2=0$$

$$e^x=2 \quad\rightarrow\quad \ln e^x=\ln 2$$

$$\rightarrow\quad x=\ln 2$$

$$\rightarrow\quad x=0.69$$

مثال 5 : اختيار من مُتعدِّد : أيُّ الآتية تُمثِّل معادلة العمودي على المماس لمنحنى الاقتران:

$f(x) = \sin x + \cos x$ عندما $x = \pi$ ؟

a) $y = -x + \pi - 1$　b) $y = x - \pi - 1$
c) $y = x - \pi + 1$　d) $y = x + \pi + 1$

الحل:

$$f'(x) = \cos x - \sin x$$
$$m = f'(\pi) = \cos\pi - \sin\pi$$
$$= -1 - 0 = -1$$
$$f(\pi) = \sin\pi + \cos\pi = 0 + -1$$
$$= -1$$
$$(\pi, -1)$$

ميل المماس هو -1 . اذن ميل العمودي هو :

$$1 = \frac{-1}{-1} = \frac{-1}{m}$$
$$y + 1 = 1(x - \pi)$$
$$y = x - \pi - 1$$

مثال 6 : إذا كان الاقتران $f(x) = \ln(x)$ فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا :

(1) أُثبِت أنَّ مماس منحنى الاقتران عند النقطة $(e, 1)$ يمرُّ بنقطة الأصل

نجد معادلة المماس ثم نعوض $(0, 0)$ فيجب ان تحقق المعادلة

$$f(x) = \ln x \quad \rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{x}$$
$$m = f'(e) = \frac{1}{e}$$

معادلة المماس :

$$y - 1 = \frac{1}{e}(x - e)$$
$$y = \frac{1}{e}x$$
$$f(0) = \frac{1}{e}(0)$$
$$0 = 0$$

اذن النقطة $(0, 0)$ تقع على المماس

---

(2) أُثبِت أنَّ المقطع x للعمودي على المماس لمنحنى الاقتران عند النقطة $(e, 1)$ هو $e + \frac{1}{e}$

معادلة العمودي على المماس :

$$m = \frac{-1}{\text{ميل المماس}} = \frac{-1}{\frac{1}{e}} = -e$$
$$y - 1 = -e(x - e)$$

المقطع x يعني ان $y = 0$

$$0 - 1 = -e(x - e)$$
$$-1 = -e(x - e)$$
$$1 = e(x - e)$$
$$\frac{1}{e} = (x - e)$$
$$x = e + \frac{1}{e}$$

5. تطبيقات: الحركة في مسار مستقيم.

عند دراسة جسم يتحرك في مسار مستقيم أفترض أن الجسم يتحرك على خط أعداد انطلاقًا من موقع ابتدائي وأن اتجاه الحركة يكون موجبًا أو سالبًا.

$S(t)$: موقع الجسم بالنسبة إلى الزمن

$S'(t) = V(t)$ السرعة المتجهة للجسم وقد سمي بهذا الاسم لأنه يستعمل لتحديد كل من مقدار سرعة الجسم واتجاه حركته (معدل تغير اقتران الموقع بالنسبه للزمن)

$S''(t) = V'(t) = a(t)$: التسارع (معدل تغير السرعه المتجهه بالنسبة للزمن)

ملاحظات

إذا كان

$V(t) > 0$ فإن الجسم يتحرك في الاتجاه الموجب.

$V(t) < 0$ فإن الجسم يتحرك في الاتجاه السالب.

$V(t) = 0$ فإن الجسم يكون في حالة سكون.

$|V(t)| =$ السرعة وهي قياسيه لا تحدد اتجاه الحركة.

مفهوم اساسي: الحركة في مسار مستقيم

إذا مثَّل الاقتران $s(t)$ موقع جسم يتحرَّك في مسار مستقيم، فإنَّ سرعته المتجهة $v(t)$ تعطى بالعلاقة $v(t) = s'(t)$، وتسارعه $a(t)$ يعطى بالعلاقة $a(t) = v'(t) = s''(t)$

أمّا سرعته القياسية فهي $|V(t)|$

مثال 1: يمثل الاقتران:

$s(t) = 6t^2 - t^3 \ , \ t \geq 0$ موقع جسم يتحرك على مستقيم حيث s الموقع بالامتار، t الزمن بالثواني

(1) جد السرعة المتجهة والتسارع عندما $t = 2$.

الحل:

سرعة الجسم: أجد مشتقة اقتران الموقع، ثمَّ أُعوِّض $t = 2$ في المشتقة:

$$v(t) = s'(t) = 12t - 3t^2$$
$$v(2) = 12(2) - 3(2)^2$$
$$= 24 - 12$$
$$= 12$$

تسارع الجسم: أجد مشتقة اقتران السرعة، ثمَّ أُعوِّض $t = 2$ في المشتقة:

$$a(t) = v'(t) = s''(t) = 12 - 6t$$
$$a(2) = 12 - 6(2)$$
$$= 0 \ m/s^2$$

---

(2) أجد قيم t التي يكون عندها الجسم في حالة سكون لحظي.

يكون الجسم في حالة سكون لحظي إذا كانت سرعته 0؛ أي عندما $v(t) = 0$.

$$v(t) = 12t - 3t^2$$
$$12t - 3t^2 = 0$$
$$3t(4 - t) = 0$$
$$3t = 0 \quad or \quad (4 - t) = 0$$
$$t = 0 \quad or \quad t = 4$$

اذن، يكون الجسم في حالة سكون لحظي عندما $t = 0 \ , \ t = 4$

(3) في أي اتجاه يتحرك الجسم عندما $t = 5$ ؟

$v(t) = 12t - 3t^2$

$v(5) = 12(5) - 3(5)^2$

$= 60 - 75$

$= -15\ m/s$

$\therefore\ v(5) = -15\ m/s \quad < \quad 0$

بما ان إشارة السرعة المتجهة سالبة ، فإن الجسم

يتحرك في الاتجاه السالب عندما $t = 5$

---

(4) متى يعود الجسم الى موقعه الابتدائي ؟

الحل:

يكون الجسم في موقعه الابتدائي أوّل مَرَّة عندما

$t = 0$ ومنه، فإنَّ: $s(0) = 0$

لإيجاد الأوقات التي يعود فيها الجسم إلى هذه

النقطة، أحُلُّ المعادلة $s(t) = 0$

$6t^2 - t^3 = 0$

$t^2(6 - t) = 0$

$t^2 = 0 \quad or \quad 6 - t = 0$

$t = 0 \quad or \quad t = 6$

إذن، يعود الجسم إلى موقعه الابتدائي بعد $6\ s$.

مثال 2 : يمثل الاقتران:

$$s(t) = t^2 - 7t + 8 \quad , \quad t \geq 0$$

موقع جسم يتحرك في مسار مستقيم حيث s

الموقع بالامتار، t الزمن بالثواني .

(1) أجد سرعة الجسم المتجهة وتسارعه عندما

$t = 4$

سرعة الجسم: أجد مشتقة اقتران الموقع ، ثم

اعوض $t = 4$ في المشتقة .

$v(t) = s'(t) = 2t - 7$

$v(4) = 2(4) - 7 = 8 - 7 = 1$

تسارع الجسم : أجد مشتقة اقتران السرعة ، ثم

اعوض $t = 4$ في المشتقة

$a(t) = v'(t) = s''(t) \ = 2\ m/s^2$

سرعة الجسم المتجهة عندما $t = 4$ هي $1\ m/s$

وتسارعه $2\ m/s^2$

---

(2) أجد قيم t التي يكون عندها الجسم في حالة

سكون لحظي .

يكون الجسم في حالة سكون لحظي إذا كانت

سرعته 0 ؛ أيْ عندما $v(t) = 0$

$v(t) = 2t - 7$

$v(t) = 0$

$2t - 7 = 0$

$2t = 7$

$t = \dfrac{7}{2}$

الجسم في حالة سكون لحظي عندما $t = \frac{7}{2}$

---

(3) في أي اتجاه يتحرك الجسم عندما $t = 2$

$v(t) = 2t - 7$

$v(2) = 2(2) - 7 = 4 - 7$

$= -3\ m/s$

$\therefore\ v(2) = -3\ m/s \quad < \quad 0$

بما ان إشارة السرعة المتجهة سالبة ، فإن الجسم

يتحرك في الاتجاه السالب عندما $t = 2$

(4) متى يعود الجسم الى موقعه الابتدائي ؟

الموقع الابتدائي (بداية الحركة) $\leftarrow$ $S(0)$

$S(t) = t^2 - 7t + 8$

$S(0) = (0)^2 - 7(0) + 8 = 8$

اذا نبدأ حركة الجسم عند $S = 8$ متى يعود الجسم لهذا الموقع مرة أخرى؟

$S(t) = 8 \quad , \quad t\ ?$

$t^2 - 7t + 8 = 8$

$t^2 - 7t = 0$

$t(t-7) = 0$

$t = 0 \quad or \quad t = 7$

اذا يعود الجسم الى موقعه مرة أخرى عندما $t = 7$

مثال 3 : يمثل الاقتران $s(t) = t^3 - 4t^2 + 5t \ , \ t \geq 0$ موقع جسم يتحرك على خط مستقيم حيث : s الموقع بالامتار، t الزمن بالثواني

(1) أجد سرعة الجسم والتسارع عندما $t = 5$

الحل:

$v(t) = s'(t) = 3t^2 - 8t + 5$

$v(5) = 3(5)^2 - 8(5) + 5$

$= 75 - 40 + 5$

$= 40$

$a(t) = v'(t) = 6t - 8$

$a(5) = 6(5) - 8$

$= 30 - 8$

$= 22$

(2) أجد قيم t التي يكون عندها الجسم في حالة سكون لحظي .

$3t^2 - 8t + 5 = 0$

$(3t-5)(t-1) = 0$

$3t - 5 = 0 \quad , \quad t - 1 = 0$

$t = \frac{5}{3} \quad , \quad t = 1$

---

(3) في أي اتجاه يتحرك الجسم عندما $t = 4$

$v(4) = 3(4)^2 - 8(4) + 5$

$= 48 - 32 + 5$

$= 21 > 0$

الاتجاه هو نفس الاتجاه الأصلي لليمين .

---

(4) متى يعود الجسم الى موقعه الابتدائي ؟

$t^3 - 4t^2 + 5t = 0$

$t(t^2 - 4t + 5) = 0$

$t = 0 \quad , \quad t^2 - 4t + 5 = 0$

نجد المميز

$\Delta = b^2 - 4ac$

$= 4^2 - 4(1)(5)$

$= 16 - 20 = -4 < 0$

المميز سالب يعني انه لا يوجد اصفار

$\therefore t = 0$

أي لا يعود الجسم الى موقعه الابتدائي ابداً .

مثال 4 : يمثل الاقتران $s(t) = e^t - 4t$, $t \geq 0$ موقع جسيم يتحرك على خط مستقيم

حيث : s الموقع بالامتار ، t الزمن بالثواني :

(1) أحدد الموقع الابتدائي للجسيم .

$$s(0) = e^0 - 4(0)$$
$$= 1 - 0$$
$$= 1\ m$$

----

(2) أجد تسارع الجسيم عندما تكون سرعته المتجهة صفراً .

$$v(t) = 0$$
$$v(t) = s'(t) = e^t - 4 = 0$$
$$e^t = 4 \quad \rightarrow \quad t = ln\ 4$$

نجد تسارع الجسيم عندما $t = ln\ 4$

$$a(t) = v'(t) = e^t$$
$$a(ln\ 4) = e^{ln\ 4}$$
$$= 4\frac{m}{s^2}$$

----

6. تطبيقات : الحركة التوافقية البسيطة.

تعلَّمْتُ سابقًا أنَّ الاقترانات الجيبية تُستعمَل لنمذجة السلوك الدوري في كثيرمن المواقف الحياتية والعلمية، مثل حركة اهتزاز كتلة مُعلَّقة بزنبرك؛ إذ يُمكِن إيجاد سرعة هذه الكتلة وتسارعها باستعمال المشتقات.

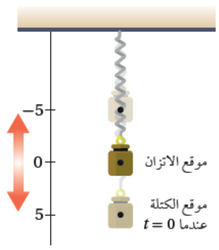
إذا كانت المعادلة التي تصف الازاحة (y) لجسم ما مع الزمن (t).

هي $y = a \sin wt$

أو $y = a \cos wt$

فإن الجسم يكون في حركة توافقية بسيطة مثل حركة اهتزاز كتلة معلقة بزنبرك إذ يمكن إيجاد سرعة هذه الكتلة وتسارعها باستخدام المشتقات

مثال 1 : يبين الشكل المجاور جسماً معلقاً بزنبرك شد 5 وحدات اسفل الاتزان $(s = 0)$ ، ثم ترك عند الزمن $t = 0$ ليترك الى الأعلى والى الأسفل ويمثل $s(t) = 5 \cos t$ موقع الجسم عند أي زمن ، حيث t الزمن بالثواني ، و s الموقع بالامتار



(1) جد اقترانا يمثل سرعة الجسم واقترانا اخر يمثل تسارعه عند أي نقطة .

اقتران السرعة: $v(t) = S'(t) = -5 \sin t$

اقتران التسارع : $a(t) = v'(t) - 5 \cos t$

(2) صف حركة الجسم .

اعتمادًا على الخصائص الجبرية لاقتران الموقع، فإنَّ الجسم يتحرَّك بمرور الزمن بين الموقع $s = 5$ والموقع $s = -5$ على المحور s، والقيمة السالبة تعني أنَّ الجسم فوق موقع الاتزان

- أُلاحِظ أنَّ قيمة السرعة القياسية تكون أكبر ما يُمكِن في كلٍّ من الاتجاه الموجب والاتجاه السالب عندما $|sin\ t| = 1$ وفي هذه الحالة، فإنَّ $cos\ t = 0$ متطابقة فيثاغورس . وبالرجوع إلى اقتران الموقع، أُلاحِظ أنَّ قيمته تُصبِح صفرًا (موقع الاتزان) عندما $cos\ t = 0$؛ ما يعني أنَّ سرعة الجسم القياسية تكون أكبر ما يُمكِن عندما يمرُّ الجسم بموقع الاتزان .
- اعتمادًا على الخصائص الجبرية لاقتران التسارع، فإنَّ قيمة تسارع الجسم تكون دائمًا معكوس قيمة موقع الجسم؛ ذلك أنَّ مُحصِّلة القوى تسحب الجسم إلى الأسفل إذا كان أعلى موقع الاتزان، وأنَّ مُحصِّلة القوى تسحب الجسم إلى الأعلى إذا كان أسفل موقع الاتزان.
- تكون قيمة التسارع صفرًا فقط عند موقع الاتزان؛ لأنَّ قوَّة الجاذبية وقوَّة الزنبرك تُلغي إحداهما الأُخرى عند هذه النقطة. ولكنْ، إذا كان الجسم عند أيِّ موقع آخر، فإنَّ هاتين القوَّتين لا تكونان متساويتين، والتسارع لا يساوي صفرًا.

مثال 2 : يتحرك جسم معلق بزنبرك الى اعلى والى اسفل ويمثل الاقتران $s(t) = 7\ sin\ t$ موقع الجسم عند أي زمن لاحق ، حيث t الزمن بالثواني ، و s الموقع بالامتار

(1) جد اقترانا يمثل سرعة الجسم واقترانا اخر يمثل تسارعه عند أي نقطة .

$$S(t) = 7 \sin t$$
$$v(t) = S'(t) = 7 \cos t$$
$$v(t) = 7 \cos t$$
$$a(t) = v'(t)$$
$$a(t) = 7\ (-\sin t\ )$$
$$a(t) = -7 \sin t$$

---

(2) صف حركة الجسم .

مثال 3 : زنبرك : يتحرَّك جسم مُعلَّق بزنبرك إلى الأعلى وإلى الأسفل ، ويُحدِّد الاقتران $s(t) = 4\cos t$ موقع الجسم عند أيِّ زمن لاحق ، حيث t الزمن بالثواني ، و s الموقع بالأمتار :

(1) أجد اقترانًا يُمثِّل سرعة الجسم ، واقترانًا آخرَ يُمثِّل تسارعه عند أيِّ لحظة .

$$s(t) = 4\cos t$$
$$v(t) = -4\sin t$$
$$a(t) = -4\cos t$$

---

(2) أجد سرعة الجسم وتسارعه عندما $t = \frac{\pi}{4}$

$$v\left(\frac{\pi}{4}\right) = -4\sin\frac{\pi}{4} = -4 \times \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$= \frac{-4}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{-4\sqrt{2}}{2}$$
$$= -2\sqrt{2}\ m/s$$
$$a\left(\frac{\pi}{4}\right) = -4\cos\frac{\pi}{4} = -4 \times \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$= -2\sqrt{2}\ m/s$$

---

(3) أَصِف حركة الجسم .

مهارات التفكير العليا

مثال 1 : تبرير : إذا كان الاقتران $y = e^x - ax$ ، حيث a عدد حقيقي ، فأجد معادلة المماس عند نقطة تقاطع الاقتران مع المحور y ، مُبرِّرًا إجابتي .

الحل: يقطع المنحنى محور y عندما $x = 0$

$$y = e^0 - a(0)$$
$$= 1 - 0 = 1 \qquad \text{النقطة } (0,1)$$
$$y' = e^x - a$$
$$y'(0) = e^0 - a = 1 - a \qquad \text{ميل المماس}$$

الان نكتب معادلة المماس :

$$y - 1 = (1-a)(x-0)$$
$$y - 1 = (1-a)(x)$$
$$y = (1-a)(x) + 1$$

مثال 2 : تحدٍّ : أُثبِت عدم وجود مماس ميله 2 للاقتران: $y = 2e^x + 3x + 5x^3$

الحل:

ميل مماس المنحنى عند أي نقطة عليه هو

$$y' = 2e^x + 3 + 15x^2$$
$$2e^x > 0 \qquad \text{لكل قيم } x$$
$$15x^2 > 0 \qquad \text{لكل قيم } x$$
$$2e^x + 15x^2 > 0$$
$$+3 \qquad +3$$
$$2e^x + 15x^2 + 3 > 3$$

أي ان $y' > 3$ ← لا يمكن ان تكون قيمة y' تساوي 2 لأي قيمة حقيقية للمتغير x .

مثال 3 : تبرير: إذا كان الاقتران $y = ke^x$ حيث $k > 0$ وكان منحناه يقطع المحور y عند النقطة P، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا :

(1) أجد نقطة تقاطع مماس منحنى الاقتران عند النقطة P مع المحور x

يقطع المحور y عندما $x = 0$ وبالتعريف في معادلة الاقتران نجد أن $y = ke^0 = k$. أي ان احداثي P هي $(0, k)$

$$y = ke^x \quad \rightarrow \quad y' = ke^x$$

$$y'(0) = ke^0 = 0$$

معادلة المماس : $y - k = k(x - 0)$

$$y - k = kx \quad \rightarrow \quad y = kx + k$$

ولإيجاد نقطة التقاطع مع المحور y نعوض $y = 0$

$$0 = kx + k \quad \rightarrow \quad \frac{kx}{k} = \frac{-k}{k}$$

$$\rightarrow x = -1$$

نقطة تقاطع المماس عند P مع المحور x هي $(-1, 0)$

---

(2) إذا كان العمودي على المماس عند النقطة P يقطع المحور x عند النقطة $(100, 1)$، فأجد قيمة k

ميل المماس $= k$ ← ميل العمودي $= \frac{-1}{k}$

معادلة العمودي هي :

$$y - k = \frac{-1}{k}(x - 0) \quad \rightarrow \quad y = \frac{-1}{k}x + k$$

وبتعويض نقطة التقاطع :

$$0 = \frac{-1}{k}(100) + k$$

$$k^2 = 100 \quad \rightarrow \quad k = \pm 10$$

ولأن $k > 0$ فإن $k = 10$.

مثال 4 : تحدٍّ : إذا كان الاقتران $y = log\ x$ فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا :

(1) أثبت أن : $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x\ ln\ 10}$

الحل:

قاعدة : $log\ x = \frac{ln\ x}{ln\ 10}$

$$y = log\ x = \frac{ln\ x}{ln\ 10} = \frac{1}{ln\ 10}\ ln\ x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{ln\ 10} \times \frac{1}{x} = \frac{1}{x\ ln\ 10}$$

---

(2) مُعتمِدًا على النتيجة من السؤال السابق، أجد $\frac{dy}{dx}$ للاقتران: $y = log\ ax^2$، حيث a عدد حقيقي موجب .

الحل:

$$y = log\ ax^2 = log\ a + log\ x^2$$

$$= log\ a + 2log\ x$$

$$y' = 0 + \frac{2}{x\ ln\ 10} = \frac{2}{x\ ln\ 10}$$

مثال 5 : تبرير : يمثل الاقتران $s(t) = 4 - \sin t \ , \ t \geq 0$ موقع جسيم يتحرك على خط مستقيم حيث : s الموقع بالامتار ، t الزمن بالثواني

(1) أجد سرعة الجسيم وتسارعه بعد t ثانية .

الحل:

$$s(t) = 4 - \sin t$$
$$v(t) = s'(t) = -\cos t$$
$$a(t) = v'(t) = \sin t$$

---

(2) أجد موقع الجسيم عندما كان في حالة سكون لحظي أول مرة بعد انطلاقه .

الحل : حالة سكون يعني $v(t) = 0$

$$-\cos t = 0 \quad \to \quad t = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \ldots$$

يكون الجسم في حالة سكون لأول مرة بعد انطلاقه عندما $t = \frac{\pi}{2}$

المطلوب : موقع الجسم عندما $t = \frac{\pi}{2}$

$$s\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4 - \sin \frac{\pi}{2} = 4 - 1 = 3m$$

(3) أجد موقع الجسيم عندما يكون تسارعه صفراً ، مبرراً إجابتي .

الحل :

$$a(t) = v'(t) = \sin t$$
$$a(t) = 0$$
$$\sin t = 0$$

وبتعويض هذه النتيجة في اقتران الموقع نجد أن :

$$s(t) = 4 - \sin t = 4 - 0 = 4$$

أي ان الجسيم يكون عند عندما يكون تسارعه صفراً

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

1 $f(x) = 9e^x + \frac{1}{3\sqrt{x}}$

2 $f(x) = 2e^x + \frac{1}{x^2}$

3 $f(x) = \frac{\pi}{2}\sin x - \cos x$

4 أجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران: $f(x) = 2e^x + x$ عندما $x = 2$.

5 أُثبِت عدم وجود مماس أفقي لمنحنى الاقتران: $f(x) = 3x + \sin x + 2$.

يُمثِّل الاقتران: $s(t) = 3t^2 - t^3, t \geq 0$ موقع جُسَيْم يتحرَّك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار، وt الزمن بالثواني:

6 أجد سرعة الجُسَيْم وتسارعه بعد t ثانية.

7 أجد الموقع (المواقع) الذي يكون عنده الجُسَيْم في حالة سكون لحظي.

إذا كان: $f(x) = \ln x^2$، حيث: $x > 0$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

8 أجد معادلة مماس منحنى الاقتران عندما $x = e^2$.

9 أجد الإحداثي x للنقطة التي يكون عندها المماس موازيًا للمستقيم: $6x - 2y + 5 = 0$

إذا كان: $f(x) = 2\sin x - 4\cos x$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

10 أجد ميل المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ عندما $x = 0$.

11 أجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران $f(x)$ عندما $x = \frac{\pi}{2}$.

الدرس 2 : مشتقتا الضرب والقسمة والمشتقات العليا

1. مشتقة ضرب اقترانين

تعلَّمْتُ سابقًا إيجاد مشتقات إقترانات مختلفة،

مثل :

- ❖ إقترانات القوَّة
- ❖ والاقتران الأُسِّي الطبيعي
- ❖ والاقتران اللوغاريتمي الطبيعي
- ❖ اقتران الجيب
- ❖ واقتران جيب التمام

تعلَّمْتُ أيضًا إيجاد مشتقات مضاعفات هذه الاقترانات والاقترانات الناتجة من جمعها وطرحها .

ولكن ، كيف يُمكِن إيجاد مشتقات الاقترانات الناتجة من ضرب هذه الاقترانات؟

نظرية : مشتقة الضرب

بالكلمات : مشتقة ضرب اقترانين قابلين للاشتقاق هي الاقتران الأوَّل مضروبًا في مشتقة الاقتران الثاني، ثم يضاف إليه الاقتران الثاني مضروبًا في مشتقة الاقتران الأوَّل .

بالرموز : اذا كان الاقتران $f(x)$ و الاقتران $g(x)$ قابلين للاشتقاق ، فإن $f(x)g(x)$ قابل للإشتقاق أيضاً ، وتكون مشتقته على النحو الاتي :

$$(fg)'(x) = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$$

2. مشتقة قسمة اقترانين

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{\begin{pmatrix}\text{مشتقة}\\ \text{المقام}\end{pmatrix}(\text{البسط}) + \begin{pmatrix}\text{مشتقة}\\ \text{البسط}\end{pmatrix}(\text{المقام})}{(\text{المقام})^2}$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

---

3. مشتقة المقلوب

$$\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = \frac{-f'(x)}{(f(x))^2}$$

---

4. مشتقة الاقترانات المثلثية

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$$

$$\frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$$

$$\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$$

$$\frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$$

مثال 1 : أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي :

$$(1)\ f(x) = (3x - 2x^2)(5 + 4x)$$

$$f'(x) = (3x - 2x^2)(4) + (5 + 4x)(3 - 4x)$$

$$f'(x) = 12x - 8x^2 + 15 - 20x + 12x - 16x^2$$

$$f'(x) = -24x^2 + 4x + 15$$

(2) $f(x) = xe^x$

$f'(x) = xe^x + e^x(1) = xe^x + e^x$

---

(3) $f(x) = (x^3 - 2x^2 + 3)(7x^2 - 4x)$

$f'(x) = (x^3 - 2x^2 + 3)(14x - 4) + (7x^2 - 4x)(3x^2 - 4x)$

$f'(x) = 14x^4 - 28x^3 + 42x - 4x^3 + 8x^2 - 12 + 21x^4 - 28x^3 - 12x^3 + 16x^2$

$f'(x) = 35x^4 - 72x^3 + 24x^2 + 42x - 12$

---

(4) $f(x) = \ln x \cos x$

$f'(x) = (\ln x)(-\sin x) + (\cos x)\left(\frac{1}{x}\right)$

$f'(x) = -\ln x \sin x + \frac{\cos x}{x}$

---

(5) $f(x) = \frac{1 - x^2}{1 + x^2}$

$f'(x) = \frac{(1 + x^2)(-2x) - (1 - x^2)(2x)}{(1 + x^2)^2}$

$f'(x) = \frac{-2x - 2x^3 - (2x - 2x^3)}{(1 + x^2)^2}$

$f'(x) = \frac{-2x - 2x^3 - 2x + 2x^3}{(1 + x^2)^2}$

$f'(x) = \frac{-4x}{(1 + x^2)^2}$

(6) $f(x) = \frac{\ln x}{1 + x}$

$f'(x) = \frac{(1 + x)\left(\frac{1}{x}\right) - (\ln x)(1)}{(1 + x)^2}$

$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} + 1 - \ln x}{(1 + x)^2}$

$= \frac{1 + x - x\ln x}{x(1 + x)^2}$

---

(7) $f(x) = \frac{x + 1}{2x + 1}$

$f'(x) = \frac{(2x + 1)(1) - (x + 1)(2)}{(2x + 1)^2}$

$f'(x) = \frac{2x + 1 - (2x + 2)}{(2x + 1)^2}$

$f'(x) = \frac{2x + 1 - 2x - 2}{(2x + 1)^2}$

$f'(x) = \frac{-1}{(2x + 1)^2}$

---

(8) $f(x) = \frac{\sin x}{e^x}$

$f'(x) = \frac{e^x(\cos x) - \sin x\,(e^x)}{(e^x)^2}$

$f'(x) = \frac{e^x(\cos x - \sin x)}{(e^x)^2}$

$f'(x) = \frac{\cos x - \sin x}{e^x}$

$$(9)\ f(x)=\frac{1}{1+x^2}$$

$$f'(x)=\frac{-(2x)}{(1+x^2)^2}=\frac{-2x}{(1+x^2)^2}$$

$$(10)\ f(t)=\frac{1}{t+\frac{1}{t}}$$

$$f'(t)=\frac{-\left(1-\frac{1}{t^2}\right)}{\left(t+\frac{1}{t}\right)^2}=\frac{-1+\frac{1}{t^2}}{\left(t+\frac{1}{t}\right)^2}$$

$$(11)\ f(x)=\frac{1}{5x-x^2}$$

$$f'(x)=\frac{-(5-2x)}{(5x-x^2)^2}=\frac{-5+2x}{(5x-x^2)^2}$$

$$(12)\ f(x)=\frac{1}{e^x+\sqrt{x}}$$

$$f'(x)=\frac{-\left(e^x+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{\left(e^x+\sqrt{x}\right)^2}$$

$$=\frac{-e^x-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\left(e^x+\sqrt{x}\right)^2}$$

$$(13)\ f(x)=x^2\sec x$$

$$f'(x)=x^2(\sec x\tan x)+(\sec x)(2x)$$

$$=x^2\sec x\tan x+2x\sec x$$

$$(14)\ f(x)=\frac{\csc x}{1+\tan x}$$

$$f'(x)=\frac{(1+\tan x)(-\csc x\cot x)-\csc x\sec^2 x}{(1+\tan x)^2}$$

$$=\frac{-\csc x\cot x-\csc x\cot x\tan x-\csc x\sec^2 x}{(1+\tan x)^2}$$

$$=\frac{-\csc x\cot x-\csc x-\csc x\sec^2 x}{(1+\tan x)^2}$$

$$(15)\ f(x)=x\cot x$$

$$f'(x)=x(-\csc^2 x)+(\cot x)(1)$$

$$=-x\csc^2 x+\cot x$$

$$(16)\ f(x)=\frac{\tan x}{1+\sin x}$$

$$f'(x)=\frac{(1+\sin x)(\sec^2 x)-(\tan x)(\cos x)}{(1+\sin x)^2}$$

$$=\frac{\sec^2 x+\sin x\ \sec^2 x-\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)(\cos x)}{(1+\sin x)^2}$$

$$=\frac{\sec^2 x+\sin x\ \sec^2 x-\sin x}{(1+\sin x)^2}$$

مثال 2 : أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي :

$$(1)\ f(x)=\frac{x^3}{2x-1}$$

$$f'(x)=\frac{(2x-1)(3x^2)-(x^3)(2)}{(2x-1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{6x^3-3x^2-2x^3}{(2x-1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{4x^3-3x^2}{(2x-1)^2}$$

$$(2)\ f(x) = x^3 \sec x$$
$$f'(x) = x^3(\sec x \tan x) + (\sec x)(3x^2)$$
$$= x^3 \sec x \tan x + 3x^2 \sec x$$

$$(3)\ f(x) = \frac{x+1}{\cos x}$$
$$f'(x) = \frac{(\cos x)(1) - (x+1)(-\sin x)}{(\cos x)^2}$$
$$f'(x) = \frac{\cos x + x \sin x + \sin x}{\cos^2 x}$$

$$(4)\ f(x) = e^x(\tan x - x)$$
$$f'(x) = (e^x)(\sec^2 x - 1) + (\tan x - x)(e^x)$$
$$f'(x) = e^x \sec^2 x - e^x + e^x \tan x - x e^x$$

$$(5)\ f(x) = \frac{\sin x + \cos x}{e^x}$$
$$f'(x) = \frac{(e^x)(\cos x - \sin x) - (\sin x + \cos x)(e^x)}{(e^x)^2}$$
$$f'(x) = \frac{-2\sin x}{e^x}$$

$$(6)\ f(x) = x^3 \sin x + x^2 \cos x$$
$$f'(x) = (x^3)(\cos x) + (\sin x)(3x^2) + (x^2(-\sin x) + (\cos x)(2x)$$
$$f'(x) = x^3 \cos x + 2x^2 \sin x + 2x \cos x$$

$$(7)\ f(x) = \sqrt[3]{x}(\sqrt{x} + 3)$$
$$f(x) = x^{\frac{5}{6}} + 3x^{\frac{1}{3}}$$
$$f'(x) = \frac{5}{6}x^{\frac{-1}{6}} + x^{-\frac{2}{3}} = \frac{5}{6\sqrt[6]{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$$

$$(8)\ f(x) = \frac{1 + \sec x}{1 - \sec x}$$
$$f'(x) = \frac{(1 - \sec x)(\sec x \tan x) - (1 + \sec x)(-\sec x \tan x)}{(1 - \sec x)^2}$$
$$f'(x) = \frac{2 \sec x \tan x}{(1 - \sec x)^2}$$

$$(9)\ f(x) = \frac{2 - \frac{1}{x}}{x - 3}$$
$$f(x) = \frac{2x - 1}{x^2 - 3x}$$
$$f'(x) = \frac{(x^2 - 3x)(2) - (2x - 1)(2x - 3)}{(x^2 - 3x)^2}$$
$$f'(x) = \frac{-2x^2 + 2x - 3}{(x^2 - 3x)^2}$$

$$(10)\ f(x) = (x^3 - x)(x^2 + 2)(x^2 + x + 1)$$
$$f(x) = (x^3 - x)(x^2 + 2)(x^2 + x + 1)$$
$$f'(x) = (x^3 - x)\big((x^2 + 2)(2x + 1) + (x^2 + x + 1)(2x)\big) + (x^2 + 2)(x^2 + x + 1)(3x^2 - 1)$$
$$f'(x) = (x^3 - x)(x^2 + 2)(2x + 1) + (x^3 - x)(x^2 + x + 1)(2x) + (x^2 + 2)(x^2 + x + 1)(3x^2 - 1)$$

$$(11)\ f(x) = (\csc x + \cot x)^{-1}$$
$$f(x) = \frac{1}{\csc x + \cot x}$$
$$f'(x) = \frac{-1(-\csc x \cot x - \csc^2 x)}{(\csc x + \cot x)^2}$$
$$f'(x) = \frac{\csc x \cot x + \csc^2 x}{(\csc x + \cot x)^2}$$
$$f'(x) = \frac{\csc x(\cot x + \csc x)}{(\csc x + \cot x)^2}$$
$$f'(x) = \frac{\csc x}{\cot x + \csc x}$$

مثال 3 : إذا كان $f(x)$ و $g(x)$ اقترانين قابلين للاشتقاق عندما $x = 0$ ، وكان :

$$g(0) = f(0) = 5\ ,\ f'(0) = -3$$

$g'(0) = 2\ ,\ -1$. فأجد كُلَّ ممّا يأتي :

$(1)\ (fg)'(0)$

$$= f(0)g'(0) + g(0)f'(0)$$
$$= 5(2) + (-1)(-3)$$
$$= 10 + 3$$
$$= 13$$

$(2)\ \left(\frac{f}{g}\right)'(0)$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(0) = \frac{g(0)f'(0) - f(0)g'(0)}{\left(g(0)\right)^2}$$
$$= \frac{(-1)(-3) - (5)(2)}{(-1)^2}$$
$$= \frac{3 - 10}{1}$$
$$= -7$$

$(3)\ (7f - 2fg)'(0)$

$$= (7f)'(0) - (2fg)'(0)$$
$$= 7(f)'(0) - 2\left((fg)'(0)\right)$$
$$= 7(-3) - 2(13)$$
$$= -21 - 26$$
$$= -47$$

5. المسائل الكلامية

مثال 1 : تعطى درجة حرارة مريض اثناء مرضه بالاقتران:

$$T(t) = \frac{4t}{1 + t^2} + 98.6$$

حيث t الزمن بالساعات بعد ظهور اعراض المرض و T درجة الحرارة بالفهرنهايت

(1) جد معدل تغير درجة الحرارة بالنسبة الى الزمن

الحل : أجد $T'(t)$

$$T(t) = \frac{4t}{1 + t^2} + 98.6$$
$$T'(t) = \frac{(1 + t^2)(4) - 4t(2t)}{(1 + t^2)^2} + 0$$
$$= \frac{4 + 4t^2 - 8t^2}{(1 + t^2)^2}$$
$$= \frac{4 - 4t^2}{(1 + t^2)^2}$$

---

(2) جد معدل تغير درجة الحرارة المريض عندما $t = 2$ مفسراً معنى الناتج .

الحل : أجد $T'(2)$

$$T'(t) = \frac{4 - 4t^2}{(1 + t^2)^2}$$
$$T'(2) = \frac{4 - 4(2)^2}{(1 + 2^2)^2} = \frac{-12}{25}$$
$$= -0.48$$

اذن عندما يكون الزمن $2h$ (بعد مرور ساعتين) فإن درجة حرارة المريض تقل بمقدار 0.48 درجة فهرنهايتية لكل ساعة

مثال 2 : يعطى عدد سكان مدينة صغيرة بالاقتران

$$p(t) = \frac{500t^2}{2t+9}$$

حيث t الزمن بالسنوات و p عدد السكان الالاف .

(1) أجد مُعدَّل تغيُّر عدد السكّان في المدينة بالنسبة إلى الزمن .

الحل : أجد $P'(t)$

$$P(t) = \frac{500t^2}{2t+9}$$

$$P'(t) = \frac{(2t+9)(1000t) - 500t^2(2)}{(2t+9)^2}$$

$$P'(t) = \frac{2000t^2 + 9000t - 1000t^2}{(2t+9)^2}$$

$$P'(t) = \frac{1000t^2 + 9000t}{(2t+9)^2}$$

---

(2) جد معدل تغير عدد السكان في المدينة عندما $t = 12$. مفسراً معنى الناتج .

الحل : أجد $P'(12)$

$$P'(t) = \frac{1000t^2 + 9000t}{(2t+9)^2}$$

$$P'(12) = \frac{1000(12)^2 + 9000(12)}{(2(12)+9)^2}$$

$$\approx 231$$

اذن عندما يكون الزمن $12\ h$ بعد مرور 12 ساعة فإن عدد السكان يزداد بمقدار 231 تقريباً

مثال 3 : نباتات هجينة : وجد فريق بحث زراعي أنَّه يُمكِن التعبير عن ارتفاع نبتة مُهجَّنة من نبات تبّاع الشمس h بالأمتار، باستعمال الاقتران :

$$h(t) = \frac{3t^2}{4+t^2}$$

حيث t الزمن بالأشهر بعد زراعة البذور . أجد مُعدَّل تغيُّر ارتفاع النبتة بالنسبة إلى الزمن .

الحل :

$$h'(t) = \frac{(4+t^2)(6t) - (3t^2)(2t)}{(4+t^2)}$$

$$h'(t) = \frac{24t}{(4+t^2)}$$

---

6. المشتقات العليا .

مثال 1 : أجد المشتقات الأربعة الأولى للاقتران

$$f(x) = x^2 - \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = 2x - \frac{(-1)(1)}{x^2} = 2x + \frac{1}{x^2}$$

$$f''(x) = 2 + \frac{(-1)(2x)}{x^4} = 2 - \frac{2x}{x^4}$$

$$f''(x) = 2 - \frac{2}{x^3}$$

$$f'''(x) = 0 + \frac{-(-2)(3x^2)}{x^6}$$

$$= \frac{6x^2}{x^6} = \frac{6}{x^4}$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{(-6)(4x^3)}{x^8}$$

$$= \frac{-24x^3}{x^8} = \frac{-24}{x^5}$$

مثال 2 : أجد المشتقات الثلاثة الأولى للاقتران

$$f(x) = x\sin x$$

$$f'(x) = x(\cos x) + (\sin x)(1)$$

$$f'(x) = x\cos x + \sin x$$

$$f''(x) = x(-\sin x) + (\cos x)(1) + \cos x$$

$$f''(x) = -x\sin x + 2\cos x$$

$$f^{(3)}(x) = -[x(\cos x) + (\sin x)(1)] - 2\sin x$$

$$f^{(3)}(x) = -x\cos x - \sin x - 2\sin x$$

$$f^{(3)}(x) = -x\cos x - 3\sin x$$

مثال 3 : أجد المشتقة الثانية لكل اقتران ممّا يأتي عند قيمة x المعطاة .

$$(1)\quad f(x) = \frac{x^2-4}{x^2+4} \quad , \quad x = -2$$

الحل :

$$f'(x) = \frac{(x^2+4)(2x) - (x^2-4)(2x)}{(x^2+4)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x^3+8x-2x^3+8x}{(x^2+4)^2}$$

$$= \frac{16x}{(x^2+4)^2}$$

$$f''(x) = \frac{(x^2+4)^2(16) - 16x\left(2(x^2+4)(2x)\right)}{(x^2+4)^4}$$

$$= \frac{16(x^2+4)^2 - 16x(4x)(x^2+4)}{(x^2+4)^4}$$

$$= \frac{16(x^2+4)\left((x^2+4)-4x^2\right)}{(x^2+4)^4}$$

$$= \frac{16\left((x^2+4)-4x^2\right)}{(x^2+4)^3}$$

$$= \frac{16(x^2+4-4x^2)}{(x^2+4)^3}$$

$$= \frac{16(x^2+4-4x^2)}{(x^2+4)^3} = \frac{16(4-3x^2)}{(x^2+4)^3}$$

$$f'(-2) = \frac{16(4-3(-2)^2)}{((-2)^2+4)^3}$$

$$= \frac{16(-8)}{(8)^3} = \frac{-16}{8^2} = \frac{-2}{8}$$

$$(2)\quad f(x) = \frac{1+x}{1+\sqrt[3]{x}} \quad , \quad x = 8$$

$$f(x) = \frac{1+\left(\sqrt[3]{x}\right)^3}{1+\sqrt[3]{x}}$$

$$f(x) = \frac{\left(1+\sqrt[3]{x}\right)\left(1-\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}\right)}{1+\sqrt[3]{x}}$$

$$f(x) = 1 - \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2}$$

$$f(x) = 1 - x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{2}{3}}$$

$$f'(x) = 0 - \frac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}} + \frac{2}{3}x^{\frac{-1}{3}}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{3}\left(\frac{-2}{3}\right)x^{\frac{-5}{3}} + \frac{2}{3}\left(\frac{-1}{3}\right)x^{\frac{-4}{3}}$$

$$f''(x) = \frac{2}{9}x^{\frac{-5}{3}} - \frac{2}{9}x^{\frac{-4}{3}} = \frac{2}{9x^{\frac{5}{3}}} - \frac{2}{9x^{\frac{4}{3}}}$$

$$f''\left(\underbrace{8}_{=2^3}\right) = \frac{2}{9(2^3)^{\frac{5}{3}}} - \frac{2}{9(2^3)^{\frac{4}{3}}}$$

$$f''(8) = \frac{2}{9(2^5)} - \frac{2}{9(2)^4}$$

$$f''(8) = \frac{1}{9(2^4)} - \frac{1}{9(2)^3}$$

$$f''(8) = \frac{1-2}{9\times 16} = \frac{-1}{144}$$

$(3)\;\; f(x) = \dfrac{1-x}{1+\sqrt{x}} \quad , \quad x = 4$

$f(x) = \dfrac{(1+\sqrt{x})(1-\sqrt{x})}{1+\sqrt{x}}$

$= 1 - \sqrt{x}$

$f'(x) = \dfrac{-1}{2\sqrt{x}}$

$f''(x) = \dfrac{-(-1)\left(\dfrac{2}{2\sqrt{x}}\right)}{(2\sqrt{x})^2} = \dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{x}}}{4x} = \dfrac{1}{4x\sqrt{x}}$

$f''(4) = \dfrac{1}{4(4)\sqrt{4}} = \dfrac{1}{16(2)} = \dfrac{1}{32}$

مثال 4 : أُلاحِظ المشتقة المعطاة في كلٍّ ممّا يأتي، ثم أجد المشتقة العليا المطلوبة :

$(1)\;\; f''(x) = 2 - \dfrac{2}{x} \quad , \quad f'''(x)$

$f'''(x) = 0 - \dfrac{-2(1)}{x^2}$

$f'''(x) = \dfrac{2}{x^2}$

$(2)\;\; f'''(x) = 2\sqrt{x} \quad , \quad f^{(4)}(x)$

$f^{(3)}(x) = 2x^{\frac{1}{2}}$

$f^{(4)}(x) = 2\left(\dfrac{1}{2}\right)x^{-\frac{1}{2}}$

$f^{(4)}(x) = \dfrac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

$(3)\;\; f^{(4)}(x) = 2x + 1 \quad , \quad f^{(6)}(x)$

$f^{(5)}(x) = 2$

$f^{(6)}(x) = 0$

مثال 5 : اذا كان الاقتران : $y = e^x \sin x$ ، فأجب عن السؤالين الآتيين تباعاً .

(1) أجد $\dfrac{dy}{dx}$ و $\dfrac{d^2y}{dx^2}$

$\dfrac{dy}{dx} = (e^x)(\cos x) + (\sin x)(e^x)$

$\dfrac{dy}{dx} = e^x(\cos x + \sin x)$

$\dfrac{d^2y}{dx^2} = e^x(-\sin x + \cos x) + e^x(\cos x + \sin x)$

$\dfrac{dy}{dx} = 2e^x \cos x$

---

(2) أثبت أن :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2\frac{dy}{dx} - 2y$$

$y = e^x \sin x$

$\dfrac{dy}{dx} = e^x \cos x + e^x \sin x$

$\dfrac{d^2y}{dx^2} = \left(e^x(-\sin x) + \cos x\,(e^x)\right) + \left(e^x(\cos x) + \sin x\,(e^x)\right)$

$= -e^x \sin x + e^x \cos x + e^x \cos x + e^x \sin x$

$\dfrac{d^2y}{dx^2} = 2e^x \cos x \quad \ldots\ldots(1)$

الان هل تساوي المعادلة ؟؟؟؟؟

$$\frac{d^2y}{dx^2} \overset{?}{=} 2\frac{dy}{dx} - 2y$$

$$2\frac{dy}{dx} - 2y$$

$$= 2(e^x \cos x + e^x \sin x) - 2(e^x \sin x)$$

$$= 2e^x \cos x + 2e^x \sin x - 2e^x \sin x$$

$$= 2e^x \cos x \quad \ldots\ldots (2)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2\frac{dy}{dx} - 2y$$

$$\underbrace{2e^x \cos x}_{(1)\ \text{من}} \checkmark\!= \underbrace{2e^x \cos x}_{(2)\ \text{من}}$$

مثال 6 : تبرير : اذا كان :

$$f(x) = \frac{ln\ x}{x^2}$$

فأجيب عن السؤالين الآتيين تباعاً :

(1) أثبت أن : $f''(x) = \frac{6ln\ x - 5}{x^4}$ ، مبرراً إجابتي

$$f'(x) = \frac{(x^2)\left(\frac{1}{x}\right) - (ln\ x)(2x)}{x^4}$$

$$= \frac{1 - 2\ ln\ x}{x^3}$$

$$f''(x) = \frac{(x^3)\left(\frac{-2}{x}\right) - (1 - 2ln\ x)(3x^2)}{x^6}$$

$$= \frac{-5x^2 + 6x^2 ln\ x}{x^6}$$

$$= \frac{-5 + 6ln\ x}{x^4}$$

(2) أجد قيمة المقدار الاتي :

$$x^4 f''(x) + 4x^3 f'(x) + 2x^2 f(x) + 1$$

الحل :

$$= x^4\left(\frac{-5 + 6ln\ x}{x^4}\right) + 4x^3\left(\frac{1 - 2\ ln\ x}{x^3}\right) + 2x^2\left(\frac{ln\ x}{x^2}\right) + 1$$

$$= -5 + 6\ln x + 4 - 8\ln x + 2\ln x + 1$$

$$= 0$$

أسئلة متنوعة

مثال 1 : أجد معادلة المماس لكل اقتران ممّا يأتي عند النقطة المعطاة .

(1) $f(x) = \frac{1 + x}{1 + e^x} \quad , \quad \left(0, \frac{1}{2}\right)$

$$f'(x) = \frac{(1 + e^x)(1) - (1 + x)(e^x)}{(1 + e^x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{1 - xe^x}{(1 + e^x)^2}$$

ميل المماس عند النقطة $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ هو :

$$f'(0) = \frac{1}{4}$$

معادلة المماس هي :

$$y - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}(x - 0)$$

$$y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$$

$(2)\ f(x) = e^x \cos x + \sin x \quad , \quad (0,1)$

الحل :

$f'(x) = (e^x)(-\sin x) + (\cos x)(e^x) + \cos x$

ميل المماس عند النقطة $(0,1)$ هو :

$f'(0) = (1)(0) + (1)(1) = 2$

معادلة المماس هي :

$y - 1 = 2(x - 0)$

$y = 2x + 1$

مثال 2 : أُثبِت صحة كلٍّ ممّا يأتي مُعتمِدًا أنَّ :

$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x \quad , \quad \frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$

$(1)\ \frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$

$f(x) = \cot x = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$

$f'(x) = \frac{\sin(x)(-\sin(x)) - \cos(x)(\cos(x))}{\sin^2 x}$

$f'(x) = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x}$

$f'(x) = \frac{-(\sin^2 x + \cos^2 x)}{\sin^2 x}$

$f'(x) = \frac{-1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x$

$(2)\ \frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$

$f(x) = \sec x = \frac{1}{\cos(x)}$

$f'(x) = \frac{-1(-\sin(x))}{\cos^2 x}$

$f'(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$

$f'(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \cdot \frac{1}{\cos(x)}$

$f'(x) = \tan(x).\sec(x)$

$f'(x) = \sec(x)\tan(x)$

$(3)\ \frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$

$f(x) = \csc x = \frac{1}{\sin(x)}$

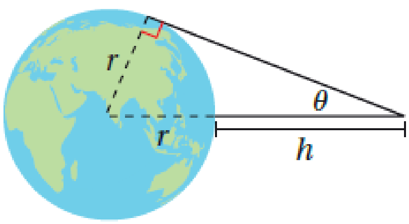
$f'(x) = \frac{-1(\cos(x))}{\sin^2 x}$

$f'(x) = \frac{-\cos x}{\sin^2 x}$

$f'(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \cdot \frac{-1}{\sin(x)}$

$f'(x) = -\cot(x).\csc(x)$

مثال 3 : أقمار صناعية : عندما ترصد الأقمارُ الصناعيةُ الأرضَ ، فإنَّه يُمكِنها مسح جزء فقط من سطح الأرض . وبعض الأقمار الصناعية تحوي مُستشعِرات لقياس الزاوية θ (بالراديان) المُبيَّنة في الشكل المجاور . إذا كان h يُمثِّل المسافة بين القمر الصناعي وسطح الأرض بالكيلومتر ، و r يُمثِّل نصف قُطْر الأرض بالكيلومتر، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعاً :



(1) أثبت أن $h = r(\csc\theta - 1)$

$$\sin\theta = \frac{r}{r+h}$$
$$\sin\theta = \frac{1}{\csc\theta} = \frac{r}{r+h}$$
$$\frac{1}{\csc\theta} = \frac{r}{r+h}$$
$$r + h = r(\csc\theta)$$
$$h = r\csc\theta - r$$
$$h = r(\csc\theta - 1)$$

---

(2) أجد معدل تغير h بالنسبة الى θ عندما $\theta = \frac{\pi}{6} rad$ (افترض أن $r = 6371\ km$).

$$h = r(\csc\theta - 1)$$
$$\frac{dh}{d\theta} = r(-\csc\theta\cot\theta - 0)$$
$$\frac{dh}{d\theta} = -r\csc\theta\cot\theta$$
$$\left.\frac{dh}{d\theta}\right|_{\theta=\frac{\pi}{6}} = -(6371)\csc\left(\frac{\pi}{6}\right)\cot\left(\frac{\pi}{6}\right)$$
$$= -6371(2)(\sqrt{3})$$
$$= -2\sqrt{3}(6371)$$

مثال 4 : اذا كان : $f(x) = 9\ln x + \frac{1}{2x^2}$

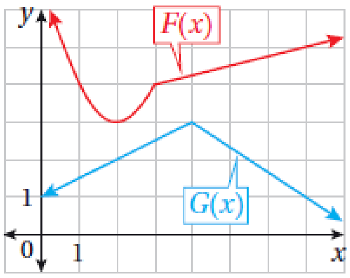
فأثبت أن :

$$f'(x) = \frac{(3x-1)(3x+1)}{x^3}$$

$$f(x) = 9\ln x + \frac{1}{2x^2}$$

$$f'(x) = 9\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{-1(4x)}{(2x^2)^2}$$
$$f'(x) = \frac{9}{x} + \frac{-4x}{4x^4}$$
$$f'(x) = \frac{9\times x^2}{x\times x^2} - \frac{1}{x^3}$$
$$f'(x) = \frac{9x^2 - 1}{x^3}$$
$$= \frac{(3x-1)(3x+1)}{x^3}$$

مثال 5 : يُبيِّن الشكل المجاور منحني الاقترانين $G(x)$, $F(x)$



اذا كان $P(x) = F(x)G(x)$ ، وكان $Q(x) = \frac{F(x)}{G(x)}$ ، فأجد كلاً مما يأتي :

(1) $P'(2)$

$$p(x) = F(x)G(x)$$
$$p'(x) = F(x)G'(x) + G(x)F'(x)$$
$$p'(2) = F(2)G'(2) + G(2)F'(2)$$

من خلال الشكل :

$F(2) = 3$, $G(2) = 2$, $F'(2) = 0$

$G(x)$ اقتران متزايد عند الفترة التي تحتوي 2 :

$$G'(2) = M = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

نأخذ نقطتين $(0,1)$, $(2,2)$ تحقق G

$$G'(2)=\frac{2-1}{2-0}=\frac{1}{2}$$

$$p'(2)=3\left(\frac{1}{2}\right)+2(0)=\frac{3}{2}$$

---

(2) $Q(x)=\frac{F(x)}{G(x)}$, $Q'(7)=??$

$$Q'(x)=\frac{G(x)F'(x)-F(x)G'(x)}{G^2(x)}$$

$$Q'(7)=\frac{G(7)F'(7)-F(7)G'(7)}{G^2(7)}$$

من خلال الشكل : $F(7)=5$, $G(7)=1$

النقاط $(3,4)$, $(7,5)$ ، $F'(7)=\frac{\Delta y}{\Delta x}$

$$F'(7)=\frac{5-4}{7-3}=\frac{1}{4}$$

النقاط $(4,3)$, $(7,1)$ ، $G'(7)=\frac{\Delta y}{\Delta x}$

$$G'(7)=\frac{3-1}{4-7}=\frac{-2}{3}$$

$$Q'(7)=\frac{(1)\left(\frac{1}{4}\right)-(5)\left(\frac{-2}{3}\right)}{(1)^2}$$

$$Q'(7)=\frac{1}{4}+\frac{10}{3}=\frac{43}{12}$$

مهارات التفكير العليا

مثال 1 : تبرير : اذا كان $y=\frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}$ ، فأجيب عن السؤالين الآتيين تباعاً :

(1) أجد ميل المماس عند نقطة الاصل

$$M=\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(0,0)}$$

ميل المماس عند $(0,0)$ ←

$$y=\frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}$$

$$y=\frac{1-\frac{1}{e^x}}{1+\frac{1}{e^x}}=\frac{\frac{e^x-1}{e^x}}{\frac{e^x+1}{e^x}}$$

$$y=\frac{e^x-1}{e^x+1}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(e^x+1)e^x-(e^x-1)e^x}{(e^x+1)^2}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{e^{2x}+e^x-e^{2x}+e^x}{(e^x+1)^2}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2e^x}{(e^x+1)^2}$$

$$M=\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=\frac{2e^0}{(e^0+1)^2}=\frac{2}{(2)^2}=\frac{1}{2}$$

$$M=\frac{1}{2}$$ ← ميل المماس عند $(0,0)$

مثال 2 : أبين عدم وجود مماس افقي للاقتران y ، مبرراً إجابتي

اذا وجد مماس افقي فإن ميله يساوي صفراً ، أي أن $\frac{2e^x}{(e^x+1)^2}=0$ وهذا لا يتحقق الا اذا كان $e^x=0$ ولكن $e^x>0$ لجميع الاعداد الحقيقية x ، ولذا لا يوجد لهذا المنحنى مماسات افقية .

مثال 3 : تحد : اذا كان $y=\frac{x+1}{x-1}$ ، حيث : $x\neq 1$ ، فأجيب عن الأسئلة الثلاثة الاتية تباعاً

(1) أجد $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(x-1)(1)-(x+1)(1)}{(x-1)^2}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x-1-x-1}{(x-1)^2}=\frac{-2}{(x-1)^2}$$

---

(2) اعيد كتابة المعادلة بالنسبة للمتغير x (x اقتران بالنسبة الى y)، ثم أجد $\frac{dy}{dx}$.

$$\frac{y}{1}=\frac{x+1}{x-1}$$

$$y(x-1)=x+1$$

$$yx-y=x+1$$

$$+y \qquad +y$$

$$yx = y+1+x$$

$$-x \qquad -x$$

$$yx-x=y+1$$

$$\frac{x(y-1)}{y-1}=\frac{y+1}{y-1} \rightarrow x=\frac{y+1}{y-1}$$

$$\frac{dx}{dy}=\frac{(y-1)(1)-(y+1)(1)}{(y-1)^2}$$

$$\frac{dx}{dy}=\frac{y-1-y-1}{(y-1)^2}=\frac{-2}{(y-1)^2}$$

(3) أبين أن $\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-2}{(x-1)^2} \quad , \quad \frac{dx}{dy}=\frac{-2}{(y-1)^2}$$

لدينا معادلتين بدلالة متغيرين مختلفين لازم يكونو الجهتين بدلالة المتغير x

$\frac{dy}{dx}$ بدلالة x done

$$\frac{dx}{dy}=\frac{-2}{(y-1)^2} \quad , \quad y=\frac{x+1}{x-1}$$

$$\frac{dx}{dy}=\frac{-2}{\left(\frac{x+1}{x-1}-1\right)^2}$$

$$=\frac{-2}{\left(\frac{x+1-(x-1)}{x-1}\right)^2}$$

$$=\frac{-2}{\left(\frac{x+1-x+1}{x-1}\right)^2}=\frac{-2}{\left(\frac{2}{x-1}\right)^2}$$

$$=\frac{-2}{\frac{4}{(x-1)^2}}=\frac{-2}{1}\times\frac{(x-1)^2}{4}$$

$$\frac{dx}{dy}=\frac{-(x-1)^2}{2}$$

$$\frac{dx}{dy}=\frac{-(x-1)^2}{2} \quad , \quad \frac{dy}{dx}=\frac{-2}{(x-1)^2}$$

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}=\frac{1}{\frac{-2}{(x-1)^2}}$$

$$\frac{-2}{(x-1)^2}=\frac{-2}{(x-1)^2} \quad done$$

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

1) $f(x) = \frac{\sin x}{x}$

2) $f(x) = -\csc x - \sin x$

3) $f(x) = \frac{x + c}{x + \frac{c}{x}}$

4) $f(x) = x \cot x$

5) $f(x) = 4x - x^2 \tan x$

6) $f(x) = \frac{\cos x}{x^2}$

7) $f(x) = x\left(1 - \frac{4}{x+3}\right)$

8) $f(x) = \frac{3(1 - \sin x)}{2 \cos x}$

9) $f(x) = (x + 1)e^x$

أجد معادلة المماس لكل اقتران ممّا يأتي عند النقطة المعطاة:

10) $f(x) = x^2 \cos x,\ \left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$

11) $f(x) = \frac{1 + \sin x}{\cos x},\ (\pi, -1)$

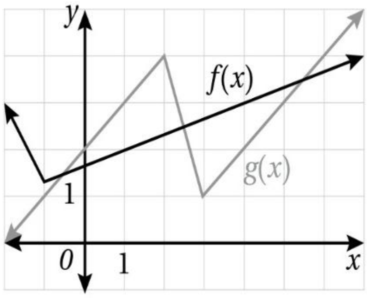
أجد إحداثيي النقطة (النقاط) التي يكون عندها لمنحنى كل اقتران ممّا يأتي مماس أفقي:

12) $f(x) = \frac{2x - 1}{x^2}$

13) $h(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$

14) $g(x) = \frac{8(x - 2)}{e^x}$

يُبيِّن الشكل المجاور منحنيي الاقترانين: $f(x)$، و $g(x)$. إذا كان: $u(x) = f(x)g(x)$، وكان: $v(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:



15) $u'(1)$

16) $v'(4)$

17) إذا كان: $f(x) = x \sec x$، فأُثبِت أنَّ: $f'(x) = \sec x\,(1 + x \tan x)$.

18) إذا كان: $f(x) = \frac{\ln x}{x}$، حيث: $x > 0$، فأجد $f'(x)$، و $f''(x)$.

يُمثِّل الاقتران: $v(t) = \frac{10}{2t + 15}$, $t \geq 0$ سرعة سيّارة بدأت الحركة في مسار مستقيم، حيث تقاس v بالقدَم لكل ثانية:

19) أجد تسارع السيّارة عندما $t = 5$.

20) أجد تسارع السيّارة عندما $t = 20$.

21) يعطى طول مستطيل بالمقدار $6t + 5$، ويعطى عرضه بالمقدار $\sqrt{t}$، حيث t الزمن بالثواني، والأبعاد بالسنتيمترات. أجد مُعدَّل تغيُّر مساحة المستطيل بالنسبة إلى الزمن.

الدرس الثالث : قاعدة السلسلة

1. قاعدة السلسلة

إذا كان الاقتران $f(x)$, $g(x)$ اقترانين ، فإنه

يمكن إيجاد مشتقة الاقتران المركب :

$(fog)(x) = f(g(x))$ باستعمال القاعدة

الاتية :

$$(fog)'(x) = f'(g(x)) * g'(x)$$

2. قاعدة سلسلة والاقترانات المشهورة

اذا كان الاقتران $g(x)$ اقتراناً قابلاً للإشتقاق فإن :

$f(x) = \sin g(x)$

$f'(x) = cos(g(x)) \times g'(x)$

$f(x) = csc\ g(x)$

$f'(x) = -csc(g(x))cot(g(x)) \times g'(x)$

$f(x) = cos\ g(x)$

$f'(x) = -sin(g(x)) \times g'(x)$

$f(x) = sec\ g(x)$

$f'(x) = sec\ (g(x))\ tan\ (g(x)) \times g'(x)$

$f(x) = tan\ g(x)$

$f'(x) = sec^2\ (g(x)) \times g'(x)$

$f(x) = cot\ g(x)$

$f'(x) = -csc^2\ (g(x)) \times g'(x)$

$f(x) = e^{g(x)}$

$f'(x) = e^{g(x)} \times g'(x)$

$f(x) = ln\ g(x)$

$f'(x) = \dfrac{g'(x)}{g(x)}$

مثال1 : أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي :

(1) $f(x) = cos\ 2x$

$f'(x) = -2\ sin\ 2x$

---

(2) $f(x) = e^{x+x^2}$

$f'(x) = e^{x+x^2} \times (1 + 2x)$

---

(3) $f(x) = \ln \sin x$

$f'(x) = \dfrac{1}{\sin x}\left(\dfrac{\cos x}{1}\right)$

$= \dfrac{cos\ x}{sin\ x} = \cot x$

---

(4) $f(x) = \tan 3x^2$

$f'(x) = sec^2(3x^2)(6x)$

$f'(x) = 6x \sec^2(3x^2)$

---

(5) $f(x) = e^{ln\ x}$

$f(x) = e^{ln\ x} = x$

$f'(x) = 1$

---

(6) $f(x) = ln(cot\ x)$

$f'(x) = \dfrac{1}{cot\ x}\left(\dfrac{-csc^2 x}{1}\right)$

$f'(x) = \dfrac{-csc^2 x}{cot\ x}$

---

(7) $f(x) = e^{4x+2}$

$f'(x) = 4\ e^{4x+2}$

3. قاعدة سلسلة القوّة

إذا كان n أي عدد حقيقي وكان $u = g(x)$ اقترانا قابلاً للاشتقاق فإن :

$$f(x) = (g(x))^n$$

$$f'(x) = n(g(x))^{n-1} \times g'(x)$$

مثال 1 : أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي :

(1) $f(x) = \sqrt[3]{(x^2-1)^2}$

$$f(x) = (x^2-1)^{2/3}$$

$$f'(x) = \frac{2}{3}(x^2-1)^{-1/3} \times 2x$$

$$f'(x) = \frac{4x}{3\sqrt[3]{x^2-1}}$$

---

(2) $f(x) = tan^4 x = (tan\, x)^4$

$$f'(x) = 4tan^3 x \times sec^2 x$$

---

(3) $f(x) = \sqrt{ln\, x} = (ln\, x)^{1/2}$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(ln\, x)^{-\frac{1}{2}} \times \frac{1}{x}$$

$$= \frac{1}{2x\sqrt{ln\, x}}$$

---

(4) $f(x) = \sqrt[5]{(x^2-1)^2}$

$$= (x^2-1)^{2/5}$$

$$f'(x) = \frac{2}{5}(x^2-1)^{-3/5} \times 2x$$

$$f'(x) = \frac{4x}{5\sqrt[5]{(x^2-1)^3}}$$

(8) $f(x) = 50e^{2x-10}$

$$f'(x) = (5)(2)\, e^{2x-10}$$

$$f'(x) = 10\, e^{2x-10}$$

---

(9) $f(x) = cos(x^2 - 3x - 4)$

$$f'(x) = -(2x-3)\left(sin(x^2-3x-4)\right)$$

$$f'(x) = (3-2x)\, sin(x^2-3x-4)$$

---

(10) $f(x) = 10x^2 e^{-x^2}$

$$f'(x) = (10x^2)(-2xe^{-x^2}) + (e^{-x^2})(20x)$$

$$f'(x) = 20xe^{-x^2}(1-x^2)$$

---

(11) $f(x) = x^2 tan\left(\frac{1}{x}\right)$

$$f'(x) = (x^2)\left(-\frac{1}{x^2}sec^2\frac{1}{x}\right) + \left(tan\frac{1}{x}\right)(2x)$$

$$f'(x) = -sec^2\frac{1}{x} + 2xtan\left(\frac{1}{x}\right)$$

---

(12) $f(x) = ln\left(\frac{1+e^x}{1-e^x}\right)$

$$f(x) = ln\left(\frac{1+e^x}{1-e^x}\right)$$

$$= ln(1+e^x) - ln(1-e^x)$$

$$f'(x) = \frac{e^x}{1+e^x} + \frac{e^x}{1-e^x}$$

$$f'(x) = \frac{2e^x}{1-e^{2x}}$$

(5) $f(x) = \sqrt{\cos x}$

$= (\cos x)^{1/2}$

$f'(x) = \frac{1}{2}(\cos x)^{-1/2} \times -\sin x$

$f'(x) = \frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}}$

---

(6) $f(x) = (\ln x)^5$

$f'(x) = 5\ln^4 x \times \frac{1}{x}$

$f'(x) = \frac{5\ln^4 x}{x}$

---

(7) $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x}}$

$f'(x) = \frac{-\frac{1}{x^2}}{2\sqrt{1+\frac{1}{x}}} = \frac{-1}{2x^2\sqrt{1+\frac{1}{x}}}$

---

(8) $f(x) = (\ln x)^4$

$f'(x) = \frac{4}{x}(\ln x)^3$

---

(9) $f(x) = \sqrt[5]{x^2+8x}$

$f(x) = \sqrt[5]{x^2+8x} = (x^2+8x)^{\frac{1}{5}}$

$f'(x) = \frac{2x+8}{5\sqrt[5]{(x^2+8x)^4}}$

4. الاستعمال المُتكرِّر لقاعدة السلسلة

مثال 1 : أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي :

(1) $f(x) = e^{\csc 4x}$

$f'(x) = e^{\csc 4x} \times -\csc 4x \times \cot 4x \times 4$

$= -4e^{\csc 4x}\csc 4x \cot 4x$

---

(2) $f(x) = \sin\left(\tan\sqrt{3x^2+4}\right)$

$f(x) = \sin\left(\tan(3x^2+4)^{\frac{1}{2}}\right)$

$f'(x) = \cos\left(\tan(3x^2+4)^{\frac{1}{2}}\right) \times \sec^2(3x^2+4)^{\frac{1}{2}} \times \frac{1}{2}(3x^2+4)^{\frac{-1}{2}}(6x)$

$= \frac{3x\cos\left(\tan\sqrt{3x^2+4}\right) \times \sec^2\sqrt{3x^2+4}}{\sqrt{3x^2+4}}$

---

(3) $f(x) = \cos^2(7x^3+6x-1)$

$f(x) = \left(\cos(7x^3+6x-1)\right)^2$

$f'(x) = 2\left(\cos(7x^3+6x-1)\right)^1(-\sin(7x^3+6x-1)(21x^2+6)$

$= -2(21x^2+6)\sin(7x^3+6x-1)\cos(7x^3+6x-1)$

$= -(21x^2+6)\sin 2(7x^3+6x-1)$

---

(4) $f(x) = (1+(x^2+1)^4)^3$

$f'(x) = 3(2+(x^2+1)^4)^2\left(4(x^2+1)(2)\right)$

$= 24x(x^2+1)^3(2+(x^2+1)^4)^2$

---

(5) $f(x) = 3x - 5\cos(\pi x)^2$

$f'(x) = 3 + 5(2)(\pi x)(\pi)\sin(\pi x)^2$

$f'(x) = 3 + 10\pi^2 x\cos(\pi x)^2$

---

(6) $f(x) = \sin(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{\sin x})$

$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\cos\sqrt[3]{x} + \frac{\cos x}{3\sqrt[3]{\sin^2 x}}$

$$(7)\ f(x)=\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)^2$$

$$f'(x)=2\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)^1\left(\frac{(1+\cos x)\cos x-\sin x(-\sin x)}{(1+\cos x)^2}\right)$$

$$f'(x)=\frac{2\sin x}{1+\cos x}\cdot\left(\frac{\cos x+\cos^2 x+\sin^2 x}{(1+\cos x)^2}\right)$$

$$f'(x)=\frac{2\sin x}{1+\cos x}\cdot\frac{\cos x+1}{(1+\cos x)^2}$$

$$f'(x)=\frac{2\sin x}{(1+\cos x)^2}$$

$$(8)\ f(x)=\log_3(1+x\ln x)$$

$$f'(x)=\frac{(x)\left(\frac{1}{x}\right)+(\ln x)(1)}{(\ln 3)(1+x\ln x)}$$

$$=\frac{1+\ln x}{(\ln 3)(1+x\ln x)}$$

$$(9)\ f(x)=e^{\sin 2x}+\sin(e^{2x})$$

$$f'(x)=2e^{\sin 2x}\cos 2x+2e^{2x}\cos(e^{2x})$$

$$(10)\ f(x)=\tan^4(\sec(\cos x))$$

$$f'(x)=4\left(\tan(\sec(\cos x))\right)^3\sec^2(\sec(\cos x))\times\sec(\cos x)\tan(\cos x)\times(-\sin x)$$

$$=-4\tan^3(\sec(\cos x))\sec^2(\sec(\cos x))\times\sec(\cos x)\tan(\cos x)\times\sin x$$

5. معادلة المماس ومعادلة العمودي على المماس

مثال 1 :

(1) جد ميل المماس لمنحنى الاقتران :

$f(x)=e^{-0.2x}.\sin 4x$ ، عندما $x=\frac{\pi}{8}$

الحل :

$$f'(x)=e^{-0.2x}.\cos 4x(4)+\sin 4x\left(e^{-0.2x}.(-0.2)\right)$$

$$f'(x)=4e^{-0.2x}\cos 4x-0.2e^{-0.2x}\sin 4x$$

$$f'\left(\frac{\pi}{8}\right)=4e^{-0.2\left(\frac{\pi}{8}\right)}\cos 4\frac{\pi}{8}-0.2e^{-0.2\left(\frac{\pi}{8}\right)}\sin 4\frac{\pi}{8}$$

$$\therefore\ f'\left(\frac{\pi}{8}\right)=-0.2\,e^{-0.025\pi}$$

---

(2) جد معادلة العمودي على المماس لمنحنى

الاقتران $f(x)=\left(\frac{3x-1}{x^2+3}\right)^2$ عندما $x=0$

$$f'(x)=2\left(\frac{3x-1}{x^2+3}\right)\left(\frac{(x^2+3)(3)-(3x-1)(2x)}{(x^2+3)^2}\right)$$

$$f'(0)=2\left(\frac{3(0)-1}{0+3}\right)\left(\frac{(0+3)(3)-(0-1)(0)}{(0+3)^2}\right)$$

$$f'(0)=\frac{-2}{3}$$

مثال 2 :

(1) جد ميل المماس لمنحنى الاقتران

$f(x)=(2x+1)^5(x^3-x+1)^4$

عندما $x=1$

$$f'(x)=(2x+1)^5(4)(x^3-x+1)^3(3x^2-1)+(x^3-x+1)^4(5)(2x+1)^4(2)$$

$$f'(1)=(3)^5(4)(1)^3(2)+(1)^4(5)(3)^4(2)$$

$$\therefore\ f'(1)=2754$$

(2) جد معادلة العمودي على المماس لمنحنى

الاقتران $f(x)=\frac{\cos^2 x}{e^{2x}}$ عندما $x=\frac{\pi}{2}$

$$f'(x)=\frac{e^{2x}\times 2(\cos x)^1(-\sin x)-(\cos x)^2\times 2e^{2x}}{e^{4x}}$$

$$f'(x)=\frac{-\sin 2x-2(\cos x)^2}{e^{2x}}$$

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{-\sin \pi-2\left(\cos\frac{\pi}{2}\right)^2}{e^{\pi}}$$

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$$

مثال 3 : أجد معادلة المماس لكل اقتران ممّا يأتي عند قيمة x المعطاة

(1) $f(x)=4e^{-0.5x^2}$, $x=-2$

$$f'(x)=-4e^{-0.5x^2}(-0.5(2x))$$

$$f'(x)=4xe^{-0.5x^2}$$

$$M_1=f'^{(-2)}=4(-2)e^{-0.5(-2)^2}$$

$$=8e^{-2}$$

$$y-y_1=M_1(x-x_1)\quad : \quad x_1=-2$$

$$f(-2)=y_1=4e^{-2}$$

$$y-\frac{4}{e^2}=\frac{8}{e^2}(x+2)$$

معادلة المماس : $y=\frac{8}{e^2}(x+2)+\frac{4}{e^2}$

معادلة العمودي $y-y_1=M_2(x-x_1)$

$$M_1\times M_2=-1\quad , \quad M_2=\frac{-e^2}{8}$$

$$y-\frac{4}{e^2}=\frac{-e^2}{8}(x+2)$$

$$y=\frac{-e^2}{8}(x+2)+\frac{4}{e^2}$$

(2) $f(x)=x+\cos 2x$, $x=0$

$$f'(x)=1-2\sin 2x$$

$$m=f'(0)=1-2\sin(2(0))$$

$$=1-2(0)=1$$

$$y-y_1=m(x-x_1)\quad : \quad x_1=0$$

$$f(0)=0+1=1$$

$$y-1=1(x-0)$$

$$y=x+1$$

معادلة العمودي $y-y_1=m_1(x-x_1)$

$$m\times m_1=-1\quad , \quad m_1=-1$$

$$y-1=-1(x+0)$$

$$y=-x+1$$

---

(3) $f(x)=2^x$, $x=0$

$$f'(x)=2^x\ln 2$$

$$M_1=f'(0)=2^0\ln 2$$

$$\rightarrow M_1=\ln 2$$

$$y-y_1=M_1(x-x_1)\quad : \quad x=0$$

$$y-y_1=\ln 2\,(x-0)$$

$$y_1=f(0)=2^0=1$$

$$y-1=x\ln 2$$

$$y=x\ln 2+1$$

$$M_1\times M_2=-1\quad , \quad M_2=\frac{-1}{\ln 2}$$

$$y-y_1=M_2(x-x_1)$$

$$y-1=\frac{-1}{\ln 2}(x-0)$$

$$y=\frac{-x}{\ln 2}+1$$

$(4)\ f(x) = \sqrt{x+1}\,.\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \quad , \quad x = 3$

$$f(x) = (x+1)^{\frac{1}{2}} \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$$

$$f'(x) = (x+1)^{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\pi x}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) + \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right).\frac{1}{2}(x+1)^{\frac{-1}{2}}(1)$$

$$f'(x) = \frac{\pi}{2}\sqrt{x+1}\cos\frac{\pi x}{2} + \frac{\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{2\sqrt{x+1}}$$

$$M_1 = f'^{(3)}$$

$$= \frac{\pi}{2}\sqrt{4}\cos\frac{3\pi}{2} + \frac{\sin\frac{3\pi}{2}}{2\sqrt{4}}$$

$$M_1 = \frac{-1}{4}$$

$$y - y_1 = M_1(x - x_1) \quad , \quad x_1 = 3$$

$$y + 2 = \frac{-1}{4}(x-3)\ , y_1 = f(3) = -2$$

$$y + 2 = \frac{-1}{4}x + \frac{3}{4}$$

$$y = \frac{-1}{4}x - \frac{5}{4}$$

$$M_1 \times M_2 = -1$$

$$\frac{-1}{4} \times M_2 = -1 \ \rightarrow M_2 = 4$$

$$y + 2 = 4(x-3)$$

$$y + 2 = 4x - 12$$

$$y = 4x - 14$$

مثال 4 : اذا كان الاقتران $y = e^{\sin x}$ ، فأجد ميل مماس منحنى الاقتران عند النقطة $(0, 1)$

$$y' = (\cos x)e^{\sin x}$$

$$m = f'(0) = (\cos 0)e^{\sin 0} = 1$$

$$\rightarrow m = 1$$

6. المسائل الكلامية :

مثال 1 : أعمال : طرحت إحدى الشركات مُنتَجًا جديدًا في الأسواق، ثم رصدت عدد القطع المَبيعة منذ طرحه . إذا مثَّل الاقتران :

$$N(t) = \frac{250000\,t^2}{(2t+1)^2} \quad , \quad t > 0$$

عدد القطع المَبيعة منذ طرحه، حيث t الزمن بالأسابيع، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا :

(1) جد معدل تغير عدد القطع المبيعة بالنسبة إلى الزمن

$$N(t) = \frac{250000t^2}{(2t+1)^2}$$

$$N'(t) = \frac{(2t\ +\ 1)^2(250,000(2t)) - (250,000\ t^2)\left(2(2t+1)^1(2)\right)}{((2t+1)^2)^2}$$

$$= \frac{(2t+1)^2(500,000\ t) - (250000t^2)2(2t+1)(2)}{(2t+1)^4}$$

$$= \frac{(2t+1)^2(500,000\ t) - (1000000t^2)(2t+1)}{(2t+1)^4}$$

$$= \frac{(2t+1)(500,000\ t)\left((2t+1) - 2t\right)}{(2t+1)^4}$$

$$= \frac{500,000\ (2t^2 + t - 2t^2)}{(2t+1)^3}$$

$$= \frac{500000\ t}{(2t+1)^3}$$

---

(2) جد $N'(52)$ مفسراً معنى الاجابة :

$$N'(t) = \frac{500000\ t}{(2t+1)^3}$$

$$N'(52) = \frac{500000(52)}{(2(52)+1)^3} \approx 22$$

$$N'(52) \approx 22 \quad , \quad N' > 0$$

مثال 2 : تحسب قيمة بدل الخدمة لأحد المنتجات تُحسب بالدينار باستعمال الاقتران :

$$U(x) = 80\sqrt{\frac{2x+1}{3x+4}}$$

حيث x عدد القطع المبيعة من المنتج :

(1) جد معدل تغير قيمة بدل الخدمة بالنسبة إلى عدد القطع المبيعة من المنتج .

الحل :

$$U(x) = 80\left(\frac{2x+1}{3x+4}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$U'(x)$$

$$= 80\frac{1}{2}\left(\frac{2x+1}{3x+4}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{(3x+4)(2)-(2x+1)(3)}{(3x+4)^2}\right)$$

$$= 40\left(\frac{2x+1}{3x+4}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{6x+8-6x-3}{(3x+4)^2}\right)$$

$$U'(x) = \frac{200}{(3x+4)^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{2x+1}{3x+4}}}$$

$$= \frac{200}{(3x+4)^2\sqrt{\frac{2x+1}{3x+4}}}$$

---

(2) جد $u'(20)$ مفسراً معنى الناتج :

$$u'(20) = \frac{200}{(3(20)+4)^2\sqrt{\frac{2(20)+1}{3(20)+4}}}$$

$$= \frac{200}{(64)^2\sqrt{\frac{41}{64}}}$$

$$u'(20) > 0$$

مثال 3 : يمثل الاقتران $A(t) = Ne^{0.1t}$ عدد خلايا البكتيريا بعد t ساعة في مجتمع بكتيري

(1) جد معدل نمو المجتمع بعد 3 ساعات بدلالة الثابت N

$$A'(t) = N(e^{a.1t})(0.1)$$

$$A'(3) = N\left(e^{0.1(3)}\right)(0.1)$$

$$= Ne^{0.3}(0.1)$$

---

(2) إذا كان معدل نمو المجتمع بعد k ساعة هو 0.2 خلية لكل ساعة ، فما قيمة k بدلالة N

$$A'(t) = 0.1Ne^{0.1t} \quad , t = k$$

$$A'(k) = \frac{0.1Ne^{0.1k}}{0.1N} = \frac{0.2}{0.1N}$$

$$e^{0.1k} = \frac{2}{N}$$

$$\text{Ln } e^{0.1k} = \text{Ln}\left(\frac{2}{N}\right)$$

$$\frac{0.1k}{0.1} = \frac{\text{Ln}\frac{2}{N}}{0.1} \quad \rightarrow \quad k = \frac{\text{Ln}\frac{2}{N}}{0.1}$$

7. مشتقة $a^{(g(x))}$

إذا كان a عدد حقيقيا موجباً و $1 \neq a$ وكان

$g(x)$ اقترانا قابلاً للاشتقاق فإن :

$(1)\ f(x) = a^x$

$f'(x) = (a^x) = a^x \times \ln a$

$(2)\ f(x) = a^{g(x)}$

$f'(x) = \ln a \times a^{g(x)} \times g'(x)$

مثال 1 : أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي :

$(1)\ f(x) = 8^{5x}$

$f'(x) = (\ln 8)\, 8^{5x}(5)$

$f'(x) = (5 \ln 8)8^{5x}$

$(2)\ f(x) = 6^{x^2}$

$f'(x) = (2x \ln 6)6^{x^2}$

$(3)\ f(x) = e^{3x} + 2^{3x}$

$f'(x) = (\ln 2)3e^{3x} + 2^{3x}(3)$

$= 3e^{3x} + (3 \ln 2)2^{3x}$

$(4)\ f(x) = \pi^{\pi x}$

$f'(x) = \ln \pi\ \pi^{\pi x}$

$(5)\ f(x) = 6^{1-x^3}$

$f'(x) = 6^{1-x^3}(-3x^2)(\ln 6)$

$f'(x) = (-3x^2 \ln 6)6^{1-x^3}$

$(6)\ f(x) = e^{4x} + 4^{2x}$

$f'(x) = 4e^{4x} + 4^{2x}(2)(\ln 4)$

$= 4e^{4x} + (2 \ln 4)\, 4^{2x}$

$(7)\ f(x) = \dfrac{3^{2x}}{x}$

$$f'(x) = \frac{(x)(2 \ln 3)\, 3^{2x} - 3^{2x}}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{(-1 + 2x \ln 3)\, 3^{2x}}{x^2}$$

$(8)\ f(x) = 2^{-x}\cos(\pi x)$

$f'(x) = 2^{-x}(-\pi \sin(\pi x))$

$+ (\cos(\pi x))(-\ln 2)\, 2^{-x}$

$f'(x) = -\pi 2^{-x}\sin(\pi x)$

$- 2^{-x}(\cos \pi x) \ln 2$

---

8. مشتقة $\log_a g(x)$

إذا كان a عدد حقيقيا موجباً و $1 \neq a$ وكان

$g(x)$ اقترانا قابلاً للاشتقاق فإن :

$$\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x \ln a}$$

$$\frac{d}{dx}(\log_a g(x)) = \frac{g'(x)}{(\ln a)g(x)}$$

مثال 1 : أجد مشتقة كل اقتران مما يأتي :

$(1)\ f(x) = \log(\cos x)$

$$f'(x) = \frac{-\sin x}{\cos x \ln 10} = \frac{-\tan x}{\ln 10}$$

$$(2)\ f(x) = \log_2\left(\frac{x^2}{x-1}\right)$$

$$f(x) = \log_2(x^2) - \log_2(x-1)$$

$$f'(x) = \frac{2x}{(ln\ 2)\ x^2} - \frac{1}{(ln\ 2)(x-1)}$$

$$= \frac{2}{(ln\ 2)\ x} - \frac{1}{(ln\ 2)(x-1)}$$

$$(3)\ f(x) = \log_8(x^2+3x)$$

$$f'(x) = \frac{2x+3}{(x^2+3x)\ln 8}$$

$$(4)\ f(x) = \frac{10log_4 x}{x}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{10x}{x\ ln\ 4} - 10\ log_4 x}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{10}{ln\ 4} - 10\ log_4 x}{x^2}$$

---

9. مشتقة المعادلات الوسيطية

إذا كان h و g اقتران قابلين للاشتقاق عند t وكان

$x = h(t)$ و $y = g(t)$ فإن:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \quad , \quad \frac{dx}{dt} \neq 0$$

مثال 1 : جد معادلة المماس لمنحنى المعادلة

الوسيطية الآتية عندما $t = \frac{\pi}{4}$

$$x = 2\ \text{sint} \quad , \quad y = 3\text{cost} \quad , \quad 0 \le t \le 2\pi$$

الحل :

الخطوة 1 : أجد ميل المماس عندما $t = \frac{\pi}{4}$

$$x = 2\text{sint} \rightarrow \frac{dx}{dt} = 2\text{cost}$$

$$y = 3\text{cost} \rightarrow \frac{dy}{dt} = -3\text{sint}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-3\text{sint}}{2\text{cost}} = \frac{-3}{2}\tan t$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{4}} = \frac{-3}{2}\ \tan\frac{\pi}{4} = \frac{-3}{2}$$

الخطوة 2 : أجد x , y عندما $t = \frac{\pi}{4}$

$$x = 2\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{2}{\sqrt{2}} \quad , \quad y = 3\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

الخطوة 3 : أجد معادلة المماس .

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{-3}{2}\left(x - \frac{2}{\sqrt{2}}\right)$$

$$y - \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{-3}{2}x + \frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$y = \frac{-3}{2}x + \frac{6}{\sqrt{2}}$$

$$2y + 3x = 6\sqrt{2}$$

مثال 2 : جد معادلة المماس لمنحنى المعادلة الوسيطية الآتية عندما $t=\frac{\pi}{4}$

$x=\sec t\ ,\ y=\tan(t)\ ,\ \frac{-\pi}{2}\le t\le\frac{\pi}{2}$

الحل :

الخطوة 1 : أجد ميل المماس عندما $t=\frac{\pi}{4}$

$y=\tan t\rightarrow\frac{dy}{dt}=\sec^2 t$

$x=\sec t\rightarrow\frac{dx}{dt}=\sec t\,.\tan t$

$\frac{dy}{dx}=\frac{\sec^2 t}{\sec t\,.\tan t}=\frac{\sec t}{\tan t}$

$m=\frac{dy}{dx}\Big|_{t=\frac{\pi}{4}}\frac{\sec\frac{\pi}{4}}{\tan\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{1}=\sqrt{2}$

الخطوة 2 : أجد $x\ ,y$ عندما $t=\frac{\pi}{4}$

$x=\sec\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$

$y=tan\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$

الخطوة 3 : أجد معادلة المماس .

$y-y_1=m(x-x_1)$

$y-1=\sqrt{2}(x-\sqrt{2})$

$y-1=\sqrt{2}\,x-2$

$+1\qquad +1$

$y=\sqrt{2}\,x-1$

مثال 3 : جد معادلة المماس لمنحنى كل معادلة وسيطية ممّا يأتي عند النقطة المُحدَّدة بقيمة t المعطاة .

$(1)\ x=t+2\ ,\ \ y=t^2-1\ ,\ \ t=1$

اولا : نجد $\frac{dy}{dx}$ لنجد الميل

$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\ :\ \frac{dx}{dt}=1\ ,\ \frac{dy}{dt}=2t$

$\frac{dy}{dx}=\frac{2t}{1}=2t$

$M_1=\frac{dy}{dt}\Big|_{t=1}=2(1)=2$

ثانياً : نجد معادلة المماس

$y-y_1=M_1(x-x_1)$

$x=1+2=3\ ,\ y=(1)^2-1=0$

$y-0=2(x-3)$

$y=2x-6$

$(2)\ x=\frac{t}{2}\ ,\ \ y=t^2-4\ ,t=-1$

$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\ :\ \frac{dx}{dt}=\frac{1}{2}\ ,\ \frac{dy}{dt}=2t$

$\frac{dy}{dx}=\frac{2t}{\frac{1}{2}}=4t$

$M_1=\frac{dy}{dt}\Big|_{t=-1}=4(-1)=-4$

ثانياً : نجد معادلة المماس

$y-y_1=M_1(x-x_1)$

$$(x_1, y_1) = \left(\frac{-1}{2}, (-1)^2 - 4\right)$$

$$= \left(-\frac{1}{2}, -3\right)$$

$$y + 3 = -4\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

$$y + 3 = -4x - 2$$

$$y = -4x - 5$$

---

(3) $x = t - \sin t\,,\; y = 1 - \cos t\;, t = \frac{\pi}{3}$

اولا : نجد $\frac{dy}{dx}$ لنجد الميل

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

$$\frac{dx}{dt} = 1 - \cos t \quad , \quad \frac{dy}{dt} = \sin t$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin t}{1 - \cos t} = 4t$$

$$m = \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=\frac{\pi}{3}} = \frac{\sin\frac{\pi}{3}}{1 - \cos\frac{\pi}{3}}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

$$x = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$y = 1 = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

ثانياً : نجد معادلة المماس

$$y - y_1 = M_1(x - x_1)$$

$$y - \frac{1}{2} = \sqrt{3}\left(x - \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$y = \sqrt{3}x - \frac{\sqrt{3}\pi}{3} + 2$$

---

(4) $x = \sec^2 t - 1\;,\; y = \tan t\;,\; t = \frac{-\pi}{4}$

اولا : نجد $\frac{dy}{dx}$ لنجد الميل

$$y = \tan t \quad , \quad \frac{dy}{dx} = sec^2 t$$

$$x = \sec^2 t - 1$$

$$\frac{dx}{dt} = 2\sec t\,(\sec t\,\tan t)$$

$$= 2\sec^2 t\,.\tan t$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\sec^2 t}{2\sec^2 t\,\tan t}$$

$$= \frac{\cot(t)}{2}$$

ثانياً : نجد معادلة المماس

$$y - y_1 = M_1(x - x_1)$$

$$m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{\frac{-\pi}{4}} = \frac{\cot\left(\frac{-\pi}{4}\right)}{2} = \frac{-1}{2}$$

$$(x_1, y_1) = \left(\sec^2\left(\frac{-\pi}{4}\right) - 1\;, \tan\left(\frac{-\pi}{4}\right)\right)$$

$$= (1, -1)$$

$$y + 1 = -\frac{1}{2}(x - 1)$$

$$y + 1 = \frac{-1}{2}x + \frac{1}{2}$$

$$y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

مثال 4 : يعطى منحنى المعادلة الوسيطية :

$x = 2(t - \sin t)$

$y = 2(1 - \cos t) \quad , \quad 0 \le t \le 2\pi$

اثبت أن معادلة المماس والعمودي عليه لمنحنى هذه العلاقة عندما $t = \frac{\pi}{4}$ هما $1 + \sqrt{2}\ , 1 - \sqrt{2}$ على الترتيب .

نجد $\frac{dy}{dx}$ أولاً :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

$x = 2(t - \sin t)$

$$\rightarrow \frac{dx}{dt} = 2(1 - \cos t)$$

$$y = 2(1 - \cos t) \rightarrow \frac{dy}{dt} = 2(\sin t)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{2\sin t}{2(1 - \cos t)} = \frac{\sin t}{1 - \cos t}$$

$$M_1 = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{4}} = \frac{\sin\frac{\pi}{4}}{1 - \cos\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2} - 1} \frac{* (\sqrt{2} + 1)}{* (\sqrt{2} + 1)}$$

$$= \frac{\sqrt{2} + 1}{2 - 1} = \sqrt{2} + 1$$

ميل المماس $\therefore\ M_1 = \sqrt{2} + 1$

ميل العمودي على المماس

$$M_1 \times M_2 = -1$$

$$(\sqrt{2} + 1) \times M_2 = -1$$

$$M_2 = \frac{-1}{\sqrt{2} + 1} \frac{* (\sqrt{2} - 1)}{* (\sqrt{2} - 1)}$$

$$= \frac{-\sqrt{2} + 1}{2 - 1}$$

$$\therefore M_2 = 1 - \sqrt{2}$$

أسئلة متنوعة

مثال 1: إذا كان $A(x) = f(g(x))$ ، وكان:

$$f(-2) = 8 \ , \ f'(-2) = 4 \ , \ f'(5) = 3$$

$$g(5) = -2 \ , \ g'(5) = 6$$

فأجد $A'(5)$

$$A'(x) = f'(g(x)) \times g'(x)$$

$$A'(5) = f'(g(5)) \times g'(5)$$

$$= f'(-2) \times 6 = 4 \times 6 = 24$$

مثال 2: إذا كان: $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ ، فأثبت أن:

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$$

$$f'(x) = \frac{(\sqrt{x^2+1})(1) - (x)\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)}{x^2+1}$$

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}}\right)}{x^2+1}$$

$$f'(x) = \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$$

مثال 3: أجد المشتقة العليا المطلوبة في كلٍّ ممّا يأتي

$(1)\ f(x) = \sin \pi x \ , \ f'''(x)\ ?$

$$f'(x) = \cos \pi x(\pi) = \pi \cos \pi x$$

$$f''(x) = -\pi^2 \sin \pi x$$

$$f'''(x) = -\pi^2(\cos \pi x)(\pi)$$

$$f'''(x) = -\pi^3 \cos \pi x$$

$(2)\ f(x) = \cos(2x+1) \ , \ f^{(5)}(x)\ ?$

$$f'(x) = -2\sin(2x+1)$$

$$f''(x) = -4(\cos(2x+1))$$

$$f'''(x) = 8\sin(2x+1)$$

$$f^{(4)}(x) = 16\cos(2x+1)$$

$$f^{(5)}(x) = -32\sin(2x+1)$$

$(3)\ f(x) = \cos x^2 \ , \ f'''(x) = ??$

$$f'(x) = -\sin x^2(2x) = -2x \sin x^2$$

$$f''(x) = -2x(\cos x^2(2x)) + \sin x^2(-2)$$

$$f''(x) = -4x^2 \cos x^2 - 2 \sin x^2$$

$$f'''(x) = -4x^2(-\sin x^2(2x)) + \cos x^2(-8x) - 4x\cos(x^2)$$

$$f'''(x) = 8x^3 \sin x^2 - 8x \cos x^2 - 4x \cos x^2$$

مثال 4: يمكن نمذجة الكمية A (بالغرام) المتبقية عن عينة كتلتها الابتدائية $20g$ من عنصر البلوتونيوم بعد t يوماً باستعمال الاقتران:

$$A(t) = 20\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{140}}$$

أجد معدل تحلل عنصر البلوتونيوم عندما $(t = 2)$

$$A(t) = 20\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{140}}$$

$$A'(t) = \frac{20}{140}\left(\ln\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{140}}$$

$$A'(2) = \frac{20}{140}\left(\ln\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{140}}$$

$$\approx -0.098$$

<u>مثال 5</u> :تتحرك كرة معلقة بزنبرك إلى أعلى وأسفل ويحدد الاقتران $s(t) = 0.1 \ sin(2.4t)$ موقع الكرة عند أي موقع لاحق ، حيث t الزمن بالثواني و s الموقع بالسنتيميترات.

(1) جد سرعة الكرة عندما $t = 1$

$S(t) = 0.1\, sin(2.4\, t)$

$V(t) = 2.4(0.1\, cos(2.4\, t))$

$= 0.24\, cos(2.4\, t)$

$V(1) = 0.24\, cos(2.4)$

$\approx -0.177\ cm/s$

---

(2) جد موقع الكرة عندما تكون سرعتها صفراً

$V(t) = 0$

$0.24\, cos(2.4\, t) = 0$

$cos(2.4\, t) = 0$

$|sin\ (2.4\, t)| = 1$

$sin\ (2.4\, t) = 1\ or - 1$

لكن موقع الكرة هو : $S(t) =$ $0.1\, sin(2.4\, t)$

بتعويض قيمة $sin(2.4\ t)$ نجد ان الموقع هو :

$s = 0.1(1) = 0.1$

$or\ s = 0.1(-1) = -0.1$

---

(3) جد موقع الكرة عندما يكون تسارعها صفراً

$a(t) = -0.24 \times 2.4\, sin\, 2.4t$

$= -0.576\, sin\, 2.4t$

$a(t) = 0$

$-0.576\, sin\, 2.4t = 0$

$sin\ (2.4\, t) = 0$

$S(t) = 0.1\, sin(2.4\, t)$

بتعويض قيمة $sin(2.4\ t)$ نجد ان الموقع هو :

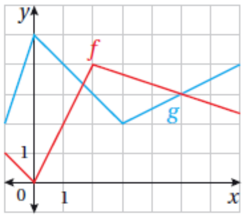
$s = 0.1(0) = 0$

<u>مثال 6</u> :يبين الشكل المجاور منحنى الاقترانين $g(x)$, $h(x)$ اذا كان

$$h(x) = f(g(x))$$

وكان

$$p(x) = g(f(x))$$



فأجد كُلَّ ممّا يأتي

(1) $h'(1) = ??$

$h(x) = f(g(x))$

$h'(x) = f'(g(x)).\, g'(x)$

$h'(1) = f'(g(1)).\, g'(1)$

$h'(1) = f'(4).\, g'(1)$

من الرسمة $g(1) = 4$

لنجد $g'(1)$ و $f'(4)$ نستخدم قاعدة الميل الهندسي :

$$M = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

أولا : $g'(1)$ رح نوخذ نقطتين على g تحققه حول العدد $1 \leftarrow (1,4),(2,3)$

$$g'(1) = M = \frac{4-3}{1-2} = -1$$

ثانيا : نكرر العملية لنجد $f'(4)$ بأخذ نقطتين على f حول $4 \leftarrow (2,4),(5,3)$

$$f'(4) = M = \frac{4-3}{2-5} = \frac{-1}{3}$$

$\therefore\ h'(1) = f'^{(4)}.\, g'^{(1)}$

$$= -1\left(\frac{-1}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

(2) $P'(1) = ??$

$P(x) = g(f(x))$
$P'(x) = g'(f(x)).f'(x)$
$P'(1) = g'(f(1)).f'(1)$, $f(1) = 2$
$P'(1) = g'(2).f'(1)$

نجد $f'(1)$ بأخذ نقطتين على (f) :
$(1,2),(0,0)$

$$f'(1) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2-0}{1-0} = 2$$

نجد $g'(2)$ بأخذ نقطتين عليه : $(1,4),(2,3)$

$$g'(2) = \frac{4-3}{1-2} = -1$$

$$\therefore \ P'(1) = g'(2)f'(1) = (-1)(2) = -2$$

مثال 7: إذا كان الاقتران : $y = Ln(ax+b)$:
حيث a , b ثابتان موجبان وكان ميل المماس لمنحنى الاقتران عند P يساوي 1 ، فأجب عن السؤالين التاليين :

(1) اثبت ان الاحداثي x للنقطة P أقل من 1

الحل :

$P(x_\circ , y_\circ)$ هي نقطة التماس وعندها :

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x_0} = 1$$

اثبت ان $x_\circ < 1$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a}{ax+b}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x_0} = \frac{a}{ax_0+b} = \frac{1}{1}$$

$$a = ax_0 + b \rightarrow \frac{ax_0}{a} = \frac{a-b}{a}$$

$$x_0 = \frac{a-b}{a} = \frac{a}{a} - \frac{b}{a} = 1 - \frac{b}{a}$$

ولأن $a > 0$, $b > 0$ $\leftarrow$ $\frac{b}{a} > 0$

ومنه : $x_\circ = 1 - \frac{b}{a} < 1$

----

(2) أجد قيمة كل من a, b علماً بأن P هي النقطة $(0,2)$ ثم برر اجابتك

$$y = f(x) = \text{Ln}\,(ax+b)$$

$$y' = f'(x) = \frac{a}{ax+b}$$

ميل المماس عند $P(0,2)$ يساوي 1 أي أن :
$f'(0) = 1$

$$f'(0) = \frac{a}{b} = 1$$

$$a = b$$

$$f(0) = \text{Ln}\,(b) = 2$$

$$b = e^2$$

$$a = b = e^2$$

(3) جد احداثي النقطة التي يكون عندها ميل المماس $\frac{1}{2}$

الحل :

اولاً : المطلوب نقطة التماس التي تكون عندها الميل $= \frac{1}{2}$

نفرضها $Q(x_1, y_1)$

$$f'(x) = \frac{a}{ax+b}$$

$$f'(x_1) = \frac{a}{ax_1+b} = \frac{1}{2}$$

$$2a = ax_1 + b \;...\; (1)$$

احنا بحاجة لـ $(b\ , a)$

$$2a = ax_1 + b \;...\; (1)$$

ثانياً : لدينا نقطة تماس اخرى وهي

$P(0,2)\ , x_\circ = 0$ وعندها الميل $= 1$

$$f'(0) = \frac{a}{a(0)+b} = 1$$

$$\frac{a}{b} = 1 \quad \longrightarrow \quad a = b \;.....\; (2)$$

عوض (2) في (1)

$$2a = ax_1 + a$$

$$-a \qquad\qquad -a$$

$$\frac{ax_1}{a} = \frac{a}{a}$$

$$x_1 = 1 \quad , \quad y_1 = f(x_1) = f(1)$$

$$= \text{Ln}\,(a(1) + a)$$

$$y_1 = \text{Ln}\,(2a)$$

$$\therefore\ Q\ (1\ , \text{Ln}\ 2a)$$

مثال 8 :يعطى منحنى بالمعادلة الوسيطية :

$$x = t^2 \quad , \quad y = 2t$$

(1) جد $\frac{dy}{dx}$ بدلالة t

$$\frac{dy}{dt} = 2 \quad , \quad \frac{dx}{dt} = 2t$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2}{2t} = \frac{1}{t}$$

---

(2) جد معادل العمودي على مماس المنحنى عند النقطة $(t^2\ , 2t)$

ميل المماس : $m = \frac{dx}{dx} = \frac{1}{t}$

ميل العمودي على المماس : $m = \frac{-1}{\frac{1}{t}} = -t$

$$y - 2t = -t(x - t^2)$$

$$y = -tx + t^3 + 2t$$

(3) اثبت أن مساحة المثلث المكون من العمودي على المماس والمحورين الاحداثيين هي :

$$\frac{1}{2}|t|(2+t^2)^2$$

الحل : لايجاد المقطع x للعمودي على المماس نضع $y=0$

$$0=-tx+t^3+2t$$

$$x=\frac{t^3+2t}{t}=t^2+2$$

لايجاد المقطع y للعمودي على المماس نضع $x=0$

$$y=-t(0)+(0)^3+2(0)$$
$$=t^3+2t$$

$$A=\frac{1}{2}|t^2+2||t^3+2t|$$
$$=\frac{1}{2}|t^2+2||t(t^2+2)|$$
$$=\frac{1}{2}|t(t^2+2)^2|=\frac{1}{2}|t|(t^2+2)^2$$

مثال 9 :أجد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي :

(1) $y=\sqrt{\sin\sqrt{x}}$

$$=\left(\sin x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(x)=\frac{1}{2}\left(\sin x^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\cos x^{\frac{1}{2}}\right).\left(\frac{1}{2}(x)^{-\frac{1}{2}}\right)$$

$$f'(x)=\frac{\cos\sqrt{x}}{4\sqrt{x}\sqrt{\sin\sqrt{x}}}$$

(2) $y=e^x\sin^2x\cos x$

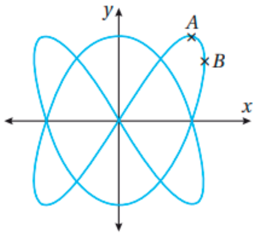
$$f(x)=(e^x\sin^2x)(\cos x)$$

$$f'(x)=(e^x\sin^2x)(-\sin x)+(\cos x)\left((e^x)(2\sin x\cos x)+(\sin^2x(e^x))\right)$$

$$f'(x)=-e^x\sin^2x+2e^x\cos^2x\sin x+e^x\cos x\sin^2x$$

مثال 10 :يبين الشكل المجاور منحنى المعادلة الوسيطية :

$x=\sin 2t\ ,\ y=\sin 3t\ ,\ 0\le t\le 2\pi$



(1) إذا كان مماس منحنى المعادلة افقياً عند النقطة A الواقعة في الربع الأول ، جد احداثي A

$$\frac{dy}{dt}=3\cos 3t=0\longrightarrow\cos 3t=0$$

$$3t=\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2},\dots$$

$$t=\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\dots\longrightarrow t=\frac{\pi}{6}$$

لأن A في الربع الاول

$$t=\frac{\pi}{6}:\ \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=\frac{\pi}{6}}=2\cos 2\left(\frac{\pi}{6}\right)=1\neq 0$$

$$(x,y)=\left(\sin 2\left(\frac{\pi}{6}\right),\sin 3\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$$
$$=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},1\right)$$

(2) إذا كان مماس المنحنى موازياً للمحور y عند النقطة B جد احداثي B ؟

النقطة B التي يكون عندها المماس عمودي

$$\frac{dx}{dt} = 2\cos\ 2t = 0 \to \cos\ 2t = 0$$

$$2t = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \dots$$

$$t = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \dots \to t = \frac{\pi}{4}$$

لأن B في الربع الأول

$$t = \frac{\pi}{4} : \left.\frac{dy}{dx}\right|_{\frac{\pi}{4}} = 3\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{-3}{\sqrt{2}} \neq 0$$

$$(x, y) = \left(\sin\frac{2\pi}{4}, \sin\frac{3\pi}{4}\right) = \left(1, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

النقطة B التي يكون عندها المماس عمودي

---

(3) إذا مر فرعان من المنحنى بنقطة الاصل كم هو موضح في الشكل فجد ميل المماس لكل منهم عند نقطة الأصل

نقطة الأصل $(sin\,2t\ \ , sin\,3t) = (0;0)$

بدنا قيم t التي تجعل $x = 0$ وَ $y = 0$ لتكون النقطة $(0،0)$ ثم نجد الميل عندها قيم (t)

- $x = \sin\ 2t = 0$

$$2t = 0 , \pi , 2\pi , 3\pi , 4\pi$$

$$t = 0 , \frac{\pi}{2} , \pi , \frac{3\pi}{2} , 2\pi$$

- $y = \sin\ 3t = 0$

$$3t = 0 , \pi , 2\pi , 3\pi , 4\pi , 5\pi , 6\pi$$

$$t = 0 , \frac{\pi}{3} , \frac{2\pi}{3} , \pi , \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{5\pi}{3} , 2\pi$$

ما هي قيم t التي تجعل $x = 0 , y = 0$ معاً ؟

يكون الجسم عند نقطة الأصل عندما $t =$ $0\ , \pi , 2\pi$

الان نجد ميل المماس

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3\cos\ 3t}{2\cos\ 2t}$$

$$t = 0 : M = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=0} = \frac{3\cos\ 3(0)}{2\cos\ 2(0)} = \frac{3}{2}$$

$$t = \pi : M = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\pi} = \frac{3\cos\ 3\pi}{2\cos\ 2\pi} = -\frac{3}{2}$$

$$t = 2\pi : M = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=2\pi} = \frac{3\cos\ 3(2\pi)}{2\cos\ 2(2\pi)} = \frac{3}{2}$$

اذن ميل المماس للفرعان الماذان بنقطة الاصل هما

$$M_1 = \frac{3}{2} \quad , \quad M_2 = \frac{-3}{2}$$

مثال 11 : يمثل الاقتران :

$$S(t) = Ln\,(t^2 - 2t + 1.9) \quad , t \geq 0$$

موقع جُسَيْم يتحرَّك في مسار مستقيم، حيث s

الموقع بالأمتار، و t الزمن بالثواني .

(1) جد سرعة الجسيم وتسارعه بعد t ثانية .

$$V(t) = S'(t) = \frac{2t-2}{t^2-2t+1.9}$$

$$a(t) = V'(t) = S''(t)$$

$$a(t) = \frac{(t^2-2t+1.9)(2)-(2t-2)(2t-2)}{(t^2-2t+1.9)^2}$$

$$a(t) = \frac{2t^2-4t+3.8-(4t^2-8t+4)}{(t^2-2t+1.9)^2}$$

$$a(t) = \frac{2t^2-4t+3.8-4t^2+8t-4}{(t^2-2t+1.9)^2}$$

$$a(t) = \frac{-2t^2+4t-0.2}{(t^2-2t+1.2)^2}$$

---

(2) جد موقع الجسيم وتسارعه عندما تكون

سرعته تساوي صفراً

$$V(t) = 0$$

$$\frac{2t-2}{t^2-2t+1.9}$$

$$2t-2 = 0$$

$$t = 1$$

$$S(1) = \mathrm{Ln}(1^2 - 2(1) + 1.9)$$

$$= \mathrm{Ln}\,(0.9)$$

$$a(1) = \frac{-2(1)^2+4(1)-0.2}{(1^2-2(1)+1.9)^2}$$

$$= \frac{1.8}{(0.9)^2}$$

(3) متى يعود الجسم إلى موقعه الابتدائي

تذكر : تكون الجسم في موقعه الابتدائي أومره عندما

$$t = 0$$

اين الموقع الابتدائي عندما $(t = 0)$ ؟

$$S(0) = \mathrm{Ln}\,(0 - 0 + 1.9)$$

$$= \mathrm{Ln}(1.9)$$

المطلوب : قيمة t عندما $S(t) = Ln(1.9)$

$$\mathrm{Ln}\,\,(t^2 - 2t + 1.9) = \mathrm{Ln}\,1.9$$

$$e^{\mathrm{Ln}\,(t^2-2t+1.9)} = e^{\mathrm{Ln}1.9}$$

$$t^2 - 2t + 1.9 = 1.9$$

$$t^2 - 2t = 0 \;\longrightarrow\; t(t-2) = 0$$

$$t = 0 \quad , \quad t = 2$$

اذن يعود الجسم إلى موقعه الابتدائي عندما

$$t = 2$$

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

1) $f(x) = 100e^{-0.1x}$

2) $f(x) = \sin(x^2+1)$

3) $f(x) = \cos^2 x$

4) $f(x) = \cos 2x - 2\cos x$

5) $f(x) = \log_3 \frac{x\sqrt{x-1}}{2}$

6) $f(x) = 2\cot^2(\pi x + 2)$

7) $f(x) = \log 2x$

8) $f(x) = \ln(x^3+2)$

9) $f(x) = \left(\frac{x^2}{x^3+2}\right)^2$

10) $f(x) = x^2\sqrt{20-x}$

11) $f(x) = \frac{\sin(2x+1)}{e^{x^2}}$

12) $f(x) = 3^{\cot x}$

أجد معادلة المماس لكل اقتران ممّا يأتي عند قيمة x المعطاة:

13) $y = 2\sin 5x - 4\cos 3x,\ x = \frac{\pi}{2}$

14) $f(x) = (x^2+2)^3,\ x = -1$

15) $f(x) = \tan 3x,\ x = \frac{\pi}{4}$

إذا كان الاقتران: $f(x) = 3\sin x - \sin^3 x$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

16) أُثبِت أنَّ: $f'(x) = 3\cos^3 x$.

17) أجد $f''(x)$.

18) يعطى منحنى بالمعادلة الوسيطية: $x = a\cos t,\ y = b\sin t$، حيث: $0 \le t \le 2\pi$. أجد المقطع y لمماس المنحنى عندما $t = \frac{\pi}{4}$ بدلالة a و b.

إذا كان الاقتران: $y = e^{ax}$، حيث a ثابت، و $a > 0$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

19) أجد إحداثيي النقطة P التي تقع على منحنى الاقتران، ويكون عندها ميل المماس 1

20) أُثبِت أنَّه يُمكِن كتابة معادلة العمودي على المماس عند النقطة P في صورة: $x + y = k$، ثمَّ أجد قيمة الثابت k.

21) إذا كان: $h(x) = \sqrt{4 + 3f(x)}$، وكان: $f(1) = 7, f'(1) = 4$، فأجد $h'(1)$.

22) إذا كان الاقتران: $f(x) = e^{2x} + e^{-2x}$، فأُثبِت أنَّ: $f''(x) = 4f(x)$.

23 إذا كان: $f(x) = \sin 4x + \cos 4x$، فأُثبِت أنَّ: $f''(x) + 16f(x) = 0$.

يعطى منحنى بالمعادلة الوسيطة: $x = \sin^2 \theta, y = 2\cos\theta$، حيث: $0 \le \theta \le 2\pi$:

24 أجد $\frac{dy}{dx}$ بدلالة θ.

25 أجد معادلة المماس عندما يكون الميل $\sqrt{2}$.

26 أجد النقطة التي يكون عندها المماس موازيًا للمحور y.

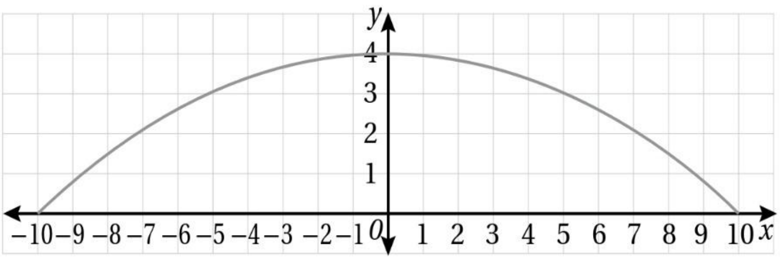
27 سيّارة: يُمثِّل الاقتران: $v(t) = 15te^{-0.05t^2}$ سرعة (بالمتر لكل ثانية) سيّارة تتحرَّك في مسار مستقيم، حيث: $0 \le t \le 10$. أجد سرعة السيّارة عندما يكون تسارعها صفرًا.

أجد $(f \circ g)'(x)$ عند قيمة x المعطاة في كلٍّ ممّا يأتي:

28 $f(u) = u^5 + 1, u = g(x) = \sqrt{x}, x = 1$

29 $f(u) = u + \frac{1}{\cos^2 u}, u = g(x) = \pi x, x = \frac{1}{4}$

مرور: يُبيِّن التمثيل البياني المجاور شكل مَطَبِّ سرعةٍ صُمِّم للتخفيف من سرعة السيّارات على أحد الطرق. وفيه يُمثِّل المحور x سطح الطريق، وتقاس جميع الأطوال بالسنتيمترات.



إذا كانت المعادلة الوسيطية التي تُمثِّل منحنى المَطَبِّ هي: $x = 10\sin t, y = 2 + 2\cos 2t$، حيث: $-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

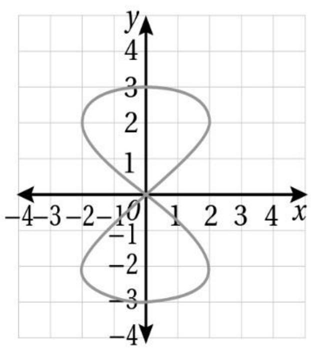
30 ميل المماس لمنحنى المَطَبِّ بدلالة t.

31 قيمة t عند أعلى نقطة على منحنى المَطَبِّ.

32 تبرير: يُبيِّن الشكل المجاور منحنى المعادلة الوسيطة:

$$x = 2\sin 2t,\ y = 3\cos t \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

أجد ميل المماس لمنحنى المعادلة عند نقطة الأصل، ثمَّ أُبرِّر إجابتي.



الدرس الرابع : الاشتقاق الضمني

1. العلاقة الضمنية ومشتقتها

بافتــراض أنَّ معادلةً تُعرِّف y ضمنيًّا بوصفه اقترانًا قابلًا للاشــتقاق بالنســبة إلى x، فإنَّه يُمكِن إيجاد $\frac{dy}{dx}$ باتِّباع الخطوات الآتية:

- **الخطوة 1:** أشــتق طرفي المعادلة بالنســبة إلى x، مراعيًا استعمال قاعدة السلسلة عند اشتقاق حدود تتضمَّن المُتغيِّر y.
- **الخطوة 2:** أُرتِّب حدود المعادلة بحيث تصبح جميع الحدود التي تحوي $\frac{dy}{dx}$ في طرف المعادلة الأيسر، والحدود الأُخرى في طرف المعادلة الأيمن.
- **الخطوة 3:** أُخرِج $\frac{dy}{dx}$ عاملًا مشتركًا من حدود طرف المعادلة الأيسر.
- **الخطوة 4:** أَحُلُّ المعادلة بالنسبة إلى $\frac{dy}{dx}$.

مثال 1 : أجد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي :

(1) $x^2 + y^2 = 4$

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \rightarrow x + y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$y\frac{dy}{dx} = -x \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y}$$

---

(2) $\sin x + \cos y = 2x - 3y$

$$\cos x - \sin(y)\frac{dy}{dx} = 2 - 3\frac{dy}{dx}$$

$$\cos x - \sin(y)\frac{dy}{dx} + 3\frac{dy}{dx} = 2$$

$$3\frac{dy}{dx} - \sin y\frac{dy}{dx} = 2 - \cos x$$

$$\frac{dy}{dx}(3 - \sin y) = 2 - \cos x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2 - \cos x}{3 - \sin y}$$

(3) $x^2 + y^2 = 13$

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$x + y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$y\frac{dy}{dx} = -x \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y}$$

---

(4) $2x + 5y^2 = \sin y$

$$2 - 10y\frac{dy}{dx} = \cos y\frac{dy}{dx}$$

$$-\cos y\frac{dy}{dx} - 10y\frac{dy}{dx} = +2$$

$$-\cos y\frac{dy}{dx} - 10y\frac{dy}{dx} = +2$$

$$\frac{dy}{dx}(3 - \cos y - 10y) = 2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{3 - \cos y - 10y}$$

---

(5) $x^2 - 2y^2 = 4$

$$2x - 4y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$4y\frac{dy}{dx} = 2x \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2x}{4y} = \frac{x}{2y}$$

---

(6) $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{10}$

$$\frac{(-1)(2x)}{x^4} + \frac{(-1)(2y)\frac{dy}{dx}}{y^4} = 0$$

$$\frac{-2}{x^3} - \frac{2}{y^3}\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{2}{y^3}\frac{dy}{dx} = \frac{-2}{x^3} \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-y^3}{x^3}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-y^2}{\sec\frac{1}{y}\tan\frac{1}{y}} = \frac{-y^2}{\frac{1}{\cos\frac{1}{y}}\frac{\sin\frac{1}{y}}{\cos\frac{1}{y}}}$$

$$= \frac{-y^2}{\frac{\sin\frac{1}{y}}{\cos^2\frac{1}{y}}} = \frac{-y^2\cos^2\frac{1}{y}}{\sin\frac{1}{y}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-y^2\cos^2\frac{1}{y}}{\sin\frac{1}{y}}$$

---

(9) $(\sin\pi x + \cos\pi y)^2 = 2$

$$\frac{d}{dx}((\sin\pi x + \cos\pi y)^2) = \frac{d}{dx}(2)$$

$$2(\sin\pi x + \cos\pi y).(\pi\cos\pi x - \sin\pi y\ (\pi\frac{dy}{dx})) = 0$$

$$(\sin\pi x + \cos\pi y).\pi(\cos\pi x - \frac{dy}{dx}\sin\pi y) = 0$$

$$(\sin\pi x + \cos\pi y).(\cos\pi x - \frac{dy}{dx}\sin\pi y) = 0$$

$$\sin\pi x\cos\pi x - \frac{dy}{dx}\sin\pi x\sin\pi y + \cos\pi y\cos\pi x - \frac{dy}{dx}\cos\pi y\sin\pi y = 0$$

$$\frac{dy}{dx}\sin\pi x\sin\pi y + \frac{dy}{dx}\cos\pi y\sin\pi y = \sin\pi x\cos\pi x + \cos\pi y\cos\pi x$$

$$\frac{dy}{dx}(\sin\pi x\sin\pi y + \cos\pi y\sin\pi y) = \sin\pi x\cos\pi x + \cos\pi y\cos\pi x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin\pi x\cos\pi x + \cos\pi y\cos\pi x}{\sin\pi x\sin\pi y + \cos\pi y\sin\pi y}$$

---

(10) $x^2 + y^2 = \ln(x+y)^2$

$$x^2 + y^2 = 2\ln(x+y)$$

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 2\frac{1+\frac{dy}{dx}}{x+y}$$

$$x + y\frac{dy}{dx} = \frac{1+\frac{dy}{dx}}{x+y}$$

$$\left(x + y\frac{dy}{dx}\right)(x+y) = 1 + \frac{dy}{dx}$$

$$x^2 + xy + yx\frac{dy}{dx} + y^2\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx}$$

(7) $(x^2+y^2)^2 = 50(x^2-y^2)$

$$2(x^2+y^2)\left(2x + 2y\frac{dy}{dx}\right) = 100x - 100y\frac{dy}{dx}$$

$$2(x^2+y^2)2\left(x + y\frac{dy}{dx}\right) = 100x - 100y\frac{dy}{dx}$$

$$4(x^2+y^2)\left(x + y\frac{dy}{dx}\right) = 100x - 100y\frac{dy}{dx}$$

$$(x^2+y^2)\left(x + y\frac{dy}{dx}\right) = 25x - 25y\frac{dy}{dx}$$

$$x^3 + y^2x + x^2y\frac{dy}{dx} + y^3\frac{dy}{dx} = 25x - 25y\frac{dy}{dx}$$

$$x^2y\frac{dy}{dx} + y^3\frac{dy}{dx} + 25y\frac{dy}{dx} = 25x - x^3 - y^2x$$

$$\frac{dy}{dx}(x^2y + y^3 + 25y) = 25x - x^3 - y^2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{25x - x^3 - y^2x}{x^2y + y^3 + 25y}$$

---

(7) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 5$

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{\frac{dy}{dx}}{2\sqrt{y}} = 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{dy}{dx}\frac{1}{\sqrt{y}} = 0$$

$$\frac{dy}{dx}\frac{1}{\sqrt{y}} = -\frac{1}{\sqrt{x}} \rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$$

---

(8) $x = \sec\frac{1}{y}$

$$1 = \left(\sec\frac{1}{y}\tan\frac{1}{y}\right).\left(\frac{-1\frac{dy}{dx}}{y^2}\right)$$

$$\frac{1}{\sec\frac{1}{y}\tan\frac{1}{y}} = \frac{-1}{y^2}\frac{dy}{dx}$$

2. مشتقة الضمني مع مشتقة الضرب والقسمة

مثال 1 : أجد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي :

$(1)\ 2xy - y^3 = 1$

$$(2x)\left(\frac{dy}{dx}\right) + (y)(2) - 3y^2\frac{dy}{dx} = 0$$
$$2x\frac{dy}{dx} - 3y^2\frac{dy}{dx} = -2y$$
$$\frac{dy}{dx}(2x - 3y^2) = -2y$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2y}{2x - 3y^2}$$

$(2)\ \sin(x+y) = y^2\cos x$

$$\cos(x+y).\left(1+\frac{dy}{dx}\right) = y^2(-\sin x) + \cos x\ 2y\frac{dy}{dx}$$
$$\cos(x+y) + \cos(x+y)\frac{dy}{dx} = -y^2\sin x + 2y\cos x\frac{dy}{dx}$$
$$\cos(x+y)\frac{dy}{dx} - 2y\cos x\frac{dy}{dx} = -y^2\sin x - \cos(x+y)$$
$$\frac{dy}{dx}(\cos(x+y) - 2y\cos x) = -y^2\sin x - \cos(x+y)$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{-y^2\sin x - \cos(x+y)}{(\cos(x+y) - 2y\cos x)}$$

$(3)\ y^2 = \frac{x-1}{x+1}$

$$2y\frac{dy}{dx} = \frac{(x+1)(1) - (x-1)(1)}{(x+1)^2}$$
$$2y\frac{dy}{dx} = \frac{x+1 - x+1}{(x+1)^2}$$
$$\frac{1}{2}\times\left(2y\frac{dy}{dx}\right) = \left(\frac{2}{(x+1)^2}\right)\times\frac{1}{2}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(x+1)^2 y}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{y(x+1)^2}$$

$$yx\frac{dy}{dx} + y^2\frac{dy}{dx} - \frac{dy}{dx} = 1 - x^2 - xy$$
$$\frac{dy}{dx}(yx + y^2 - 1) = 1 - x^2 - xy$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - x^2 - xy}{(yx + y^2 - 1)}$$

مثال 2 : أجد $\frac{dy}{dx}$ للمعادلة الضمنية عند القيمة المعطاة :

$y^3 + 2x^2 = 11y \quad , \quad y = 1$

$$3y^2\frac{dy}{dx} + 4x = 11\frac{dy}{dx}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{4x}{11 - 3y^2}$$

بدنا x عندما $y = 1$:

$$(1)^3 + 2x^2 = 11(1)$$
$$1 + 2x^2 = 11$$
$$2x^2 = 10$$
$$x^2 = 5$$
$$x = \sqrt{5} \quad , \quad x = -\sqrt{5}$$
$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(-\sqrt{5},1)} = \frac{4(-\sqrt{5})}{11 - 3(1)^2} = \frac{-4\sqrt{5}}{8} = \frac{-\sqrt{5}}{2}$$
$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(\sqrt{5},1)} = \frac{4(\sqrt{5})}{11 - 3(1)^2} = \frac{4\sqrt{5}}{8} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$(4)\ 3xy^2 + y^3 = 8$

$$(6xy)\left(\frac{dy}{dx}\right) + (3y^2) + 3y^2\frac{dy}{dx} = 0$$

$$6xy\frac{dy}{dx} + 3y^2\frac{dy}{dx} = -3y^2$$

$$\frac{dy}{dx}(6xy - 3y^2) = -3y^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-3y^2}{6xy - 3y^2}$$

$(5)\ tan(x-y) = 2xy^3 + 1$

$$\left(1-\frac{dy}{dx}\right)sec^2(x-y) = 6xy^2\frac{dy}{dx} + 2y^3$$

$$sec^2(x-y) - sec^2(x-y)\frac{dy}{dx} = sec^2(x-y) - 2y^3$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{sec^2(x-y) - 2y^3}{6xy^2 + sec^2(x-y)}$$

$(6)\ x^2 = \frac{x-y}{x+y}$

$$2x(x+y)^2 = x - x\frac{dy}{dx} + y - y\frac{dy}{dx} - x - x\frac{dy}{dx} + y + y\frac{dy}{dx}$$

$$2x\frac{dy}{dx} = 2y - 2x(x+y)^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y - 2x(x+y)^2}{2x} = \frac{y - x(x+y)^2}{x}$$

$(7)\ e^x y = xe^y$

$$e^x\frac{dy}{dx} + ye^x = xe^y\frac{dy}{dx} + e^y(1)$$

$$e^x\frac{dy}{dx} - xe^y\frac{dy}{dx} = e^y - ye^x$$

$$\frac{d}{dx}(e^x - xe^y) = e^y - ye^x$$

$$\frac{d}{dx} = \frac{e^y - ye^x}{e^x - xe^y}$$

$(8)\ 3^x = y - 2xy$

$$3^x \ln 3 = \frac{dy}{dx} - \left(2x\frac{dy}{dx} + 2y\right)$$

$$3^x \ln 3 = \frac{dy}{dx} - 2x\frac{dy}{dx} - 2y$$

$$3^x \ln 3 + 2y = \frac{dy}{dx} - 2x\frac{dy}{dx}$$

$$3^x \ln 3 + 2y = \frac{dy}{dx}(1-2x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3^x \ln 3 + 2y}{1-2x}$$

$(9)\ \frac{x}{y^2} + \frac{y^2}{x} = 5$

$$\frac{y^2(1) - (x)\left(2y\frac{dy}{dx}\right)}{y^4} + \frac{(x)\left(2y\frac{dy}{dx}\right) - y^2(1)}{x^2} = 0$$

$$\frac{y^2 - 2xy\frac{dy}{dx}}{y^4} + \frac{2xy\frac{dy}{dx} - y^2}{x^2} = 0$$

$$\frac{y^2}{y^4} - \frac{2xy\frac{dy}{dx}}{y^4} + \frac{2xy\frac{dy}{dx}}{x^2} - \frac{y^2}{x^2} = 0$$

$$\frac{1}{y^2} - \frac{2x}{y^3}\frac{dy}{dx} + \frac{2y}{x}\frac{dy}{dx} - \frac{y^2}{x^2} = 0$$

$$-\frac{2x}{y^3}\frac{dy}{dx} + \frac{2y}{x}\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{y^2} + \frac{y^2}{x^2}$$

$$\frac{dy}{dx}\left(-\frac{2x}{y^3} + \frac{2y}{x}\right) = \frac{y^2}{x^2} - \frac{1}{y^2}$$

$$\frac{dy}{dx}\left(\frac{-2x^2 + 2y^4}{y^3x}\right) = \frac{y^4 - x^2}{x^2y^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{y^4 - x^2}{x^2y^2}}{\frac{-2x^2 + 2y^4}{y^3x}} = \frac{\frac{y^4 - x^2}{x^2y^2}}{\frac{2(y^4 - x^2)}{y^3x}}$$

$$= \frac{y^4 - x^2}{x^2y^2} \times \frac{y^3x}{2(y^4 - x^2)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \times \frac{y}{2} = \frac{y}{2x}$$

$(10)\quad x + y = \cos xy$

$$1 + \frac{dy}{dx} = -\sin xy\left(x\frac{dy}{dx} + y\right)$$

$$1 + \frac{dy}{dx} = -x\sin xy\,\frac{dy}{dx} - y\sin xy$$

$$\frac{dy}{dx} + x\sin xy\,\frac{dy}{dx} = -y\sin xy - 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-y\sin xy - 1}{1 + x\sin xy}$$

$(11)\quad \sin x\cos y = x^2 - 5y$

$$\frac{d}{dx}(\sin x\cos y) = \frac{d}{dx}(x^2 - 5y)$$

$$\sin x\left(-\sin y\frac{dy}{dx}\right) + \cos y\cos x = 2x - 5\frac{dy}{dx}$$

$$-\sin x\sin y\frac{dy}{dx} + \cos y\cos x = 2x - 5\frac{dy}{dx}$$

$$-\sin x\sin y\frac{dy}{dx} + 5\frac{dy}{dx} = 2x - \cos y\cos x$$

$$\frac{dy}{dx}(5 - \sin x\sin y) = 2x - \cos y\cos x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x - \cos y\cos x}{5 - \sin x\sin y}$$

مثال 2 : اذا كان $\sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = 10$ ، فاثبت ان :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

الحل :

$$\sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = 10 \rightarrow \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} + \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}} = 10$$

$$\frac{x+y}{\sqrt{x}\sqrt{y}} = 10 \rightarrow x + y = 10\sqrt{x}\sqrt{y}$$

$$(x+y)^2 = 100xy$$

$$2(x+y)\left(1 + \frac{dy}{dx}\right) = 100x\frac{dy}{dx} + 100y$$

$$(x+y)\left(1 + \frac{dy}{dx}\right) = 50x\frac{dy}{dx} + 50y$$

$$x + x\frac{dy}{dx} + y + y\frac{dy}{dx} = 50x\frac{dy}{dx} + 50y$$

$$x\frac{dy}{dx} + y\frac{dy}{dx} - 50x\frac{dy}{dx} = 50y - x - y$$

$$y\frac{dy}{dx} - 49x\frac{dy}{dx} = 49y - x$$

$$\frac{dy}{dx}(y - 49x) = 49y - x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{49y - x}{y - 49x} = \frac{y\left(49 - \frac{x}{y}\right)}{x\left(\frac{y}{x} - 49\right)}$$

$$\sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}} = 10$$

$$\left(\sqrt{\frac{x}{y}} + \sqrt{\frac{y}{x}}\right)^2 = 10^2$$

$$\frac{x}{y} + 2\sqrt{\frac{x}{y}}\sqrt{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x} = 100$$

$$\frac{x}{y} + 2 + \frac{y}{x} = 100$$

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 98 \rightarrow \quad \therefore \frac{y}{x} = 98 - \frac{x}{y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y\left(49 - \frac{x}{y}\right)}{x\left(\frac{y}{x} - 49\right)}$$

$$= \frac{y\left(49 - \frac{x}{y}\right)}{x\left(98 - \frac{x}{y} - 49\right)}$$

$$= \frac{y\left(49 - \frac{x}{y}\right)}{x\left(98 - \frac{x}{y} - 49\right)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y\left(49 - \frac{x}{y}\right)}{x\left(49 - \frac{x}{y}\right)} = \frac{y}{x}$$

مثال 3 : اذا كان $y = \ln x$ ، $x > 0$، فاثبت ان :

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$ باستعمال الاشتقاق الضمني

$$y = \ln x \rightarrow e^y = e^{\ln x} \rightarrow e^y = x$$

$$e^y \frac{dy}{dx} = 1 \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}$$

مثال 4 : أجد $\frac{dy}{dx}$ للمعادلة الضمنية عند القيمة المعطاة :

$$2y^2 + 2xy - 1 = 0 \ , x = \frac{1}{2}$$

$$4y\frac{dy}{dx} + (2x\frac{dy}{dx} + 2y) - 0 = 0$$

$$4y\frac{dy}{dx} + 2x\frac{dy}{dx} = -2y$$

$$2y\frac{dy}{dx} + x\frac{dy}{dx} = -y$$

$$\frac{dy}{dx}(2y - x) = -y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-y}{2y + x}$$

بدنا y عندما $x = \frac{1}{2}$:

$$2y^2 + 2\left(\frac{1}{2}\right)y - 1 = 0$$

$$2y^2 + y - 1 = 0$$

$$(2y - 1)(y + 1) = 0$$

$$y = \frac{1}{2} \ , \ y = -1$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(\frac{1}{2},-1)} = \frac{-(-1)}{2(-1) + \frac{1}{2}} = \frac{1}{-2 + \frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{-3}{2}} = \frac{-2}{3}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})} = \frac{-\left(\frac{1}{2}\right)}{2\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}} = \frac{-\frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{-1}{3}$$

3. ميل المماس لمنحنى علاقة ضمنية

يُمكِن إيجاد ميل المماس لمنحنى علاقة ضمنية عند أيِّ نقطة تُحقِّق المعادلة، وذلك :

خطوة (1) : إيجاد $\frac{dy}{dx}$

خطوة (2) : تعويض قيمتي x و y للنقطة المطلوب إيجاد قيمة الميل عندها .

مثال 1:

(1) جد ميل المماس لمنحنى العلاقة:

$e^{2x} \ln y = x + y - 2$ عند النقطة $(1, 1)$

$$m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(1,1)} \ ?$$

$$e^{2x} \ln y = x + y - 2$$

$$\frac{d}{dx}(e^{2x} \ln y) = \frac{d}{dx}(x + y - 2)$$

$$e^{2x}\frac{\frac{dy}{dx}}{y} + \ln y \ (e^{2x} \, 2) = 1 + \frac{dy}{dx} - 0$$

$$\frac{dy}{dx}\frac{e^{2x}}{y} + 2e^{2x}\ln y = 1 + \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}\frac{e^{2x}}{y} - \frac{dy}{dx} = 1 - 2e^{2x}\ln y$$

$$\frac{dy}{dx}\left(\frac{e^{2x}}{y} - 1\right) = 1 - 2e^{2x}\ln y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - 2e^{2x}\ln y}{\frac{e^{2x}}{y} - 1}$$

$$m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(1,1)} = \frac{1 - 2e^{2(1)}\ln 1}{\frac{e^{2(1)}}{1} - 1} = \frac{1 - 0}{e^2 - 1}$$

$$m = \frac{1}{e^2 - 1}$$

(2) جد ميل المماس لمنحنى العلاقة $y^2 = x$

عندما $x = 4$

$$y^2 = x \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dx} y^2 = \frac{d}{dx} x$$
$$2y \frac{dy}{dx} = 1 \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y}$$
$$m = \frac{dy}{dx}\Big|_{(4,??)}$$

بدنا y عندما $x = 4$

النقاط $y^2 = 4 \rightarrow y = \pm 2 \rightarrow$

$(4,2)$, $(4,-2)$

$$(4,2): \quad m = \frac{dy}{dx}\Big|_{(2,4)} = \frac{1}{2(2)} = \frac{1}{4}$$
$$(4,-2): \quad m = \frac{dy}{dx}\Big|_{(4,-2)} = \frac{1}{2(-2)} = \frac{1}{-4}$$

مثال 2 :

(1) جد ميل المماس لمنحنى العلاقة $y^2 = \ln x$

عند النقطة $(e,1)$

$$M = \frac{dy}{dx}\Big|_{(e,1)} \ ?$$
$$y^2 = \ln x \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dx}(\ln x)$$
$$2y\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2xy}$$
$$\rightarrow M = \frac{dy}{dx}\Big|_{(1,1)} = \frac{1}{2(e)(1)} = \frac{1}{2e}$$

(2) جد ميل المماس لمنحنى العلاقة:

$(y-3)^2 = 4(x-5)$ ، عندما $x = 6$

$$(y-3)^2 = 4(x-5)$$
$$\frac{d}{dx}\left((y-3)^2\right) = \frac{d}{dx}(4(x-5))$$
$$2(y-3)\frac{dy}{dx} = 4$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{4}{2(y-3)} = \frac{2}{y-3}$$
$$M = \frac{dy}{dx}\Big|_{(6,??)}$$

بدنا y عندما $x = 6$:

$$(y-3)^2 = 4(6-5)$$
$$(y-3)^2 = 4$$
$$y-3 = 2 \quad or \quad y-3 = -2$$
$$y = 5 \quad or \quad y = 1$$

النقاط $(6,5)$, $(6,1)$

$$(6,5): \quad m = \frac{dy}{dx}\Big|_{(6,5)} = \frac{2}{5-3} = 1)$$
$$(6,1): \quad m = \frac{dy}{dx}\Big|_{(6,1)} = \frac{2}{1-3} = -1$$

مثال 3 : أجد ميل المماس لمنحنى كل علاقة ممّا يأتي

عند لنقطة المعطاة :

(1) $x^2+y^2=25\ ,\ (3,-4)$

$$2x+2y\frac{dy}{dx}=0$$

$$y\frac{dy}{dx}=-x \rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{-x}{y}$$

$$M=\frac{dy}{dx}\Big|_{(3,-4)}=\frac{-3}{-4}=\frac{3}{4}$$

---

(2) $x^2y=4(2-y)\ ,\ (2,1)$

$$x^2\frac{dy}{dx}+y(2x)=\frac{d}{dx}(8-4y)$$

$$x^2\frac{dy}{dx}+2xy=-4\frac{dy}{dx}$$

$$x^2\frac{dy}{dx}+4\frac{dy}{dx}=-2xy$$

$$\frac{dy}{dx}(x^2+4)=-2xy$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-2xy}{x^2+4}$$

$$M=\frac{dy}{dx}\Big|_{(2,1)}=\frac{-2(2)(1)}{2^2+4}=\frac{-4}{8}=\frac{-1}{2}$$

---

(3) $e^{\sin x}+e^{\cos y}=e+1\ ,\ \left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

$$e^{\sin x}(\cos x)+e^{\cos y}(-\sin y)\frac{dy}{dx}=0$$

$$e^{\sin x}\cos x-e^{\cos y}\sin y\frac{dy}{dx}=0$$

$$e^{\cos y}\sin y\frac{dy}{dx}=e^{\sin x}\cos x$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{e^{\sin x}\cos x}{e^{\cos y}\sin y}$$

$$M=\frac{dy}{dx}\Big|_{\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{e^{\sin\frac{\pi}{2}}\cos\frac{\pi}{2}}{e^{\cos\frac{\pi}{2}}\sin\frac{\pi}{2}}=0$$

(4) $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}=5\ ,\ (8,1)$

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=5$$

$$\frac{d}{dx}\left(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}\right)=\frac{d}{dx}(5)$$

$$\frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1}+\frac{2}{3}y^{\frac{2}{3}-1}\frac{dy}{dx}=0$$

$$\frac{2}{3}x^{\frac{-1}{3}}+\frac{2}{3}y^{\frac{-1}{3}}\frac{dy}{dx}=0$$

$$\frac{2}{3}\left(x^{\frac{-1}{3}}+y^{\frac{-1}{3}}\frac{dy}{dx}\right)=0$$

$$x^{\frac{-1}{3}}+y^{\frac{-1}{3}}\frac{dy}{dx}=0$$

$$y^{\frac{-1}{3}}\frac{dy}{dx}=-x^{\frac{-1}{3}}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-x^{\frac{-1}{3}}}{y^{\frac{-1}{3}}}=\frac{-y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}=\frac{-\sqrt[3]{y}}{\sqrt[3]{x}}$$

4. معادلة المماس والعمودي لمنحنى علاقة ضمنية

مثال 1 : جد معادلة المماس لمنحنى العلاقة :

$x^2 - xy + y^2 = 7$ عند النقطة $(-1, 2)$

$$2x - (x\frac{dy}{dx} + y) + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$
$$2x - x\frac{dy}{dx} - y + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$
$$-x\frac{dy}{dx} + 2y\frac{dy}{dx} = -2x + y$$
$$\frac{dy}{dx}(-x + 2y) = -2x + y$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - 2x}{2y - x}$$
$$M = \frac{dy}{dx}\Big|_{(-1,2)} = \frac{2 - 2(-1)}{2(2) - (-1)} = \frac{4}{5}$$
$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - (2) = \frac{4}{5}(x - (-1))$$
$$y = \frac{4}{5}x + \frac{14}{5}$$

مثال 2 : جد معادلة المماس لمنحنى العلاقة

$x^3 + y^3 - 3xy = 17$ عند النقطة $(2, 3)$

$$3x^2 + 3y^2\frac{dy}{dx} + (-3x\frac{dy}{dx} + y(-3)) = 0$$
$$3x^2 + 3y^2\frac{dy}{dx} - 3x\frac{dy}{dx} + -3y = 0$$
$$3y^2\frac{dy}{dx} - 3x\frac{dy}{dx} = 3y - 3x^2$$
$$\frac{dy}{dx}(3y^2 - 3x) = 3y - 3x^2$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y - 3x^2}{3y^2 - 3x}$$
$$= \frac{3(y - x^2)}{3(y^2 - x)} = \frac{y - x^2}{y^2 - x}$$
$$M = \frac{dy}{dx}\Big|_{(2,3)} = \frac{3 - 2^2}{3^2 - 2} = \frac{-1}{7}$$
$$y - 3 = \frac{-1}{7}(x - 2)$$
$$y = \frac{-1}{7}x + \frac{2}{7} + 3$$
$$\rightarrow y = \frac{-1}{7}x + \frac{23}{7}$$

مثال 3 : أجد معادلة المماس لمنحنى كل علاقة ممّا يأتي عند النقطة المعطاة :

(1) $x^2 + xy + y^2 = 13 \quad , (-4, 3)$

$$2x + (x\frac{dy}{dx} + y) + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$
$$2x + x\frac{dy}{dx} + y + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$
$$x\frac{dy}{dx} + 2y\frac{dy}{dx} = -2x - y$$
$$\frac{dy}{dx}(x + 2y) = -2x - y$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x - y}{x + 2y}$$
$$M = \frac{dy}{dx}\Big|_{(-4,3)} = \frac{-2(-4) - 3}{-4 + 2(3)} = \frac{5}{2}$$
$$y - 3 = \frac{5}{2}(x + 4)$$
$$y = \frac{5}{2}x + 13$$

$(2)\ x + y - 1 = ln(x^2 + y^2)\ ,(1,0)$

$$1 + \frac{dy}{dx} - 0 = \frac{2x + 2y\frac{dy}{dx}}{x^2 + y^2}$$

$$(1 + \frac{dy}{dx})(x^2 + y^2) = 2x + 2y\frac{dy}{dx}$$

$$x^2 + y^2 + x^2\frac{dy}{dx} + y^2\frac{dy}{dx} = 2x + 2y\frac{dy}{dx}$$

$$x^2\frac{dy}{dx} + y^2\frac{dy}{dx} - 2y\frac{dy}{dx} = 2x - x^2 - y^2$$

$$\frac{dy}{dx}(x^2 + y^2 - 2y) = 2x - x^2 - y^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x - x^2 - y^2}{x^2 + y^2 - 2y}$$

$$M = \frac{dy}{dx}\bigg|_{(1,0)} = \frac{2(1) - (1)^2 - 0}{1 + 0 - 0}$$

$$= \frac{1}{1} = 1$$

$$y - 0 = 1(x - 1)$$

$$y = x - 1$$

مثال 4 : جد معادلة العمودي على المماس لمنحنى العلاقة $(x - 6)(y + 4) = 2$ عندما $(7, -2)$

أولاً: أجد المماس

$$(x - 6)(y + 4) = 2$$

$$\frac{d}{dx}((x - 6)(y + 4)) = \frac{d}{dx}(2)$$

$$(x - 6)\frac{dy}{dx} + (y + 4)(1) = 0$$

$$x\frac{dy}{dx} - 6\frac{dy}{dx} + y + 4 = 0$$

$$x\frac{dy}{dx} - 6\frac{dy}{dx} = -y - 4$$

$$\frac{dy}{dx}(x - 6) = -y - 4$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-y - 4}{x - 6}$$

$$M_1 = \frac{dy}{dx}\bigg|_{(7,-2)} = \frac{-(-2) - 4}{7 - 6} = \frac{-2}{1}$$

$$= -2$$

$$M_1 \times M_2 = -1$$

$$-2 \times M_2 = -1 \rightarrow M_2 = \frac{1}{2}$$

$$y + 2 = \frac{1}{2}(x - 7)$$

$$y + 2 = \frac{1}{2}x - \frac{7}{2}$$

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{11}{2}$$

مثال 5 : اثبت ان لمنحنى العلاقة: $3x^2 + 2xy + y^2 = 6$ مماسين افقيين ثم جد احداثي نقطتي التماس .

افرض (x_o, y_o) نقطة التماس

$$\frac{d}{dx}(3x^2 + 2xy + y^2) = \frac{d}{dx}(6)$$

$$6x + 2x\frac{dy}{dx} + 2y + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$2x\frac{dy}{dx} + 2y\frac{dy}{dx} = -6x - 2y$$

$$\frac{dy}{dx}(2x + 2y) = -6x - 2y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-6x - 2y}{2x + 2y} = \frac{2(-3x - y)}{2(x + y)}$$

$$= \frac{-3x - y}{x + y}$$

$$M = \frac{dy}{dx}\bigg|_{(x_0,y_0)} = 0$$

$$\frac{-3x_o - y_o}{x_o + y_o} = 0 \rightarrow -3x_o - y_o = 0 \rightarrow y_o = -3x_o$$

$$3x^2 + 2xy + y^2 = 6$$

$$3x_o^2 + 2x_o y_o + y_o^2 = 6$$

$$3x_o^2 + 2x_o(-3x_o) + (-3x_o)^2 = 6$$

$$3x_o^2 - 6x_o^2 + 9x_o^2 = 6$$

$$6x_o^2 = 6 \rightarrow \sqrt{x_o^2} = \sqrt{1} \rightarrow x_o = \pm 1$$

لدينا قيمتان لـ x تجعلان الميل 0، اذن يوجد مماسان افقيان

نقطة التماس الأولى $x_o = 1 \rightarrow y_o = -3 \rightarrow (1,-3)$

نقطة التماس الثانية $x_o = -1 \rightarrow y_o = 3 \rightarrow (-1,3)$

مثال 6 : جد احداثي نقطة على المنحنى $x + y^2 = 1$، بحيث يكون عندها مماس المنحنى موازياً للمستقيم $x + 2y = 0$

نقطة التماس غير معروفة (x_o, y_o)

ميل المماس " لمستقيمنا " :

$$x + y^2 = 1$$

$$\frac{d}{dx}(x+y^2) = \frac{d}{dx}(1) \rightarrow 1 + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$2y\frac{dy}{dx} = -1 \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-1}{2y}$$

$$M_1 = \frac{dy}{dx}\Big|_{(x_0, y_0)} = \frac{-1}{2y_o}$$

ميل المستقيم الأخر:

$$x + 2y = 0$$

$$\frac{d}{dx}(x+2y) = \frac{d}{dx}(0)$$

$$1 + 2\frac{dy}{dx} = 0 \rightarrow 2\frac{dy}{dx} = -1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{2} = M_2$$

وبما ان المستقيمان متوازيان اذن ميلهما متساوي

$$M_1 = M_2 \rightarrow \frac{-1}{2y_o} = \frac{-1}{2} \rightarrow y_o = 1$$

ولان نقطة التماس تحقق المنحنى : $x_0 + y_0^2 = 1$

$$x_0 + (1)^2 = 1 \rightarrow x_0 = 0$$

مثال 7 : جد احداثي نقطة على المنحنى $y^3 = x^2$، بحيث يكون عندها مماس المنحنى عمودياً على المستقيم $y + 3x - 5 = 0$

الحل :

نقطة التماس (x_o, y_o) وميل مماسنا M_1

$$y^3 = x^2$$

$$\frac{d}{dx}(y^3) = \frac{d}{dx}(x^2)$$

$$3y^2\frac{dy}{dx} = 2x \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2x}{3y^2}$$

$$M_1 = \frac{dy}{dx}\Big|_{(x_0, y_0)} = \frac{2x_o}{3y_o^2}$$

ميل المستقيم الاخر:

$$\frac{d}{dx}(y + 3x - 5) = \frac{d}{dx}(0)$$

$$\frac{dy}{dx} + 3 = 0 \rightarrow \frac{dy}{dx} = -3 = M_2$$

بما ان المستقيمان متعامدان فإن :

$$M_1 \times M_2 = -1$$

$$\frac{2x_o}{3y_o^2} \times -3 = -1$$

$$\to \frac{2x_o}{3y_o^2} = \frac{1}{3} \to 2x_o = y_o^2$$

لكن من تعويض نقطة التماس في المنحنى فإن :

$$y_o^3 = x_o^2 \to \sqrt[3]{y_o^3} = \sqrt[3]{x_o^2} \to y_o = x_o^{\frac{2}{3}}$$

اذن :

$$2x_o = y_o^2 \to 2x_o = (x_o^{\frac{2}{3}})^2 \to 2x_o - x_o^{\frac{4}{3}} = 0$$

$$x_o(2 - x_o^{\frac{1}{3}}) = 0$$

$$x_o = 0 \quad or \quad \left(x_o^{\frac{1}{3}} = 2 \to x_o = 8\right)$$

$x_o = 0$:

$y_o = \sqrt[3]{0^2} = 0 \to (0,0)$ " تهمل لان الميل غيرمعرف

عندما

$x_o = 8 : \quad \to \quad M_1 = \frac{0}{0}$

$$y_o = \sqrt[3]{8^2} = 4 \to (8,4)$$

مثال 8 : اذا كانت العلاقة $x^3 + y^3 = 6xy$

فأجب عما يلي :

(1) أجد معادلة المماس عند نقطة تقاطع منحنى المماس مع المنحنى $y = x$ في الربع الأول

$$x^3 + y^3 = 6xy \to x^3 + x^3 = 6x^2$$

$$2x^3 = 6x^2 \to x^3 = 3x^2 \to x^3 - 3x^2 = 0$$

$$x^2(x - 3) = 0 \to x = 0, 3$$

$x = 0 \to y = 0 \to (0,0)$ ترفض لانها ليست في الربع الأول

$x = 3 \to y = 3 \to (3,3)$ نقطة التقاطع (نقطة التماس)

الان نجد معادلة المماس:

$$y - y_1 = M_1(x - x_1)$$

$$y - 3 = M_1(x - 3)$$

$$M_1 = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(3,3)}$$

$$\frac{d}{dx}(x^3 + y^3) = \frac{d}{dx}(6xy)$$

$$3x^2 + 3y^2\frac{dy}{dx} = 6x\frac{dy}{dx} + 6y$$

$$3y^2\frac{dy}{dx} - 6x\frac{dy}{dx} = 6y - 3x^2$$

$$\frac{dy}{dx}(3y^2 - 6x) = 6y - 3x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6y - 3x^2}{3y^2 - 6x} = \frac{3(2y - x^2)}{3(y^2 - 2x)}$$

$$= \frac{2y - x^2}{y^2 - 2x}$$

$$M_1 = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(3,3)} = \frac{2(3) - 3^2}{3^2 - 2(3)} = \frac{-3}{3} = -1$$

$$\to y - 3 = -1(x - 3) \to y = -x + 6$$

---

(2) جد احداثي نقطة على منحنى العلاقة في الربع الاول بحيث يكون عندها مماس المنحنى افقياً

عندها افقياً

$$M = \frac{dy}{dx}|(x_o, y_o) = \frac{2y_o - x_o^2}{y_o^2 - 2x_o} = 0$$

$$2y_o - x_o^2 = 0 \to \sqrt{x_o^2} = \sqrt{2y_o}$$

$$|x_o| = \sqrt{2y_o} \to x_o = \sqrt{2y_o}\,, \quad x_o = -\sqrt{2y_o}$$

لكن $x_o = -\sqrt{2y_o}$ ترفض لانها لا تقع في الربع الأول

$$x_o = \sqrt{2y_o}$$

نعوضها في العلاقة لنجد الاحداثيات

$$x_o^3 + y_o^3 = 6x_oy_o$$

$$(\sqrt{2y_o})^3 + y_o^3 = 6(\sqrt{2y_o})y_o$$

$$2\sqrt{2}\,(y_o)^{\frac{3}{2}} + y_o^3 = 6\sqrt{2}(y_o)^{\frac{3}{2}}$$

$$-4\sqrt{2}\,(y_o)^{\frac{3}{2}} + y_o^3 = 0$$

$y_o^{\frac{3}{2}}\left(-4\sqrt{2}+y_o^{\frac{3}{2}}\right)=0 \quad \left(y_o^{\frac{3}{2}}=0 \rightarrow y_o=0\right)$

$y_o^{\frac{3}{2}}=4\sqrt{2}$

$y_o=\sqrt[3]{(4\sqrt{2})^2}=\sqrt[3]{32}$

$\therefore x_o=\sqrt{2y_o}\ ,y_o=\sqrt[3]{32}$

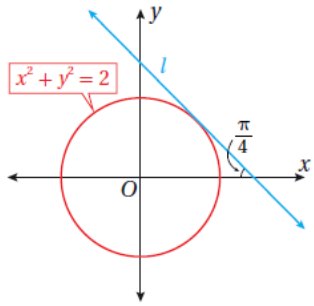
نعوض $y_o=\sqrt[3]{32}$ في x_o

$x_o=\sqrt{2y_o}=\sqrt{2\sqrt[3]{32}}=\sqrt{2\sqrt[3]{2^5}}=\sqrt{2(2)^{\frac{5}{3}}}$

$=\sqrt{2^{\frac{8}{3}}}=(2^{\frac{8}{3}})^{\frac{1}{2}}=2^{\frac{4}{3}}=\sqrt[3]{16}$

اذن النقطة هي $(\sqrt[3]{16}\ ,\sqrt[3]{32})$

مثال 9 : يبين الشكل المجاور منحنى العلاقة $x^2+y^2=2$ ، والمستقيم l الذي يمثل مماساً لمنحنى العلاقة في الربع الأول . فأجد معادلة المستقيم l



لتكن نقطة التماس $A(x_1\ ,y_1)$

بإشتقاق طرفي العلاقة $x^2+y^2=2$ بالنسبة الى x نجد أن :

$$2x+2y\frac{dy}{dx}=0 \rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{-x}{y}$$

اذن ميل المماس l هو $\frac{-x_o}{y_o}$ لكن ميل المماس l هو

$$tan\frac{3\pi}{4}=-1$$

اذن : $x_1=y_1 \quad \rightarrow \quad \frac{-x_o}{y_o}=-1$

وبتعويض $(x_1\ ,y_1)$ في المعادلة المعطاة نجد أن :

$$x_1^2+y_1^2=2$$

وبتعويض $x_1=y_1$ في هذه المعادلة نجد أن :

$$x_1^{\,2}+x_1^{\,2}=2 \quad \rightarrow \quad 2x_1^{\,2}=2$$

$$\rightarrow \quad x_1^{\,2}=1$$

$$\rightarrow \quad x_1=1$$

اذن نقطة التماس هي $A(1\ ,1)$ ومعادلة المماس l هي :

$$y-1=-1\,(x-1) \quad \rightarrow \quad y=-x+2$$

مثال 10 : تبرير : اذا مثل L أي مماس لمنحنى المعادلة $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{k}$ حيث k عدد حقيقي موجب فاثبت ان مجموع المقطع x و المقطع y للمستقيم L يساوي k، مبرراً اجابتك

أولاً: نجد معادلة المستقيم عند نقطة التماس (x_o,y_o) :

$$(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2=(\sqrt{k})^2$$

$$x+2\sqrt{x}\sqrt{y}+y=k$$

$$\frac{d}{dx}(x+2\sqrt{x}\sqrt{y}+y)=\frac{d}{dx}(k)$$

$$1+2\sqrt{x}\frac{\frac{dy}{dx}}{2\sqrt{y}}+\sqrt{y}\frac{2}{2\sqrt{x}}+\frac{dy}{dx}=0$$

$$1+\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}\frac{dy}{dx}+\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}+\frac{dy}{dx}=0$$

$$\frac{dy}{dx}\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}+1\right)=-\left(1+\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}\right)$$

$$\frac{dy}{dx}\left(\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{y}}\right)=-\left(\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}}\right)$$

مثال 11 : جد احداثيات جميع النقاط على منحنى الدائرة $x^2 + y^2 = 100$ ،والتي يكون عندها ميل المماس $\frac{3}{4}$

نقطة التماس (x_o, y_o) ، وميل مماسنا M_1

$$x^2 + y^2 = 100$$
$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \rightarrow x + y\frac{dy}{dx} = 0$$
$$y\frac{dy}{dx} = -x \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y}$$
$$M_1 = \frac{dy}{dx}\Big|_{(x_0, y_0)} = \frac{3}{4}$$
$$\frac{-x_o}{y_o} = \frac{3}{4} \rightarrow -4x_o = 3y_o \rightarrow x_o = \frac{-3}{4}y_o$$

باستخدام المعادلة الاصلية وبما ان نقطة التماس تحققها

$${x_o}^2 + {y_o}^2 = 100$$
$$(\frac{-3}{4}y_o)^2 + {y_o}^2 = 100 \rightarrow \frac{9}{16}{y_o}^2 + {y_o}^2 = 100$$
$$\frac{25}{16}{y_o}^2 = 100 \rightarrow \sqrt{{y_o}^2} = \sqrt{\frac{(100)(16)}{25}}$$
$$|y_o| = \frac{(10)(4)}{5} = 8 \rightarrow y_o = \pm 8$$
$$x_o = \frac{-3}{4}y_o$$

$y_o = 8 :\ x_o = -6 \rightarrow (-6, 8)$

$y_o = -8 :\ x_o = 6 \rightarrow (6, -8)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-(\frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x}})}{\frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{y}}} = -\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$$
$$M = \frac{dy}{dx}\Big|_{(x_0, y_0)} = -\frac{\sqrt{y_o}}{\sqrt{x_o}}$$
$$y - y_o = -\frac{\sqrt{y_o}}{\sqrt{x_o}}(x - x_o)$$

ثانياً: المقطع الصادي $(0, y)$ عوض $x = 0$

$$y - y_o = -\frac{\sqrt{y_o}}{\sqrt{x_o}}x$$
$$y - y_o = \frac{\sqrt{y_o}\, x_o}{\sqrt{x_o}}$$
$$y - y_o = \frac{\sqrt{y_o}\,\sqrt{x_o}\,\sqrt{x_o}}{\sqrt{x_o}}$$
$$y - y_o = \sqrt{y_o}\,\sqrt{x_o}$$
$$\therefore y = \sqrt{y_o}\,\sqrt{x_o} + y_o$$

ثالثاً: نجد المقطع السيني $(x, 0)$: عوض $y = 0$

$$y - y_o = -\frac{\sqrt{y_o}}{\sqrt{x_o}}(x - x_o)$$
$$0 - y_o = -\frac{\sqrt{y_o}}{\sqrt{x_o}}(x - x_o)$$
$$y_o = \frac{\sqrt{y_o}}{\sqrt{x_o}}(x - x_o) \rightarrow \frac{\sqrt{x_o}}{\sqrt{y_o}}y_o = (x - x_o)$$
$$\frac{\sqrt{x_o}\,\sqrt{y_o}\,\sqrt{y_o}}{\sqrt{y_o}} = x - x_o$$
$$\therefore x = \sqrt{x_o}\sqrt{y_o} + x_o$$

الان اثبت ان $x + y = k$

$$x + y = \sqrt{x_o}\sqrt{y_o} + x_o + \sqrt{y_o}\sqrt{x_o} + y_o$$
$$= x_o + 2\sqrt{y_o}\sqrt{x_o} + y_o = k$$

5. المشتقة الثانية للعلاقات الضمنية

مثال 1 : اذا كان $2x^3 - 3y^2 = 8$ ، فأجد $\frac{d^2y}{dx^2}$

الحل : خطوة (1) : اشتق الطرفين

$$\frac{d}{dx}(2x^3 - 3y^2) = \frac{d}{dx}(8)$$

$$6x^2 - 6y\frac{dy}{dx} = 0 \rightarrow 6y\frac{dy}{dx} = 6x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6x^2}{6y} = \frac{x^2}{y}$$

خطوة (2) : جد المشتقة الثانية

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y(2x) - (x^2)\frac{dy}{dx}}{y^2}$$

استبدل قيمة $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y(2x) - (x^2)\frac{x^2}{y}}{y^2} = \frac{2xy - \frac{x^4}{y}}{y^2}$$

$$= \frac{\frac{2xy^2 - x^4}{y}}{y^2} = \frac{2xy^2 - x^4}{y^3}$$

مثال 2 : اذا كان $xy + y^2 = 2x$ فجد $\frac{d^2y}{dx^2}$

$$xy + y^2 = 2x$$

$$x\frac{dy}{dx} + y(1) + 2y\,y' = 2$$

$$x\frac{dy}{dx} + 2y\,y' = 2 - y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2 - y}{x + 2y}$$

نشتق مرة أخرى

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(x+2y)(-y') - (2-y)(1+2y')}{(x+2y)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(x+2y)\left(-\frac{2-y}{x+2y}\right) - (2-y)\left(1+2\left(\frac{2-y}{x+2y}\right)\right)}{(x+2y)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(x+2y)\left(\frac{y-2}{x+2y}\right) - (2-y)\left(1+\left(\frac{4-2y}{x+2y}\right)\right)}{(x+2y)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{xy - 2x + 2y^2 - 4y}{x+2y} - (2-y)\left(1+\left(\frac{4-2y}{x+2y}\right)\right)}{(x+2y)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{xy - 2x + 2y^2 - 4y}{x+2y} - (2-y)\left(\frac{x+2y+4-2y}{x+2y}\right)}{(x+2y)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{xy - 2x + 2y^2 - 4y}{x+2y} - \frac{(2-y)(x+4)}{x+2y}}{(x+2y)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{xy - 2x + 2y^2 - 4y}{x+2y} - \frac{(2x+8-xy-4y)}{x+2y}}{(x+2y)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{xy - 2x + 2y^2 - 4y - 2x - 8 + xy + 4y}{x+2y}}{(x+2y)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{2xy - 4x + 2y^2 - 8}{x+2y}}{(x+2y)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2xy - 4x + 2y^2 - 8}{(x+2y)^3}$$

مثال 3 : أجد $\frac{d^2y}{dx^2}$ لكل مما يأتي :

(1) $x + y = \sin y$

$$1 + \frac{dy}{dx} - \cos y\,\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx}(1 - \cos y) = -1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{1 - \cos y}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1(\sin y\;y')}{(1-\cos y)^2} = \frac{\sin y\,\frac{-1}{1-\cos y}}{(1-\cos y)^2}$$

$$= \frac{-\sin y}{(1-\cos y)^3}$$

مثال 4 : اذا كان $x^2 + y^2 = 25$، فاثبت ان :

$$y'' = -\frac{25}{y^2}$$

الحل :

$$2x + 2yy' = 0$$
$$2yy' = -2x$$
$$y' = -\frac{2x}{2y} = \frac{-x}{y}$$
$$y'' = \frac{y(-1) - (-x)(y')}{y^2} = \frac{-y + xy'}{y^2}$$
$$= \frac{-y + x\left(\frac{-x}{y}\right)}{y^2} = \frac{-y - \frac{x^2}{y}}{y^2}$$
$$= \frac{-y^2 - x^2}{y^2} = \frac{-25}{y^2}$$

(2) $4y^3 = 6x^2 + 1$

$$4y^3 = 6x^2 + 1$$
$$12y^2 \frac{dy}{dx} = 12x$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{12x}{12y^2} = \frac{x}{y^2}$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y^2(1) - (x)(2y\,y')}{y^4}$$
$$= \frac{y^2 - 2xy\,y'}{y^4}$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y^2 - 2xy\,y'}{y^4}$$
$$= \frac{y^2 - 2xy\left(\frac{x}{y^2}\right)}{y^4} = \frac{y^2 - \frac{2x^2}{y}}{y^4}$$
$$= \frac{\frac{y^3 - 2x^2}{y}}{y^4} = \frac{y^3 - 2x^2}{y^5}$$

---

(3) $xy + e^y = e$

$$x\frac{dy}{dx} + y + e^y\frac{dy}{dx} = 0$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{-y}{x + e^y}$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(x + e^y)\left(-\frac{dy}{dx}\right) + y\left(1 + e^y\frac{dy}{dx}\right)}{(x + e^y)^2}$$
$$= \frac{(x + e^y)\left(\frac{y}{x + e^y}\right) + y\left(1 + e^y\frac{-y}{x + e^y}\right)}{(x + e^y)^2}$$
$$= \frac{(x + e^y)(y) + y(x + e^y - ye^y)}{(x + e^y)^3}$$
$$= \frac{2yx + 2ye^y - y^2e^y}{(x + e^y)^3}$$

6. المشتقة الثانية للمعادلات الوسيطية

إذا كان h و g اقترانين قابلين للاشـــتقاق عند t، وكان كلٌّ من: $x = h(t)$، و $y = g(t)$، و $\frac{dy}{dx}$ قابلًا للاشتقاق عند t، فإنَّ:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}, \quad \frac{dx}{dt} \neq 0$$

مثال 1 : جد $\frac{d^2y}{dx^2}$ للمعادلة الوسيطية الاتية عندما $t = 1$

$$x = t^3 + 3t^2, \quad y = t^4 - 8t^2$$

$$y = t^4 - 8t^2 \rightarrow \frac{dy}{dt} = 4t^3 - 16t$$

$$x = t^3 + 3t^2 \rightarrow \frac{dx}{dt} = 3t^2 + 6t$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{4t^3 - 16t}{3t^2 + 6t}$$

$$= \frac{4t(t^2-4)}{3t(t+2)}$$

$$= \frac{4}{3}\,\frac{(t-2)(t+2)}{(t+2)}$$

$$= \frac{4}{3}(t-2)$$

الان نجد المشتقة الثانية $\frac{d^2y}{dx^2}$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{4}{3}(t-2)\right)}{3t^2+6t}$$

$$= \frac{\frac{4}{3}}{3t^2+6t}$$

$$= \frac{4}{3(3t^2+6t)} = \frac{4}{9t^2+18t}$$

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=1} = \frac{4}{9(1)^2+18(1)}$$

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=1} = \frac{4}{27}$$

مثال 2 : جد $\frac{d^2y}{dx^2}$ للمعادلة الوسيطية الاتية عندما $t = 2$

$$x = 3t^2 + 1, \quad y = t^3 - 2t^2$$

$$\frac{dy}{dt} = 3t^2 - 4t, \quad \frac{dx}{dt} = 6t$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3t^2 - 4t}{6t} = \frac{t(3t-4)}{6t}$$

$$= \frac{3t - 4}{6}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{3t-4}{6}\right)}{6t}$$

$$= \frac{\frac{3}{6}}{6t} = \frac{\frac{1}{2}}{6t} = \frac{1}{12t}$$

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=2} = \frac{1}{12(2)} = \frac{1}{24}$$

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=2} = \frac{1}{24}$$

مثال 3 : أجد $\frac{d^2y}{dx^2}$ لكل معادلة وسيطية مما يلي عند قيمة t المعطاة

(1) $x = \sin t, y = \cos t, \quad t = \frac{\pi}{4}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-\sin t}{\cos t} = -\tan t$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-\sec^2 t}{\cos t} = -\sec^3 t$$

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}} = -\sec^3\frac{\pi}{4} = -2\sqrt{2}$$

$(2)\ x = e^{-t}, y = t^3 + t + 1, (t = 0)$

$$\frac{dy}{dt} = 3t^2 + 1$$

$$\frac{dx}{dt} = -e^{-t}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3t^2 + 1}{-e^{-t}} = -e^t(3t^2 + 1)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{d}{dt}\left(-e^t(3t^2+1)\right)}{-e^{-t}}$$

$$= \frac{-e^t(6t) + (3t^2+1)(-e^t)}{-e^{-t}}$$

$$= \frac{-e^t(6t + 3t^2 + 1)}{-e^{-t}} = \frac{e^t(6t + 3t^2 + 1)}{e^{-t}}$$

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0} = \frac{e^0(6(0) + 3(0)^2 + 1)}{e^0} = 1$$

مثال 4 : تبرير : اذا كان : $x^2 - y^2 = 1$ ،

فأجيب عن الأسئلة الأربعة تباعاً :

(1) أجد $\frac{dy}{dx}$.

$$x^2 - y^2 = 1$$

$$2x - 2yy' = 0$$

$$2yy' = 2x$$

$$y' = \frac{2x}{2y}$$

$$y' = \frac{x}{y}$$

(2) يمكن التعبير عن منحنى العلاقة $x^2 - y^2 = 1$ بالمعادلة الوسيطية

$x = \sec t , y = \tan t$

حيث $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$ استعمل هذه الحقيقة لايجاد $\frac{dy}{dx}$ بدلالة t

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\sec^2 t}{\sec t \tan t} = \frac{\sec t}{\tan t}$$

---

(3) اثبت ان المقدارين الجبريين الذين يمثلان $\frac{dy}{dx}$ الناتجين بالفرعين السابقين متكافئين

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$$

وبما ان (x, y) تمثل احداثيات أي نقطة تقع على منحنى العلاقة $x^2 - y^2 = 1$ ، ويمكن التعبير عنها بدلالة t وفق المعادلة الوسطية حيث

$x = \sec t , y = \tan t$ فإن

$$(x, y) = (\sec t, \tan t)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} = \frac{\sec t}{\tan t} \ \#$$

---

(4) اجد احداثيات النقطة التي يكون عندها ميل المماس 2

$$M = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(x_o, y_o)} = \frac{x_o}{y_o} = 2 \rightarrow x_o = 2y_o$$

$$x^2 - y^2 = 1$$

$$x_o^2 - y_o^2 = 1 \rightarrow (2y_o)^2 - y_o^2 = 1$$

$$\rightarrow y_o^2 = 1$$

$$y_o = \pm 1$$

النقطة الأولى $y_o = 1 \rightarrow x_o = 2 \rightarrow (2, 1)$

النقطة الثانية

$y_o = -1 \rightarrow x_o = -2 \rightarrow (-2, -1)$

أجد $\frac{dy}{dx}$ لكلٍّ ممّا يأتي:

1 $x^3y^3 = 144$

2 $xy = \sin(x+y)$

3 $y^4 - y^2 = 10x - 3$

4 $x\sin y - y\cos x = 1$

5 $\cot y = x - y$

6 $\sqrt{xy} + x + y^2 = 0$

أجد معادلة المماس لمنحنى كل علاقة ممّا يأتي عند النقطة المعطاة:

7 $x^2 + 3xy + y^2 = x + 3y$, $(2, -1)$

8 $xe^y + y\ln x = 2$, $(1, \ln 2)$

9 $4xy = 9$, $\left(1, \frac{9}{4}\right)$

10 $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{8} = 1$, $(1, 2)$

أجد $\frac{d^2y}{dx^2}$ لكلٍّ ممّا يأتي:

11 $x^2y - 4x = 5$

12 $x^2 + y^2 = 8$

13 $y^2 = x^3$

14 أجد معادلة العمودي على المماس لمنحنى العلاقة: $(x+y)^3 = x^2 + y$ عند النقطة $(1, 0)$.

15 أجد إحداثيي النقطة الواقعة في الربع الأوّل على منحنى العلاقة: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ التي يكون عندها ميل المماس -0.5

16 أجـد نقطتي تقاطع منحنى العلاقـة: $x^2 + xy + y^2 = 7$ مع المحور x، ثمَّ أُثبِت أنَّ مماسـي منحنى العلاقة عند هاتين النقطتين متوازيان.

المعدلات المرتبطة بالزمن

مفهوم أساسي استراتيجية حلّ مسائل المُعدّلات المرتبطة

1) **أفهم المسألة:** أقرأ المسألة جيدًا، ثمَّ أُحدِّد المُتغيِّر الذي أُريد إيجاد مُعدَّل تغيُّره، ومُعدَّلات التغيُّر المعطاة.
2) **أرسم مُخطَّطًا:** أرسم مُخطَّطًا يُمثِّل المسألة، ثمَّ أُدوِّن عليه المعلومات المُهِمَّة لحلِّ المسألة، مثل: الكميات الثابتة، والكميات المُتغيِّرة بمرور الزمن.
3) **أكتب معادلة:** أكتب معادلة تربط بين المُتغيِّر الذي أُريد إيجاد مُعدَّل تغيُّره والمُتغيِّرات التي علمْتُ مُعدَّلات تغيُّرها.
4) **أشتق بالنسبة إلى الزمن:** أستعمل قاعدة السلسلة والاشتقاق الضمني لإيجاد مشتقة طرفي المعادلة بالنسبة إلى المُتغيِّر الوسيط t.
5) **أُعوِّض، ثمَّ أجد مُعدَّل التغيُّر المطلوب:** أُعوِّض في المعادلة الناتجة جميع القِيَم المعلومة للمُتغيِّرات ومُعدَّلات تغيُّرها، ثمَّ أحُلُّ المعادلة تبعًا لمُعدَّل التغيُّر المطلوب إيجاده.

أسئلة :

1. عند سقوط قطرة ماء على سطح مائي تتكون موجات دائرية متحدة المركز اذا كان نصف قطر احدى الدوائر يزداد بمعدل $3cm/s$ جد :

1) معدل تغير محيط الدائرة عندما يكون نصف قطرها $5\ cm$

الحل: $\frac{dr}{dt} = 3cm/s \quad , \quad c = 5cm$

$c = 2\pi r$

$\frac{dc}{dt} = 2\pi \frac{dr}{dt} \rightarrow \frac{dc}{dt} = 2\pi(3) = 6\pi\ \ cm/s$

2) معدل تغير مساحة الدائرة عندما يكون نصف قطرها $9\ cm$

الحل: المطلوب $\left.\frac{dA}{dt}\right|_{r=9}$

$A = \pi r^2$

$\frac{dA}{dt} = \pi\left(2r\frac{dr}{dt}\right) = \pi(2(9)(3))$

$= 54\pi\ \ cm^2/s$

2. تنفخ ماجدة بالوناً على شكل كرة فيزداد حجمه بمعدل $80\ cm^3/s$ جد معدل زيادة نصف قطر البالون عندما يكون نصف القطر $6cm$

الحل:

المعطيات : $\frac{dv}{dt} = 80cm^3/s$, $r = 6cm$ ، المطلوب : $\frac{dr}{dt}$

$$v = \frac{4}{3}\pi r^3$$

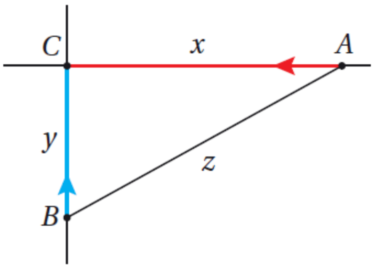
$$\frac{dv}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$$

$$80 = 4\pi(6)^2 \frac{dr}{dt}$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{80}{4\pi(36)} = \frac{5}{9\pi}\ cm/s$$

---

3. تتحرك السيارة (A) في اتجاه الغرب بسرعة $80\ km/h$ وتتحرك السيارة (B) في اتجاه الشمال بسرعة $100\ km/h$ وهما متجهتان نحو تقاطع مروري جد معدل تغير البعد بين السيارتين عندما تكون السيارة (A) والسيارة (B) على بعد $0.3km$, $0.4km$ على الترتيب من التقاطع .



الحل:

المعطيات : $\frac{dx}{dt} = -80$, $\frac{dy}{dt} = -100$, $x = 0.3$, $y = 0.4$

المطلوب : $\frac{dz}{dt}$

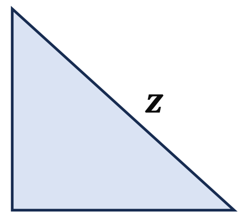
$$z^2 = x^2 + y^2 \rightarrow z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\rightarrow \frac{dz}{dt} = \frac{2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}}{2\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\rightarrow \frac{dz}{dt} = \frac{2(0.3)(-80) + 2(0.4)(-100)}{2\sqrt{(0.3)^2 + (0.4)^2}}$$

$$= -128\ km/h$$

4. تحركت السيارة (A) والسيارة (B) في الوقت نفسه ومن النقطة نفسها بحيث اتجهت السيارة (A) نحو الشمال بسرعة $45\ km/h$ واتجهت السيارة (B) نحو الشرق بسرعة $40\ km/h$ جد معدل تغير البعد بين السيارتين بعد ساعتين من انطلاقهما .



الحل:

المعطيات : $\frac{dx}{dt} = 45$, $\frac{dy}{dt} = 40$

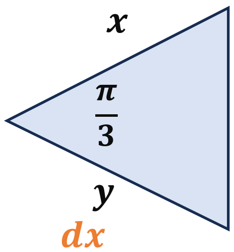
المطلوب : $\frac{dz}{dt}$

$$x = \frac{dx}{dt} * t$$
$$x = 45 * 2$$
$$x = 90$$
$$y = \frac{dy}{dt} * t$$
$$y = 40 * 2$$
$$y = 80$$

$$z^2 = x^2 + y^2 \quad \rightarrow \quad z = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\rightarrow \frac{dz}{dt} = \frac{2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}}{2\sqrt{x^2 + y^2}}$$
$$\rightarrow \frac{dz}{dt} = \frac{2(90)(45) + 2(80)(40)}{2\sqrt{(90)^2 + (80)^2}}$$
$$= \frac{\sqrt{14500}}{2}$$

---

5. تحركت دراجتان في الوقت نفسه ومن النقطة نفسها على طريقين مستقيمين قياس الزاوية بينهما $\frac{\pi}{3}\ rad$ اذا كانت سرعة الدراجة الأولى $20\ km/h$ وسرعة الدراجة الثانية $15\ km/h$ جد سرعة ابتعاد كل منهما عن الأخرى بعد ساعتين من الانطلاق .



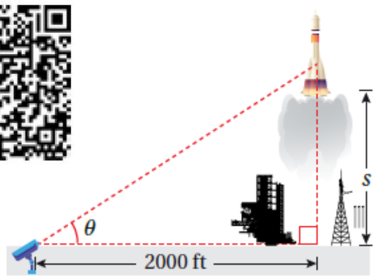
الحل: المعطيات : $\frac{dx}{dt} = 20\ km/h$, $\frac{dy}{dt} = 15\ km/h$

المطلوب : $\frac{dz}{dt}$

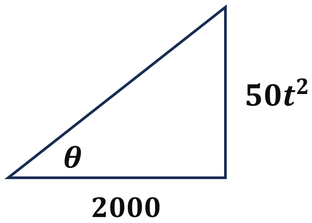
$$x = \frac{dx}{dt} * t$$
$$x = 20 * 2$$
$$x = 40$$
$$y = 15 * 2$$
$$y = 30$$

$$z^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos\theta$$
$$z = \sqrt{x^2 + y^2 - 2xy\cos\frac{\pi}{3}}$$
$$z = \sqrt{x^2 + y^2 - xy}$$
$$\frac{dz}{dt} = \frac{2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} - x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}}{2\sqrt{x^2 + y^2 - xy}}$$
$$\frac{dz}{dt} = \frac{2(20)(40) + 2(30)(15) - (40)(15) - (30)(20)}{2\sqrt{(40)^2 + (30)^2 - (40)(30)}}$$
$$\frac{dz}{dt} = \frac{\sqrt{1300}}{2}\ km/h \approx 18\ km/h$$

6. رصدت كاميرا مثبتة عند مستوى سطح الأرض لحظة اطلاق صاروخ رأسياً للاعلى ، واعطي ارتفاعه بالاقتران $s(t) = 50t^2$ حيث (s) الموقع بالاقدام (t) الزمن بالثواني ، اذا كانت الكاميرا تبعد مسافة $2000\ ft$ عن منصة الاطلاق جد معدل تغيرزاوية ارتفاع الصاروخ بعد 10 ثواني من الانطلاق



الحل: المطلوب: $\frac{d\theta}{dt}$ عند $t = 10$



$$\tan\theta = \frac{50t^2}{2000}$$

$$\tan\theta = \frac{t^2}{40}$$

$$\sec^2\theta\frac{d\theta}{dt} = \frac{2t}{40}$$

يلزمنا $\sec^2\theta$

$$\tan\theta = \frac{t^2}{40}$$

$$\tan\theta = \frac{100}{40} = \frac{5}{2}$$

$$\sec^2\theta = \tan^2\theta + 1$$

$$= \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 1$$

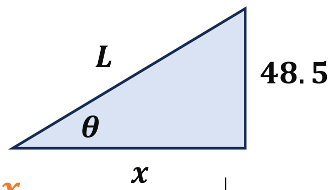
$$\sec^2\theta = \frac{29}{4}$$

$$\frac{29}{4}\frac{d\theta}{dt} = \frac{2(10)}{40} \rightarrow \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{29}\right) = \frac{2}{29}\ rad/s$$

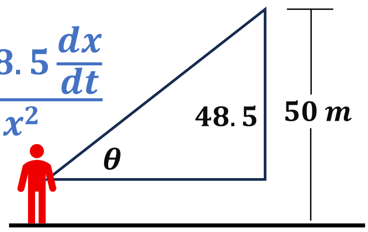
---

7. امسك ولد بكرة خيط طائرة ورقية تُحلق على ارتفاع $50\ m$ فوق سطح الأرض وتتحرك افقياً بسرعة $2\ m/s$ جد معدل تغيرالزاوية بين الخيط والمستوى الافقي عندما يكون طول الخيط $100\ m$ علماً ان ارتفاع يد الولد عن الأرض $1.5\ m$

الحل:



المعطيات : $\frac{dx}{dt} = 2\ m/s$ ، المطلوب: $\frac{d\theta}{dt}$ عند $L = 100$



$$\tan\theta = \frac{48.5}{x} \rightarrow \sec^2\theta\frac{d\theta}{dt} = \frac{-48.5\frac{dx}{dt}}{x^2}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{-48.5(2)}{x^2}\cos^2\theta$$

يلزمنا $\cos^2\theta$

$$\cos\theta = \frac{x}{L}$$

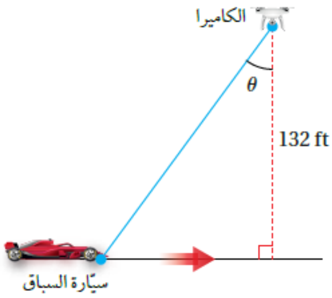
$$\cos^2\theta = \frac{x^2}{L^2}$$

$$\cos\theta = \frac{x^2}{(100)^2}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{(-97)}{x^2}\left(\frac{x^2}{10000}\right)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{-97}{10000}$$

8. ترتفع كاميرا عن الأرض مسافة 132 وترصد سيارة تتحرك على مضمار سباق وتبلغ سرعتها $264\ f/s$ كما في الشكل جد



1) سرعة تغير الزاوية θ عندما تكون السيارة اسفل الكاميرا تماماً .

الحل: المعطيات : $\frac{dx}{dt} = -264$

المطلوب $\frac{d\theta}{dt}$ عند $\theta = 0\ , x = 0$

$$\tan\theta = \frac{x}{132}$$

$$\sec^2\theta\,\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{132}\,\frac{dx}{dt}$$

$$\sec^2(0)\,\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{132}(-264)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{132} * -264 = -2\ rad/s$$

2) سرعة تغير الزاوية θ بعد نصف ثانية من مرور السيارة اسفل الكاميرا

الحل: المعطيات : $\frac{dx}{dt} = 264$

المطلوب $\frac{d\theta}{dt}$.

$$\tan\theta = \frac{x}{132}$$

$$\sec^2\theta\,\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{132}\,\frac{dx}{dt}$$

يلزم $\sec^2\theta$

$$x = \frac{dx}{dt} * t$$

$$x = 264 * \frac{1}{2} = 132$$

$$\tan\theta = \frac{x}{132} = \frac{132}{132} = 1$$

$$\sec^2\theta = \tan^2\theta + 1$$

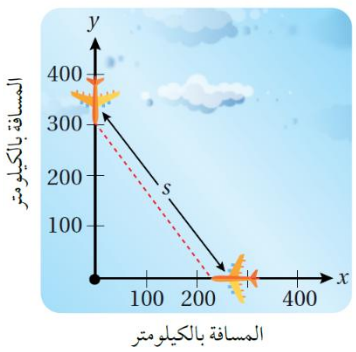
$$\sec^2\theta = 2$$

$$2\,\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{132} * 264$$

$$\frac{d\theta}{dt} = 1\ rad/s$$

---

9. طيران رصد مراقب الحركة الجوية في احد المطارات طائرتين تحلقان على الارتفاع نفسه وتقتربان من نقطة التقاء مسار حركتيهما في زاوية قائمة كما في الشكل المجاور . كانت احدى الطائرتين تبعد مسافة $225\ km$ عن النقطة ، وتسير بسرعة $450\ km/h$ في حين كانت الطائرة الأخرى تبعد مسافة $300\ km$ عن النقطة ، وتسير بسرعة $600\ km/h$



1) جد معدل تغير المسافة بين الطائرتين في تلك اللحظة

الحل : المعطيات : $\frac{dx}{dt} = -450\ , \frac{dy}{dt} = -600\ ,\ x = 225\ ,\ y = 300$

المطلوب $\frac{ds}{dt}$

$$s^2 = x^2 + y^2 \rightarrow s = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \frac{ds}{dt} = \frac{2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}}{2\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\rightarrow \frac{ds}{dt} = \frac{2(225)(-450) + 2(300)(-600)}{2\sqrt{(225)^2 + (300)^2}} = \frac{-562500}{750}\ km/h = -750\ km/h$$

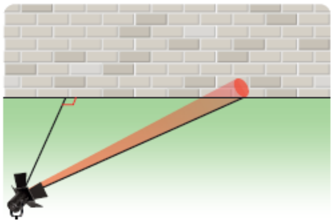
2) هل يجب على مراقب الحركة الجوية توجيه احدى الطائرتين لاتخاذ مسار مختلف مبرراً اجابتك

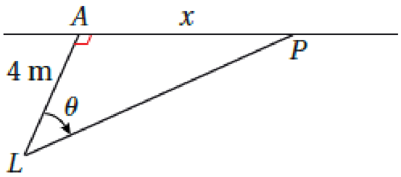
الحل: نحسب زمن وصول كل طائرة الى نقطة الملتقى $t = \frac{\text{المسافة}}{\text{الزمن}}$

$$t_1 = \frac{225}{450} = \frac{1}{2}\quad ,\quad t_2 = \frac{300}{600} = \frac{1}{2}$$

$t_1 = t_2$ تصلان معاً لذا يجب توجيه احدى الطائرتين لتغير المسار

10. يدور مصباح مثبت بالأرض حول نفسه 3 دورات في الدقيقة ، ويبعد مسافة $4\ m$ عن جدار مستقيم كما في الشكل المجاور . اجد سرعة تحرك بقعة ضوء المصباح على الجدار عندما تكون على بعد $8\ m$ من اقرب نقطة الى المصباح على الجدار اثناء حركتها مبتعدة عن هذه النقطة .





الحل :

$\frac{d\theta}{dt} = 3(2\pi) = 6\pi\ rad/min$ (موجبة لانها مبتعدة أي تزداد الزاوية)

المطلوب : $\frac{dx}{dt}$ عند $x = 8$

$\tan\theta = \frac{x}{4}$

$x = 4\tan\theta$

$\frac{dx}{dt} = 4\sec^2\theta\frac{d\theta}{dt}$

يلزمنا $\sec^2\theta$

$\frac{dx}{dt} = 4(5)(6\pi) = 120\pi\ m/min$

$\tan\theta = \frac{x}{4}$

$x = 8$

$\tan\theta = \frac{8}{4} = 2$

$\sec^2\theta = \tan^2\theta + 1$

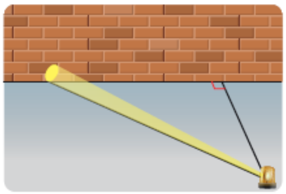
$\sec^2\theta = 4 + 1$

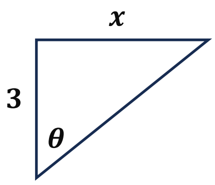
$\sec^2\theta = 5$

ملاحظة : على فرض ان بقعة الضوء تقترب من النقطة $\frac{d\theta}{dt} = -6\pi\frac{rad}{min}$

---

11. يدور مصباح مثبت بالأرض حول نفسه 4 دورات في الدقيقة ، ويبعد مسافة $3\ m$ عن جدار مستقيم كما في الشكل المجاور . اجد سرعة تحرك بقعة ضوء المصباح على الجدار عندما تكون على بعد $1\ m$ من اقرب نقطة الى المصباح على الجدار اثناء حركتها مقتربة من هذه النقطة .





الحل :

المعطيات : $\frac{d\theta}{dt} = -8\pi\ rad/min$ ، المطلوب : $\frac{dx}{dt}$ عند $x = 1$

$\tan\theta = \frac{x}{3}$

$x = 3\tan\theta$

$\frac{dx}{dt} = 3\sec^2\theta\frac{d\theta}{dt}$

يلزمنا $\sec^2\theta$

$\frac{dx}{dt} = 3\left(\frac{10}{9}\right)(-8\pi) = -\frac{80\pi}{3}\ m/min$

$\tan\theta = \frac{x}{3} \rightarrow \tan\theta = \frac{1}{3}$

$\sec^2\theta = \tan^2\theta + 1$

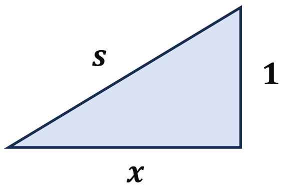
$\sec^2\theta = \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 1$

$\sec^2\theta = \frac{10}{9}$

12. قوارب : يسحب جمال قاربه الى رصيف الاصطفاف باستعمال بكرة سحب ترتفع $1\ m$ عن مقدمة القارب . اذا طوت البكرة حبل السحب بسرعة $1\ m/s$ وكان القارب يبعد عن الرصيف مسافة $8\ m$ في لحظة ما ، فما سرعة اقتراب القارب من الرصيف عندئذٍ .

الحل:

المعطيات : $\frac{ds}{dt} = -1\ m/s$ ، المطلوب $\frac{dx}{dt}$ عند $x = 8$



$s^2 = x^2 + 1^2$

$2s\frac{ds}{dt} = 2x\frac{dx}{dt}$

يلزمنا (s)

$s^2 = x^2 + 1$

$s^2 = (8)^2 + 1$

$s = \sqrt{65}$

$\sqrt{65}(-1) = 8\frac{dx}{dt}$

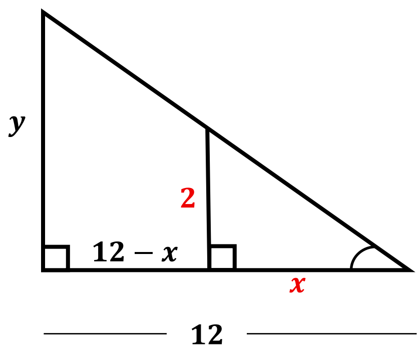
$\frac{dx}{dt} = \frac{-\sqrt{65}}{8}$

---

13. مصباح مثبت بالأرض ، وهو يضيء على جدار يبعد عنه مسافة $12\ m$ اذا سار رجل طوله $2\ m$ من موقع المصباح الى الجدار بسرعة $1.6\ m/s$ جد معدل تغير طول ظله على الجدار عندما يكون على بعد $4\ m$ من الجدار

الحل:

المعطيات : $\frac{dx}{dt} = 1.6$ ، طول ظل الرجل $= y$ ، المطلوب $\frac{dy}{dt}$



من التشابه :

$\frac{y}{12} = \frac{2}{x}$

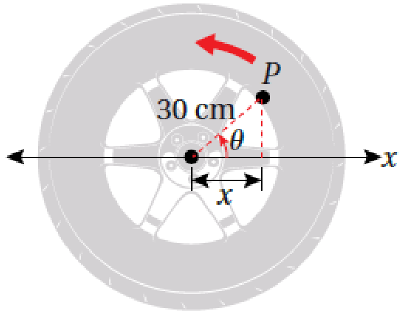
$y = \frac{24}{x}$

$\frac{dy}{dt} = \frac{-24}{x^2}\frac{dx}{dt} = \frac{-24}{64} * 1.6 = -0.6\ m/s$

$12 - x = 4$

$x = 8$

14. عجلة سيارة طول نصف قطرها الداخلي $30\ cm$ وهي تدور بمعدل 10 دورات في الثانية . رسمت النقطة P على حافة العجلة كما في الشكل جد :



1) جد $\frac{dx}{dt}$ بدلالة θ

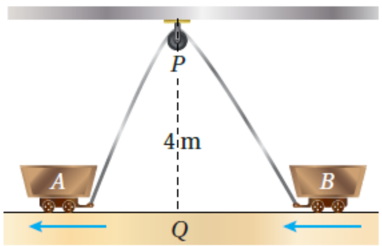
$$\frac{dx}{dt} = -600\pi \sin\theta$$

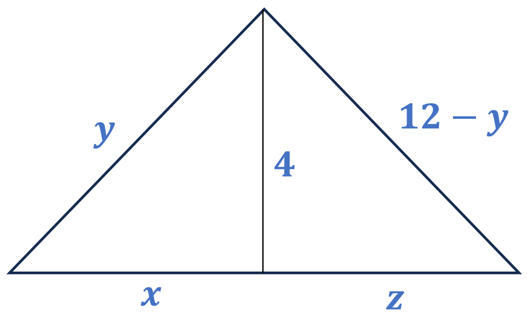
2) جد $\frac{dx}{dt}$ عند $\theta = 45°$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{-600\pi}{\sqrt{3}}$$

---

15. تبرير : ربطت العربتان A, B بحبل طوله $12\ m$ وهو يمر بالبكرة P كما في الشكل المجاور. اذا كانت النقطة Q تقع على الأرض بين العربتين اسفل P مباشرة ، وتبعد عنها مسافة $4\ m$ وكانت العربة A تتحرك بعيداً عن النقطة Q بسرعة $0.5\ m/s$ فأجد سرعة اقتراب العربة B من النقطة Q في اللحظة التي تكون فيها العربة A على بعد $3\ m$ من النقطة Q مبرراً اجابتي





الحل:

المعطيات : $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}$

المطلوب $\frac{dz}{dt}$ عند $x = 3$

يلزمنا y , $\frac{dy}{dt}$

$$y^2 = x^2 + 16$$
$$y^2 = (3)^2 + 16$$
$$y = 5$$

نشتق لايجاد $\frac{dy}{dt}$

$$y^2 = x^2 + 16$$
$$2y\frac{dy}{dt} = 2x\frac{dx}{dt}$$
$$5\frac{dy}{dt} = 3 * \frac{1}{2}$$
$$\frac{dy}{dt} = \frac{3}{10}$$

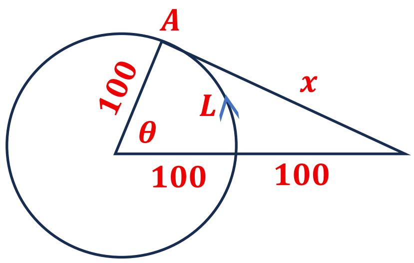
$$(12-y)^2 = (4)^2 + z^2$$
$$z = \sqrt{(12-y)^2 - 16}$$
$$z = \sqrt{(12-y)^2 - 16}$$
$$\frac{dz}{dt} = \frac{2(12-y)\left(-\frac{dy}{dt}\right)}{2\sqrt{(12-y)^2-16}}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{(12-5)\left(-\frac{3}{10}\right)}{\sqrt{(12-5)^2-16}}$$
$$= \frac{7\left(-\frac{3}{10}\right)}{\sqrt{33}} = \frac{-21}{10\sqrt{33}}$$

16. يركض عداء في مضمار دائري ، طول قطره $(100\ m)$ بسرعة ثابتة $7\ m/s$ ويقف عداء اخر على بعد $(200\ m)$ من مركز مضمار الركض جد معدل تغير المسافة بين العداءين عندما تكون المسافة بينهما $(200\ m)$

الحل :

المعطيات : $\frac{dl}{dt} = 7\ m/s$ ، المطلوب $\frac{dx}{dl}$ عند $x = 200$



$$x^2 = (100)^2 + (200)^2 - 2(100)(200)\cos\theta$$

$$x = \sqrt{50000 - 40000\cos\theta}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{40000\sin\theta\,\frac{d\theta}{dt}}{2\sqrt{50000 - 40000\cos\theta}}$$

يلزمنا $\frac{d\theta}{dt}$, $\sin\theta$, $\cos\theta$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{40000\left(\frac{\sqrt{15}}{4}\right)\left(\frac{7}{100}\right)}{2\sqrt{50000 - 40000\left(\frac{1}{4}\right)}}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{70000\sqrt{15}}{400 * 100} = \frac{7\sqrt{15}}{4}$$

عند $x = 200$

$$(200)^2 = (100)^2 + (200)^2 - 2(100)(200)\cos\theta$$

$$40000\cos\theta = 10000$$

$$\boxed{\cos\theta = \frac{1}{4}}$$

ومنه $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$

$$\sin^2\theta = 1 - \frac{1}{16}$$

$$\sin^2\theta = \frac{15}{16}$$

$$\boxed{\sin\theta = \frac{\sqrt{15}}{4}}$$

$$L = 100\,\theta$$

$$\frac{dL}{d\theta} = 100\,\frac{d\theta}{dt}$$

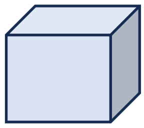
$$\boxed{\frac{d\theta}{dt} = \frac{7}{100}}$$

توجد حالة أخرى اذا كان العداء (A) يركض الى اليمين تكون $\frac{dl}{dt} = -7$ ومنه :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{-7\sqrt{15}}{4}$$

17. مكعب طول ضلعه $10\ cm$ بدأ المكعب يتمدد فزاد طول ضلعه بمعدل $6\ cm/s$ وظل محافظاً على شكله جد :

1) معدل تغير حجم المكعب بعد $4s$ من تمدده



$10 + x$

الحل:

المعطيات: $\frac{dx}{dt} = 6\ cm/s$

المطلوب: $\frac{dv}{dt}$ عند $t = 4$

$$v = (10 + x)^3$$

$$\frac{dv}{dt} = 3(10 + x)^2 \left(\frac{dx}{dt}\right)$$

يلزمنا x

$$x = \frac{dx}{dt} * t \quad \to \quad x = 6 \times 4 = 24 \quad \to x = 24$$

$$\frac{dv}{dt} = 3(10 + 24)^2(6) = 20808\ cm/s$$

2) معدل تغير مساحة سطح المكعب بعد $6s$ من بدء تمدده .

الحل:

$$A = 6(x + 10)^2$$

$$\frac{dA}{dt} = 12(x + 10)\frac{dx}{dt}$$

يلزمنا x

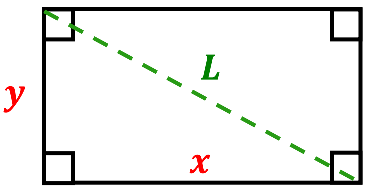
$$x = \frac{dx}{dt} * t \quad \to \quad x = 6 * 6 = 36$$

$$\to x = 36$$

$$\frac{dA}{dt} = 12(36 + 10)(6) = 3312\ cm^2/s$$

---

18. يزداد طول احد اضلاع مستطيل بمعدل $2\ cm/s$ ويقل طول ضلعه الاخر بمعدل $3\ cm/s$ بحيث يحافظ على شكله وفي لحظة معينة بلغ طول الضلع الأول $20\ cm$ وطول الضلع الثاني $50\ cm$



$$\frac{dx}{dt} = 2 \quad , \quad \frac{dy}{dt} = -3 \quad , \quad x = 20 \quad , \quad y = 50$$

1) معدل تغير مساحة سطح المستطيل في تلك اللحظة

$$A = (x)(y)$$

$$\frac{dA}{dt} = x\frac{dy}{dt} + y\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dA}{dt} = 20(-3) + 50(2) = 40\ cm^2/s$$

2) معدل تغير محيط المستطيل في تلك اللحظة

$$C = 2x + 2y$$

$$\frac{dc}{dt} = 2\frac{dx}{dt} + 2\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dc}{dt} = 2 * 2 + 2 * -3 = -2\ cm/s$$

3) معدل تغير طول قطر المستطيل في تلك اللحظة

$$L^2 = x^2 + y^2 \quad \to \quad L = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\frac{dL}{dt} = \frac{2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}}{2\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\frac{dL}{dt} = \frac{2(20)(2) + 2(50)(-3)}{2\sqrt{(50)^2 + (20)^2}}$$

$$= \frac{40 - 150}{\sqrt{2900}} = \frac{-11}{\sqrt{29}}\ cm/s$$

4) أي من الكميات في المسافة متزايد ايهما متناقص مع التبرير

المسافة تتزايد لان ناتج معدل تغير المسافة (40) موجب

المحيط يتناقص لان ناتج معدل تغير المحيط (-2) سالب

طول القطر يتناقص لان معدل تغير قطر المستطيل سالب

19. خزان اسطواني الشكل ارتفاعه $15\ m$ وقطر قاعدته $2\ m$ مُلئَ الخزان بالوقود بمعدل $500\ L/min$ جد:

1) معدل ارتفاع الوقود في الخزان .

الحل:

$$1\ m^3 = 1000\ L \quad , \quad \frac{1}{2}\ m^3 = 500\ L$$

المعطيات : $\frac{dv}{dt} = \frac{1}{2}\ m^3/min$

المطلوب : $\frac{dh}{dt}$

$$v = \pi r^2 h$$

وانتبه $r = 1$ ثابت

$$v = \pi h$$

$$\frac{dv}{dt} = \pi \frac{dh}{dt} \rightarrow \frac{1}{2} = \pi \frac{dh}{dt}$$

$$\rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{1}{2\pi}\ m/min$$

2) معدل تغير المساحة الجانبية للوقود

الحل:

$$A = 2\pi r h$$

$$A = 2\pi h$$

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi \frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi \left(\frac{1}{2\pi}\right)$$

$$\frac{dA}{dt} = 1\ m^2/min$$

---

20. أسطوانة دائرية قائمة مصنوعة من المعدن ارتفاعها يساوي $\frac{7}{6}$ طول قطر قاعدتها دائماً . اذا كان ارتفاعها يزداد بمعدل $0.01\ cm/s$ جد معدل التغير في حجم هذه الأسطوانة عندما يكون محيط قاعدتها $12\pi\ cm$

الحل: المعطيات : $\frac{dh}{dt} = 0.01$ ، المطلوب : $\frac{dv}{dt}$

$$h = \frac{7}{6}(2r) = \frac{7}{3}r \rightarrow r = \frac{3}{7}h$$

$$v = \pi r^2 h$$

$$v = \pi \left(\frac{3}{7}h\right)^2 h$$

$$v = \frac{9\pi}{49}h^3$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{27\pi}{49}h^2\frac{dh}{dt}$$

يلزمنا h

ومنه :

محيط القاعدة $= 2\pi r$

$$2\pi r = 12\pi$$

$$r = 6$$

$$h = \frac{7}{3}r$$

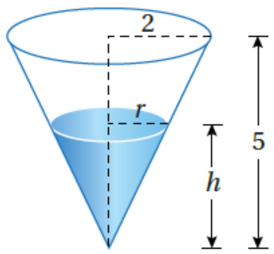
$$h = \frac{7}{3}(6)$$

$$h = 14$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{27\pi}{49}(14)^2(0.01)$$

$$= \frac{27\pi}{25}\ cm^3/s$$

21. خزان ماء على شكل مخروط دائري قائم ، ارتفاعه $5\ m$ ونصف قطر قاعدته $2\ m$ رأسه للاسفل ، تسرب الماء من الخزان بمعدل $\frac{1}{12}\ m^3/min$ ما معدل تغير ارتفاع الماء في الخزان عندما يكون ارتفاعه $4m$



الحل: المعطيات : $\frac{dv}{dt} = \frac{-1}{12}$, $h = 4$ ، المطلوب: $\frac{dh}{dt}$

$$v = \frac{\pi}{3} r^2 h$$

لم يعطي أي معلومة عن المتغير (r) لذا تكتب بدلالة (h)

من التشابه :

$$\frac{r}{h} = \frac{2}{5}$$

$$r = \frac{2}{5} h$$

$$r^2 = \frac{4}{25} h^2$$

$$v = \frac{\pi}{3}\left(\frac{2h}{5}\right)^2 h = \frac{4\pi}{75} h^3$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{4\pi}{25} h^2 \frac{dh}{dt}$$

$$-\frac{1}{12} = \frac{4\pi}{25}(4)^2 \frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{-25}{768\pi}\ m/min$$

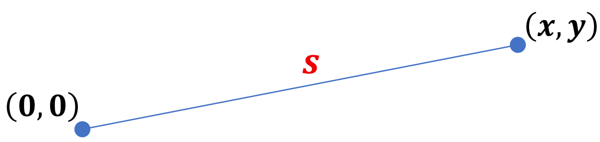
---

22. فيزياء : يتحرك جسيم على منحنى الاقتران $f(x) = 2\sin\frac{\pi x}{2}$ وعند مروره بالنقطة $\left(\frac{1}{3}, 3\right)$ فإن الاحداثي x لموقعه يزداد بمعدل $\sqrt{10}$ وحدة طول لكل ثانية . أجد معدل تغير المسافة بين الجسيم ونقطة الأصل في هذه اللحظة .

الحل:

المعطيات : $y = 2\sin\frac{\pi}{2}x$, $\frac{dx}{dt} = \sqrt{10}$ ، النقطة $\left(\frac{1}{3}, 3\right)$

المطلوب : $\frac{ds}{dt}$



$$s = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$s = \sqrt{(x - 0)^2 + (y - 0)^2}$$

$$s = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}}{2\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{2\left(\frac{1}{3}\right)(\sqrt{10}) + 2(1)\left(\frac{\sqrt{30}\pi}{2}\right)}{2\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + (1)^2}}$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{\frac{\sqrt{10}}{3} + \frac{\sqrt{30}}{2}\pi}{\sqrt{\frac{10}{9}}} = 1 + \frac{3}{2}\sqrt{3}\pi$$

$$y = 2\sin\frac{\pi}{2}x$$

$$\frac{dy}{dt} = 2\cos\frac{\pi}{2}x\left(\frac{\pi}{2}\frac{dx}{dt}\right)$$

$$= 2\cos\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{10}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}(\pi\sqrt{0})$$

$$= \frac{\sqrt{30}\pi}{2}$$

23.يسقط الرمل من حزام ناقل بمعدل $10\ m^3/min$ على كومة مخروطية الشكل اذا كان ارتفاع الكومة يساوي ثلاث اثمان طول قطر قاعدتها جد :

1) سرعة تغير ارتفاع في الكومة عندما يكون ارتفاعها $4m$

الحل:

المعطيات : $\frac{dv}{dt} = 10$

$$h = \frac{3}{8}(2r) = \frac{3}{4}r$$

المطلوب : $\frac{dh}{dt}$ عند $h = 4$

$$v = \frac{\pi}{3}r^2 h$$

لم يعطي أي معلومة عن (r) لذا نكتب بدلالة (h)

$$h = \frac{3}{4}r$$
$$r = \frac{4}{3}h$$
$$r^2 = \frac{16}{9}h^2$$

$$v = \frac{\pi}{3}\left(\frac{16}{9}h^2\right)h$$
$$v = \frac{16\pi}{27}h^3$$
$$\frac{dv}{dt} = \frac{16\pi}{9}h^2\frac{dh}{dt}$$
$$10 = \frac{16\pi}{9}(4)^2\frac{dh}{dt}$$
$$\frac{dh}{dt} = \frac{45}{128\pi}$$

2) سرعة تغير طول نصف القطر عندما يكون الارتفاع $4m$

الحل:

$$v = \frac{\pi}{3}r^2 h$$
$$v = \frac{\pi}{3}r^2\left(\frac{3}{4}r\right) = \frac{\pi}{4}r^3$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{3\pi}{4}r^2\frac{dr}{dt}$$

يلزمنا قيمة (r)

$$h = \frac{3}{4}r$$
$$4 = \frac{3}{4}r$$
$$r = \frac{16}{3}$$

$$10 = \frac{3}{4}\left(\frac{16}{3}\right)^2\frac{dr}{dt}$$
$$\frac{dr}{dt} = \frac{15}{32\pi}$$

ويمكن حل السؤال بالاعتماد على الفرع السابق

---

3) سرعة تغير مساحة قاعدة الكومة عندما يكون ارتفاعها $(4\ m)$

مُلِئَ بالون كروي بالهيليوم بمُعدَّل $8\ \text{cm}^3/\text{s}$. أجد مُعدَّل تغيُّر نصف قُطْر البالون في كلٍّ من الحالات الآتية:

1 عندما يكون طول نصف قُطْره $12\ \text{cm}$

2 عندما يكون حجمه $36\ \pi\ \text{cm}^3$ (أُقرِّب إجابتي إلى أقرب جزء من مئة).

3 إذا مُلِئَ مدَّة $33.5\ \text{s}$

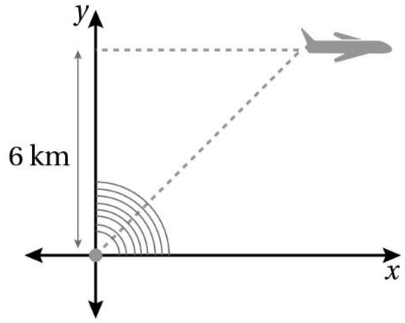
إذا كانت θ الزاوية المحصورة بين الضلعين اللذين طول كلٍّ منهما s في مثلث متطابق الضلعين، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

4 أُثبِت أنَّ مساحة المثلث تعطى بالمعادلة: $A = \frac{1}{2} s^2 \sin \theta$.

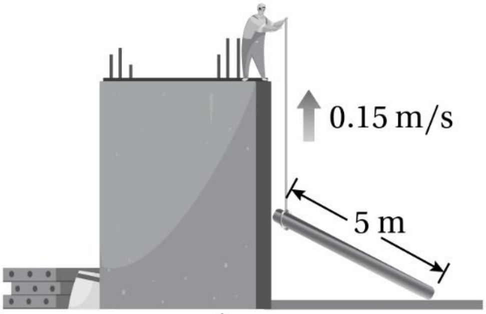
5 إذا كانت الزاوية θ تزداد بمُعدَّل $\frac{1}{2}\ \text{rad/min}$ ، فأجد مُعدَّل تغيُّر مساحة المثلث عندما $\theta = \frac{\pi}{6}$، علمًا بأنَّ طول الضلعين المتطابقين ثابت.

6 يتحرَّك جُسَيْم على منحنى الاقتران: $f(x) = \frac{10}{1 + x^2}$. إذا كان مُعدَّل تغيُّر الإحداثي x هو $3\ \text{cm/s}$، فأجد مُعدَّل تغيُّر الإحداثي y عندما $x = 20$.

7 حلَّقت طائرة على ارتفاع 6 km، ومَرَّت أثناء تحليقها مباشرة فوق رادار كما في الشـكل المجاور. وعندما أصبح البُعْد بينها وبين الرادار 10 km، رصد الرادار مُعدَّل تغيُّر البُعْد بينه وبين الطائرة، فكان 300 km/h. أجد سـرعة الطائرة في هذه اللحظة.

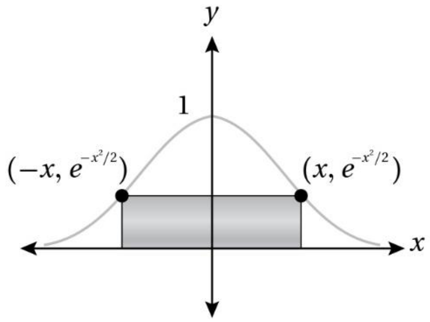


8 **بناء:** يسـحب عامل بناء لوحًا خشـبيًّا طولـه 5 m إلى الأعلى بجانب مبنى لم يكتمل إنشـاؤه بعدُ، وذلك باستعمال حبل رُبِط به أحد طرفي اللوح كما في الشـكل المجاور. إذا افترضْتُ أنَّ طرف اللوح غير المربوط بالحبل يتبع مسـارًا عموديًّا على جدار المبنى، وأنَّ العامل يسحب الحبل بمُعدَّل 0.15 m/s، بحيث يظلُّ الطرف العلوي من اللوح مُلامِسًا للجدار، فما سرعة انزلاق الطرف الآخر للوح على الأرض عندما يكون على بُعْد 3 m من جدار المبنى؟



أُشاهِد المقطع المرئي (الفيديو) في الرمز الآتي:

يُبيِّـن الشـكل المجـاور مسـتطيلًا مرسـومًا داخـل منحنـى الاقتران: $f(x) = e^{-x^2/2}$. إذا كان x يتغيَّـر مع الزمن، مُغيِّرًا معه موضع المسـتطيل، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:



9 أجد مساحة المستطيل بدلالة x.

10 أجد مُعدَّل تغيُّر مساحة المستطيل عندما $x = 4$ cm، وعندما $\frac{dx}{dt} = 4$ cm/min.