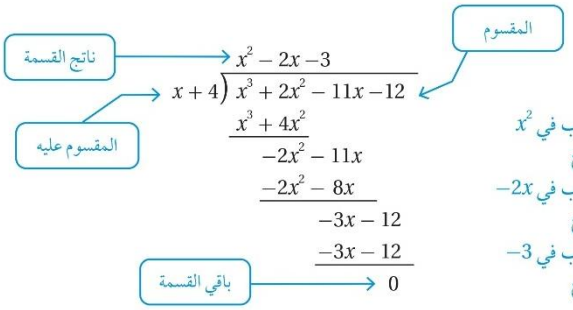
الدرس الأول : نظريتا الباقي والعوامل
The Remainder and Factor Theorems

1. القسمة باستعمال الجدول

تعلَّمْتُ أيضًا أنَّه يُمكِن قسمة كثيرحدود على كثيرحدود آخر باستعمال القسمة الطويلة.

فمثلاً، يُمكِن قسمة $(x^3 + 2x^2 - 11x - 12)$ على $(x + 4)$ كما يأتي:



أتذكَّر: تتوقَّف عملية قسمة كثيرات الحدود عندما تصبح درجة باقي القسمة أقل من درجة المقسوم عليه.

طريقة الجدول: هي طريقة لقسمة كثيرات الحدود تعتمد بشكل أساسي على ضرب كثيرات الحدود، بوصفها عملية عكسية لعملية القسمة.

مثال 1: أستعمل طريقة الجدول لإيجاد ناتج:

$$(9x^3 - x + 3) \div (3x - 2)$$

ثم أتحقق من صحة الحل.

الحل:

×	$3x^2$	$2x$	1	
$3x$	$9x^3$	$6x^2$	$3x$	5
-2	$-6x^2$	$-4x$	-2	

الباقي

إذن، ناتج القسمة هو: $3x^2 + 2x + 1$ ،والباقي **5** ، ويمكنني كتابة ذلك كما يأتي:

مثال 2: أستعمل طريقة الجدول لإيجاد ناتج كل مما يأتي:

$a)\ (x^3 + 6x^2 - 9x - 14) \div (x + 1)$

الحل:

×	x^2	$5x$	-14	
x	x^3	$5x^2$	$-14x$	0
1	x^2	$5x$	-14	

ناتج القسمة هو: $x^2 + 5x - 14$

باقي القسمة هو: 0

$b)\ (2x^3 - x^2 + 3) \div (x - 3)$

الحل:

×	$2x^2$	$5x$	15	
x	$2x^3$	$5x^2$	$15x$	48
-3	$-6x^2$	$-15x$	-45	

ناتج القسمة هو: $2x^2 + 5x + 15$

باقي القسمة هو: 48

مثال 3: أستعمل طريقة الجدول لإيجاد ناتج القسمة والباقي في كلٍّ ممّا يأتي:

$(1)\ (6x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 7x - 12) \div (3x - 4)$

الحل:

×	$2x^3$	x^2	$4x$	3	
$3x$	$6x^4$	$3x^3$	$12x^2$	$9x$	0
-4	$-8x^3$	$-4x^2$	$-16x$	-12	

ناتج القسمة هو: $2x^3 + x^2 - 4x + 3$

باقي القسمة هو: 0

$(2)\ (2x^5 - 5x^4 + 9x^2 - 10x + 15) \div (1 - 2x)$

الحل:

×	$-x^4$	$2x^3$	x^2	$-4x$	3	
$-2x$	$2x^5$	$-4x^4$	$-2x^3$	$8x^2$	$-6x$	12
1	$-x^4$	$2x^3$	x^2	$-4x$	3	

ناتج القسمة هو: $-x^4 + 2x^3 + x^2 - 4x + 3$

باقي القسمة هو: 12

2. نظرية الباقي

مفهوم أساسي: نظرية الباقي.
باقي قسمة كثيرالحدود $P(x)$ على $(x-c)$ هو $P(c)$.
بوجه عام ،فإن باقي قسمة $P(x)$ على $(ax-b)$ هو $P\left(\frac{b}{a}\right)$،
حيث : $a \neq 0$

أتذكر :
إذا كان $f(x), h(x)$ كثيري حدود، وكان ناتج قسمة $f(x)$ على $h(x)$ هو $Q(x)$ والباقي $R(x)$ ، فإنَّ:
$f(x) = Q(x)h(x) + R(x)$ وتكون درجة $R(x)$ أقل من درجة $h(x)$.

مثال 1 : أستعمل نظرية الباقي لإيجاد باقي قسمة $P(x)$ على $h(x)$ في كل مما يأتي :

(1) $P(x) = x^3 + 7x^2 - 6x + 2$, $h(x) = x - 3$

الحل :
باقي قسمة $P(x)$ على $h(x) = x - 3$ هو $P(3)$:

$$P(x) = x^3 + 7x^2 - 6x + 2$$
$$P(3) = (3)^3 + 7(3)^2 - 6(3) + 2$$
$$= 27 + 63 - 18 + 2 = 74$$

اذن، باقي قسمة $P(x)$ على $h(x)$ يساوي **74**

---

(2) $P(x) = 2x^3 - 5x^2 - 4x + 9$
$h(x) = x + 2$

الحل :
لإيجاد باقي قسمة $P(x)$ على $h(x) = x + 2$ ، أكتب $h(x)$ في صورة: $h(x) = x - (-2)$ ليكون الباقي $P(-2)$:

$$P(x) = 2x^3 - 5x^2 - 4x + 9$$
$$P(-2) = 2(-2)^3 - 5(-2)^2 - 4(-2) + 9$$
$$= -16 - 20 + 8 + 9 = -19$$

اذن، باقي قسمة $P(x)$ على $h(x)$ يساوي -19

---

(3) $P(x) = 2x^3 - 4x^2 - 2x + 1$, $h(x) = 2x - 1$

لإيجاد باقي قسمة $P(x)$ على $h(x) = 2x - 1$ ، أكتب $h(x)$ في صورة: $h(x) = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)$ ليكون الباقي $P\left(\frac{1}{2}\right)$

$$P(x) = 2x^3 - 4x^2 - 2x + 1$$
$$P\left(\frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 4\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{2}\right) + 1$$
$$= \frac{1}{4} - 1 - 1 + 1 = -\frac{3}{4}$$

اذن، باقي قسمة $P(x)$ على $h(x)$ يساوي $-\frac{3}{4}$

مثال 2 : أستعمل نظرية الباقي لإيجاد باقي قسمة $P(x)$ على $h(x)$ في كل مما يأتي :

(a) $P(x) = 4x^4 - 7x^3 + 5x^2 + 2$, $h(x) = x - 1$

الحل : باقي قسمة $P(x)$ على $h(x) = x - 1$ هو $P(1)$:

$$P(x) = 4x^4 - 7x^3 + 5x^2 + 2$$
$$P(1) = 4(1)^4 - 7(1)^3 + 5(1)^2 + 2$$
$$= 4 - 7 + 5 + 2 = 4$$

اذن، باقي قسمة $P(x)$ على $h(x)$ يساوي **4**

(b) $P(x) = 3x^3 + 8x^2 - 3x - 6$, $h(x) = x + 3$

الحل : لإيجاد باقي قسمة $P(x)$ على $h(x) = x + 3$ ، أكتب $h(x)$ في صورة: $h(x) = x - (-3)$ ليكون الباقي $P(-3)$:

$$P(x) = 3x^3 + 8x^2 - 3x - 6$$
$$P(-3) = 3(-3)^3 + 8(-3)^2 - 3(-3) - 6 = -6$$

اذن، باقي قسمة $P(x)$ على $h(x)$ يساوي -6

(c) $P(x) = -2x^3 - 5x^2 + 10x + 9$, $h(x) = 2x + 8$

الحل : لإيجاد باقي قسمة $P(x)$ على $h(x) = 2x + 8$ ، أكتب $h(x)$ في صورة: $h(x) = 2(x - (-4))$ ليكون الباقي $P(-4)$

$$P(x) = -2x^3 - 5x^2 + 10x + 9$$
$$P(-4) = -2(-4)^3 - 5(-4)^2 + 10(-4) + 9 = 17$$

اذن، باقي قسمة $P(x)$ على $h(x)$ يساوي **17**

مثال 3 : أستعمل نظرية الباقي لإيجاد باقي قسمة $f(x)$ على $h(x)$ في كلٍّ ممّا يأتي:

(1) $f(x) = 8x^4 + 2x^3 - 53x^2 + 37x - 6$
$h(x) = x + 1$

باقي قسمة $f(x)$ على $h(x) = x + 1$ هو $f(-1)$:

$$f(x) = 8x^4 + 2x^3 - 53x^2 + 37x - 6$$
$$f(-1) = 8(-1)^4 + 2(-1)^3 - 53(-1)^2 + 37(-1) - 6$$
$$= 8 - 2 - 53 - 37 - 6 = -90$$

اذن، باقي قسمة $f(x)$ على $h(x)$ يساوي -90

---

(2) $f(x) = 4x^3 + 2x^2 - 6x - 8$
$h(x) = 3x + 4$

باقي قسمة $f(x)$ على $h(x) = 3x + 4$ هو $f\left(-\frac{4}{3}\right)$:

$$f(x) = 4x^3 + 2x^2 - 6x - 8$$
$$f\left(-\frac{4}{3}\right) = 4\left(-\frac{4}{3}\right)^3 + 2\left(-\frac{4}{3}\right)^2 - 6\left(-\frac{4}{3}\right) - 8$$
$$= -\frac{160}{27}$$

اذن، باقي قسمة $f(x)$ على $h(x)$ يساوي $-\frac{160}{27}$

3. نظرية العوامل

إذا كان باقي قسمة كثير الحدود $f(x)$ على $(x-k)$ يساوي 0، فإنَّ:

$$\frac{f(x)}{x-k}=q(x)$$

حيث $q(x)$ كثير الحدود الناتج من القسمة. ومنه، فإنَّ:

$$f(x)=(x-k)\,q(x)$$

أي إن $(x-k)$ عامل من عوامل $f(x)$، وهذا يُوضِّح نظرية العوامل التي تُعَدُّ حالة خاصة من نظرية الباقي.

مفهوم أساسي: نظرية العوامل.

يكون $(x-c)$ عاملاً من عوامل $P(x)$ اذا وفقط اذا كان: $P(c)=0$

بوجه عام، يكون $(ax-b)$ عاملاً من عوامل $P(x)$ اذا وفقط اذا كان: $P\left(\frac{b}{a}\right)=0$، حيث: $a\neq 0$

ملاحظة: إذا عُلِم أحد عوامل كثير الحدود، فإنَّه يُمكِن تحليله تحليلًا كاملًا، وذلك بكتابته في صورة حاصل ضرب مجموعة من كثيرات الحدود التي لا يُمكِن تحليلها

مثال 1 اذا كان: $P(x)=x^3+6x^2+5x-12$ فأجيب عن السؤالين الآتيين:

(1) أبين أن $(x+4)$ عامل من عوامل $P(x)$.

الحل: يكون $(x+4)$ عامل من عوامل $P(x)$ اذا كان: $P(-4)=0$، لذا أجد $P(-4)$.

$$P(x)=x^3+6x^2+5x-12$$
$$P(-4)=(-4)^3+6(-4)^2+5(-4)-12$$
$$=-64+96-20-12=0$$

اذن، $(x+4)$ عامل من عوامل $P(x)$

---

(2) أحلل $P(x)$ تحليلاً كاملاً.

الحل: بما أن $(x+4)$ عامل من عوامل $P(x)$، فإنه يُمكِن إيجاد العوامل الأُخرى بقسمة $P(x)$ على $(x+4)$، ثمَّ تحليل كثير الحدود الناتج (إنْ أمكن):

×	x^2	$2x$	-3	
x	x^3	$2x^2$	$-3x$	0
$+4$	$4x^2$	$8x$	-12	

$$P(x)=x^3+6x^2+5x-12$$
$$=(x+4)(x^2+2x-3)$$
$$=(x+4)(x+3)(x-1)$$

اذن، $P(x)=(x+4)(x+3)(x-1)$

مثال 2: اذا كان: $P(x)=x^3-2x^2-13x-10$ فأجيب عن السؤالين الآتيين:

(1) أبين أن $(x-5)$ عامل من عوامل $P(x)$.

الحل: يكون $(x-5)$ عامل من عوامل $P(x)$ اذا كان: $P(5)=0$، لذا أجد $P(5)$.

$$P(x)=x^3-2x^2-13x-10$$
$$P(5)=(5)^3-2(5)^2-13(5)-10=0$$

اذن، $(x-5)$ عامل من عوامل $P(x)$

---

(2) أحلل $P(x)$ تحليلاً كاملاً.

الحل: بما أن $(x-5)$ عامل من عوامل $P(x)$، فإنه يُمكِن إيجاد العوامل الأُخرى بقسمة $P(x)$ على $(x-5)$، ثمَّ تحليل كثير الحدود الناتج (إنْ أمكن):

×	x^2	$3x$	2	
x	x^3	$3x^2$	$2x$	0
-5	$-5x^2$	$-15x$	-10	

$$P(x)=x^3-2x^2-13x-10$$
$$=(x-5)(x^2+3x+2)$$
$$=(x-5)(x+2)(x+1)$$

اذن، $P(x)=(x-5)(x+2)(x+1)$

مثال 3: أُبيِّن أنَّ $h(x)$ عامل من عوامل $f(x)$ في كلٍّ ممّا يأتي:

(1) $f(x)=x^3-37x+84$, $h(x)=x+7$

الحل:

لأبين أن $h(x)=x+7$ عامل من عوامل $f(x)$ يكفي اثبات ان: $f(-7)=0$:

$$f(x)=x^3-37x+84$$
$$f(-7)=(-7)^3-37(-7)+84=0$$

اذن، $h(x)$ عامل من عوامل $f(x)$.

---

(2) $f(x)=2x^3-5x^2-x+6$
$h(x)=2x-3$

الحل:

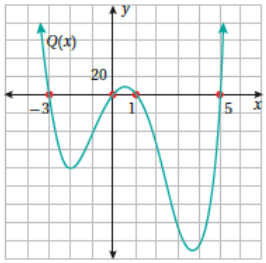
لأبين أن $h(x)=2x-3$ عامل من عوامل $f(x)$ يكفي اثبات ان: $f\left(\frac{3}{2}\right)=0$

$$f(x)=2x^3-5x^2-x+6$$
$$f\left(\frac{3}{2}\right)=2\left(\frac{3}{2}\right)^3-5\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)+6$$
$$=0$$

اذن، $h(x)$ عامل من عوامل $f(x)$.

4. الأصفار النسبية

أصفار كثير الحدود هي قيم x التي يكون عندها $P(x) = 0$. وعند تمثيل كثير الحدود بيانيًا ، فإنَّ أصفاره هي إحداثيات x لنقاط، تقاطع منحناه مع المحور x. فمثلًا، لكثير الحدود $Q(x)$ المعطى تمثيله البياني :



توجد 4 أصفار، هي: $5\ ,\ 1\ ,\ 0\ ,\ -3$ ، ويقطع عندها منحناه المحور x .

يُمكِن استعمال نظرية الأصفار النسبية لإيجاد بعض الأصفار المُحتمَلة لكثيرات الحدود؛ بُغْيَةَ اختبارها .

أتعلَّم : عدد أصفار كثير الحدود أقل من أو يساوي درجته.

مفهوم أساسي : نظرية الأصفار النسبية.

إذا كان: $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x_a_0$ كثيرحدود معاملاته أعداد صحيحة ، فإنَّ كل صفر نسبي لـ $P(x)$ يكون في صورة $\frac{p}{q}$ ، حيث p أحد عوامل الحدّ الثابت (a_0) ، و q أحد عوامل المعامل الرئيس (a_n).

نتيجة من نظرية الأصفار النسبية

اذا كان: $a_n = 1$ ، فإنَّ كل صفر نسبي لـ $P(x)$ يكون أحد عوامل الحدِّ الثابت (a_0).

عند إيجاد أحد الأصفار النسبية لكثير الحدود، فإنَّه يُمكِن إيجاد أصفاره الأُخرى باستعمال القسمة والتحليل.

مثال 1

(1) أجد جميع أصفار كثير الحدود:

$$P(x) = 2x^3 + x^2 - 13x + 6$$

الحل :

الخطوة 1: أجد الأصفار النسبية المُحتمَلة لكثير الحدود.

أجد عوامل الحدِّ الثابت (6) ، وهي: $\pm 4, \pm 3, \pm 2, \pm 1$

أجد عوامل الحدِّ الرئيس (2) ، وهي: $\pm 2, \pm 1$

إذن، الأصفار النسبية المُحتمَلة لكثير الحدود $P(x)$ هي:

$$\pm\frac{3}{2}\ ,\ \pm\frac{1}{2}\ ,\ \pm 6\ ,\ \pm 3\ ,\ \pm 2\ ,\ \pm 1$$

الخطوة 2 : أُنشِئ جدولًا لاختبار بعض الأصفار النسبية المُحتمَلة

$\frac{p}{q}$	$P\left(\frac{p}{q}\right)$	هل $\frac{p}{q}$ صفر لكثير الحدود ؟
-1	$P(-1) = 2(-1)^3 + (-1)^2 - 13(-1) + 6 = 18$	✗
1	$P(1) = 2(1)^3 + (1)^2 - 13(1) + 6 = -4$	✗
2	$P(2) = 2(2)^3 + (2)^2 - 13(2) + 6 = 0$	✓

بما أنَّ: $P(2) = 0$ ، فإنَّه يوجد لكثير الحدود صفر عندما $x = 2$ ، إذن، $(x-2)$ عامل من عوامل $P(x)$.

الخطوة 3: أُحلِّل كثير الحدود تحليلًا كاملًا.

بما أن $(x-2)$ عامل من عوامل $P(x)$ ، فإنه يُمكِن إيجاد العوامل الأُخرى بقسمة $P(x)$ على $(x-2)$ ، ثمَّ تحليل كثير الحدود الناتج (إنْ أمكن) .

×	$2x^2$	$5x$	-3	
x	$2x^3$	$5x^2$	$-3x$	0
-2	$-4x^2$	$-10x$	6	

ناتج القسمة يساوي $(2x^2 + 5x - 3)$. ومنه، يمكن تحليل كثير الحدود كما يأتي :

$$\begin{aligned} P(x) &= 2x^3 + x^2 - 13x + 6 \\ &= (x-2)(2x^2 + 5x - 3) \\ &= (x-2)(2x-1)(x+3) \end{aligned}$$

اذن، $P(x) = (x-2)(2x-1)(x+3)$

أتعلَّم : أجد أصفار كثير الحدود بمساواة كل عامل من عوامله بالصفر

$$x - 2 = 0 \quad \rightarrow \quad x = 2$$
$$2x - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{1}{2}$$
$$x + 3 = 0 \quad \rightarrow \quad x = -3$$

ومنه، فإنَّ أصفار $P(x)$ الناتجة من تحليله هي : $2\ ,\ \frac{1}{2}\ ,\ -3$

---

(2) أجد جميع أصفار كثير الحدود: $P(x) = x^3 - 3x + 2$

الحل :

الخطوة 1: أجد الأصفار النسبية المُحتمَلة لكثير الحدود.

بما أنَّ معامل الحدِّ الرئيس 1، فإنَّ الأصفار النسبية المُحتمَلة هي عوامل الحدِّ الثابت الذي يساوي (2).

إذن، الأصفار النسبية المُحتمَلة لكثير الحدود $P(x)$ هي:

$$\pm 2\ ,\ \pm 1$$

الخطوة 2 : أُنشِئ جدولًا لاختبار بعض الأصفار النسبية المُحتمَلة

p	$P(p)$	هل p صفر لكثير الحدود ؟
-1	$P(-1)=(-1)^3-3(-1)+2=4$	✗
1	$P(1)=(1)^3-3(1)+2=0$	✓

بما أنَّ: $P(1)=0$ ، فإنَّه يوجد لكثير الحدود صفر عندما $x=1$ ، إذن، $(x-1)$ عامل من عوامل $P(x)$.

الخطوة 3: أُحلِّل كثير الحدود تحليلًا كاملًا.

بما أن $(x-1)$ عامل من عوامل $P(x)$ ، فإنه يُمكِن إيجاد العوامل الأُخرى بقسمة $P(x)$ على $(x-1)$ ، ثمَّ تحليل كثير الحدود الناتج (إنْ أمكن) :

×	x^2	x	-2	
x	x^3	x^2	$-2x$	0
-1	$-x^2$	$-x$	2	

ناتج القسمة يساوي (x^2+x-2). ومنه، يمكن تحليل كثير الحدود كما يأتي :

$$P(x)=x^3-3x+2$$
$$=(x-1)(x^2+x-2)$$
$$=(x-1)(x+2)(x-1)$$

اذن، $P(x)=(x-1)(x+2)(x-1)$

أتعلَّم : إنَّ عدم وجود أصفار نسبية لكثير الحدود لا يعني أنْ ليس له أصفار، وإنَّما يعني أنَّ هذه الأصفار هي أعداد غير نسبية.

$x-1=0 \rightarrow x=1$

$x+2=0 \rightarrow x=-2$

ومنه، فإنَّ أصفار $P(x)$ الناتجة من تحليله هي : $1\ ,\ -2$

مثال 2 : أجد جميع أصفار كثير الحدود في ما يأتي:

$(a)\quad P(x)=5x^3-x^2-5x+1$

الحل :

الخطوة 1: أجد الأصفار النسبية المُحتمَلة لكثير الحدود.

أجد عوامل الحدِّ الثابت (1) ، وهي: ± 1

أجد عوامل الحدِّ الرئيس (5) ، وهي: $\pm 5\ ,\ \pm 1$

إذن، الأصفار النسبية المُحتمَلة لكثير الحدود $P(x)$ هي:

$$\pm 1\ ,\ \pm\frac{1}{5}$$

الخطوة 2 : أُنشِئ جدولًا لاختبار بعض الأصفار النسبية المُحتمَلة

$P(1)=5(1)^3-(1)^2-5(1)+1=0$

بما أنَّ: $P(1)=0$ ، فإنَّه يوجد لكثير الحدود صفر عندما $x=1$ ، إذن، $(x-1)$ عامل من عوامل $P(x)$.

الخطوة 3: أُحلِّل كثير الحدود تحليلًا كاملًا.

بما أن $(x-1)$ عامل من عوامل $P(x)$ ، فإنه يُمكِن إيجاد العوامل الأُخرى بقسمة $P(x)$ على $(x-1)$ ، ثمَّ تحليل كثير الحدود الناتج (إنْ أمكن) :

×	$5x^2$	$4x$	-1	
x	$5x^3$	$4x^2$	$-x$	0
-1	$-5x^2$	$-4x$	1	

ناتج القسمة يساوي $(5x^2+4x-1)$. ومنه، يمكن تحليل كثير الحدود كما يأتي :

$$P(x)=5x^3-x^2-5x+1$$
$$=(x-1)(5x^2+4x-1)$$
$$=(x-1)(5x-1)(x+1)$$

اذن، $P(x)=(x-1)(5x-1)(x+1)$

$x-1=0 \rightarrow x=1$

$5x-1=0 \rightarrow x=\frac{1}{5}$

$x+1=0 \rightarrow x=-1$

ومنه، فإنَّ أصفار $P(x)$ الناتجة من تحليله هي : $1\ ,\ \frac{1}{5}\ ,\ -1$

$(b)\quad Q(x)=x^4+6x^3+7x^2-6x-8$

الحل :

الخطوة 1: أجد الأصفار النسبية المُحتمَلة لكثير الحدود.

بما أنَّ معامل الحدِّ الرئيس 1، فإنَّ الأصفار النسبية المُحتمَلة هي عوامل الحدِّ الثابت الذي يساوي (8-) .

إذن، الأصفار النسبية المُحتمَلة لكثير الحدود $Q(x)$ هي:

$$\pm 1\ ,\ \pm 2\ ,\ \pm 4\ ,\ \pm 8$$

الخطوة 2 : أُنشِئ جدولًا لاختبار بعض الأصفار النسبية المُحتمَلة

$Q(1)=(1)^4+6(1)^3+7(1)^2-6(1)-8=0$

بما أنَّ: $Q(1)=0$ ، فإنَّه يوجد لكثير الحدود صفر عندما $x=1$ ، إذن، $(x-1)$ عامل من عوامل $Q(x)$.

الخطوة 3: أُحلِّل كثير الحدود تحليلًا كاملًا.

بما أن $(x-1)$ عامل من عوامل $Q(x)$ ، فإنه يُمكِن إيجاد العوامل الأُخرى بقسمة $Q(x)$ على $(x-1)$ ، ثمَّ تحليل كثير الحدود الناتج (إنْ أمكن) :

×	x^3	$7x^2$	$14x$	8	
x	x^4	$7x^3$	$14x^2$	$8x$	0
-1	$-x^3$	$-7x^2$	$-14x$	-8	

ناتج القسمة يساوي $(x^3+7x^2+14x+8)$. ومنه، يمكن تحليل كثير الحدود كما يأتي :

$$Q(x)=x^4+6x^3+7x^2-6x-8$$
$$=(x-1)(x^3+7x^2+14x+8)$$

وبتعويض $x=-1$ في العامل التكعيبي نجد ان الناتج 0

نقسم $x^3+7x^2+14x+8$ على $x+1$.

×	x^2	$6x$	8	
x	x^3	$6x^2$	$8x$	0
1	x^2	$6x$	8	

$$Q(x)=(x-1)(x^3+7x^2+14x+8)$$
$$=(x-1)(x+1)(x^2+6x+8)$$
$$=(x-1)(x+1)(x+2)(x+4)$$

اذن، $P(x)=(x-1)(x+1)(x+2)(x+4)$

ومنه، فإنَّ أصفار $P(x)$ الناتجة من تحليله هي :

$$-1\ ,\ 1\ ,\ -2\ ,\ -4$$

مثال 3 : أُحلِّل كل اقتران ممّا يأتي تحليلًا كاملًا :

(1) $f(x)=x^3+3x^2-13x-15$

الحل :

عوامل الحدِّ الثابت -15 ، وهي: $\pm1\ ,\pm3\ ,\pm5\ ,\pm15$

$f(-1)=-1+3+13-15=0$

إذن، $(x+1)$ عامل من عوامل $f(x)$

×	x^2	$2x$	-15	
x	x^3	$2x^2$	$-15x$	0
1	x^2	$2x$	-15	

$$f(x)=x^3+3x^2-13x-15$$
$$=(x+1)(x^2+2x-15)$$
$$=(x+1)(x-3)(x+5)$$

---

(2) $g(x)=x^4-7x^3+13x^2+3x-18$

الحل : عوامل الحدِّ الثابت -18 ، وهي:

$$\pm1\ ,\pm2\ ,\pm3\ ,\pm6\ ,\pm9\ ,\pm18$$

$g(2)=x^4-7x^3+13x^2+3x-18=0$

إذن، $(x-2)$ عامل من عوامل $g(x)$

×	x^3	$-5x^2$	$3x$	9	
x	x^4	$-5x^3$	$3x^2$	$9x$	0
-2	$-2x^3$	$10x^2$	$-6x$	-18	

$$g(x)=x^4-7x^3+13x^2+3x-18$$
$$=(x-2)(x^3-5x^2+3x+9)$$

الان نحلل : $h(x)=x^3-5x^2+3x+9$

عوامل الحدِّ الثابت 9 ، وهي: $\pm1\ ,\pm3\ ,\pm9$

$h(-1)=(-1)^3-5(-1)^2+3(-1)+9=0$

إذن، $(x+1)$ عامل من عوامل $h(x)$

×	x^2	$-6x$	9	
x	x^3	$-6x^2$	$9x$	0
1	x^2	$-6x$	9	

$$h(x)=(x-2)(x^3-5x^2+3x+9)$$
$$=(x-2)(x+1)(x^2-6x+9)$$
$$=(x-2)(x+1)(x-3)^2$$

---

(3) $h(x)=2x^3-13x^2+17x+12$

الحل :

عوامل الحدِّ الثابت 12 ، وهي: $\pm1\ ,\pm2\ ,\pm3\ ,\pm4\ ,\pm6\ ,\pm12$

$h(x)=2x^3-13x^2+17x+12$

$h(3)=2(3)^3-13(3)^2+17(3)+12=0$

إذن، $(x-3)$ عامل من عوامل $h(x)$

×	$2x^2$	$-7x$	-4	
x	$2x^3$	$-7x^2$	$-4x$	0
-3	$-6x^2$	$21x$	12	

$$h(x)=2x^3-13x^2+17x+12$$
$$=(x-3)(2x^2-7x-4)$$
$$=(x-3)(x-4)(2x+1)$$

---

(4) $q(x)=3x^3-18x^2+2x-12$

الحـــل :

$$q(x)=3x^3-18x^2+2x-12$$
$$=3x^2(x-6)+2(x-6)$$
$$=(x-6)(3x^2+2)$$

5. حلُّ معادلات كثيرات الحدود

معادلة كثيرالحدود هي معادلة يُمكِن كتابتها في صورة: $P(x) = 0$، حيث $P(x)$ كثيرحدود من أيِّ درجة، ويُسمّى كثير الحدود المرتبط بالمعادلة.

يُمكِن حلُّ بعض معادلات كثيرات الحدود باستعمال طرائق التحليل البسيطة التي تعلَّمْتُها سابقًا، مثل التحليل بإخراج عامل مشترك أو باستعمال التجميع، لكنَّ بعض معادلات كثيرات الحدود لا يُمكِن حلُّها باستعمال هذه الطرائق، عندئذٍ يُمكِن استعمال نظرية الأصفار النسبية لتحليل كثيرالحدود المرتبط بالمعادلة، ثمَّ حلّ المعادلة.

أتعلَّم: المعادلات الخطّية والتربيعية والتكعيبية التي تعلَّمْتُها سابقًا هي حالات خاصة من معادلة كثيرالحدود.

مثال 1: أحل المعادلة: $x^3 - x^2 - 14x + 24 = 0$

الحل:

كثيرالحدود المرتبط بالمعادلة هو:

$$P(x) = x^3 - x^2 - 14x + 24$$

الخطوة 1: أجد الأصفار النسبية المُحتمَلة لكثيرالحدود المرتبط بالمعادلة.

بما أنَّ معامل الحدِّ الرئيس هو (1)، فإنَّ الأصفار النسبية المُحتمَلة هي عوامل الحدِّ الثابت الذي يساوي (24).

إذن، الأصفار النسبية المُحتمَلة لكثيرالحدود $P(x)$ هي:

$$\pm 1 , \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \pm 12, \pm 24$$

الخطوة 2: أُنشِئ جدولًا لاختبار بعض الأصفار النسبية المُحتمَلة

p	$P(p)$	هل p صفر لكثيرالحدود ؟
1	$P(1) = (1)^3 - (1)^2 - 14(1) + 24 = 10$	✗
2	$P(2) = (2)^3 - (2)^2 - 14(2) + 24 = 0$	✓

بما أنَّ: $P(2) = 0$، فإنَّه يوجد لكثيرالحدود صفر عندما $x = 2$، إذن، $(x - 2)$ عامل من عوامل $P(x)$.

الخطوة 3: أُحلِّل كثيرالحدود باستعمال الأصفار النسبية، ثمَّ أحُلُّ المعادلة.

×	x^2	x	-12	
x	x^3	x^2	$-12x$	0
-2	$-2x^2$	$-2x$	24	

ناتج القسمة يساوي $(x^2 + x - 12)$. ومنه، يمكن تحليل كثير الحدود كما يأتي:

$$x^3 - x^2 - 14x + 24 = 0$$
$$(x - 2)(x^2 + x - 12) = 0$$
$$(x - 2)(x + 4)(x - 3) = 0$$
$$x - 2 = 0 \quad or \quad x + 4 = 0 \quad or \quad x - 3 = 0$$
$$x = 2 \qquad x = -4 \qquad x = 3$$

اذن، حلول المعادلة هي: $x = 2 \ , \ x = -4 \ , \ x = 3$

مثال 2: أحل كل معادلة مما يأتي:

(a) $x^3 - x^2 - 9x + 9 = 0$

الحل:

$$x^3 - x^2 - 9x + 9 = 0$$
$$x^2(x - 1) - 9(x - 1) = 0$$
$$(x - 1)(x^2 - 9) = 0$$
$$(x - 1)(x - 3)(x + 3) = 0$$
$$x = 1 \ , \ x = 3 \ , \ x = -3$$

اذن، حلول المعادلة هي: $x = 1 \ , \ x = 3 \ , \ x = -3$

(b) $x^3 + 3x^2 - 4 = 0$

الحل:

كثيرالحدود المرتبط بالمعادلة هو: $P(x) = x^3 + 3x^2 - 4$

الخطوة 1: أجد الأصفار النسبية المُحتمَلة لكثيرالحدود المرتبط بالمعادلة.

بما أنَّ معامل الحدِّ الرئيس هو (1)، فإنَّ الأصفار النسبية المُحتمَلة هي عوامل الحدِّ الثابت الذي يساوي (-4).

إذن، الأصفار النسبية المُحتمَلة لكثيرالحدود $P(x)$ هي:

$$\pm 1 , \pm 2 , \pm 4$$

الخطوة 2: أُنشِئ جدولًا لاختبار بعض الأصفار النسبية المُحتمَلة

p	$P(p)$	هل p صفر لكثيرالحدود ؟
1	$P(1) = (1)^3 + 3(1)^2 - 4 = 0$	✓
2	$P(2) = (2)^3 + 3(2)^2 - 4 = 16$	✗

بما أنَّ: $P(1) = 0$، فإنَّه يوجد لكثيرالحدود صفر عندما $x = 1$، إذن، $(x - 1)$ عامل من عوامل $P(x)$.

الخطوة 3: أُحلِّل كثير الحدود باستعمال الأصفار النسبية، ثمَّ أحُلُّ المعادلة.

بما أن $(x-1)$ أحد عوامل كثير الحدود ، فإنه يمكن إيجاد العوامل الأُخرى بقسمة $P(x)$ على $(x-1)$ ، ثمَّ تحليل كثير الحدود الناتج (إنْ أمكن) .

×	x^2	$4x$	4	
x	x^3	$4x^2$	$4x$	0
-1	$-x^2$	$-4x$	-4	

ناتج القسمة يساوي (x^2+4x+4). ومنه، يمكن تحليل كثير الحدود كما يأتي :

$$x^3+3x^2-4=0$$
$$(x-1)(x^2+4x+4)=0$$
$$(x-1)(x+2)^2=0$$
$$x-1=0 \quad or \quad x+2=0$$
$$x=1 \qquad\qquad x=-2$$

اذن، حلول المعادلة هي: $x=1\ ,\ x=-2$

مثال 3 : أحُلُّ كُلًّا من المعادلات الآتية:

(1) $x^3-4x^2-7x+10=0$

الحل : كثير الحدود المرتبط بالمعادلة هو:

$$P(x)=x^3-4x^2-7x+10$$

عوامل الحدِّ الثابت هي: $\pm1\ ,\pm2,\pm5,\pm10$

$$P(x)=x^3-4x^2-7x+10$$
$$P(1)=(1)^3-4(1)^2-7(1)+10=0$$

إذن، $(x-1)$ عامل من عوامل $P(x)$.

×	x^2	$-3x$	-10	
x	x^3	$-3x^2$	$-10x$	0
-1	$-x^2$	$3x$	10	

$$x^3-4x^2-7x+10=0$$
$$(x-1)(x^2-3x-10)=0$$
$$(x-1)(x-5)(x+2)=0$$
$$x=1\ ,\ x=5\ ,\ x=-2$$

---

(2) $5x^3-15x^2-47x-15=2x^3-10x^2$

الحل :

كثير الحدود المرتبط بالمعادلة هو:

$$P(x)=3x^3-5x^2-47x-15$$

عوامل الحدِّ الثابت هي: $\pm1\ ,\pm3,\pm5,\pm15$

$$P(x)=3x^3-5x^2-47x-15$$
$$P(-3)=3(-3)^3-5(-3)^2-47(-3)-15=0$$

إذن، $(x+3)$ عامل من عوامل $P(x)$.

×	$3x^2$	$-14x$	-5	
x	$3x^3$	$-14x^2$	$-5x$	0
3	$9x^2$	$-42x$	-15	

$$3x^3-5x^2-47x-15=0$$
$$(x+3)(3x^2-14x-5)=0$$
$$(x+3)(3x+1)(x-5)=0$$
$$x=-3\ ,\ x=-\frac{1}{3}\ ,\ x=5$$

---

(3) $3x^3+3x^2-14x-8=0$

الحل : كثير الحدود المرتبط بالمعادلة هو:

$$P(x)=3x^3+3x^2-14x-8$$

عوامل الحدِّ الثابت هي: $\pm1\ ,\pm2,\pm4,\pm8$

$$P(x)=3x^3+3x^2-14x-8$$
$$P(2)=3(2)^3+3(2)^2-14(2)-8=0$$

إذن، $(x-2)$ عامل من عوامل $P(x)$.

×	$3x^2$	$9x$	4	
x	$3x^3$	$9x^2$	$4x$	0
-2	$-6x^2$	$-18x$	-8	

$$3x^3+3x^2-14x-8=0$$
$$(x-2)(3x^2+9x+4)=0$$
$$x=2\ ,\ x=\frac{-9\pm\sqrt{81-48}}{2(3)}$$
$$x=2\ ,\ x=\frac{-9+\sqrt{33}}{6}\ ,\ x=\frac{-9-\sqrt{33}}{6}$$

---

(4) $6x^3-13x^2+x+2=0$

الحل : كثير الحدود المرتبط بالمعادلة هو:

$$P(x)=6x^3-13x^2+x+2$$

عوامل الحدِّ الثابت هي: $\pm1\ ,\pm2$

$$P(x)=6x^3-13x^2+x+2$$
$$P(2)=6(2)^3-13(2)^2+2+2=0$$

إذن، $(x-2)$ عامل من عوامل $P(x)$.

×	$6x^2$	$-x$	-1	
x	$6x^3$	$-x^2$	$-x$	0
-2	$-12x^2$	$2x$	2	

$$6x^3-13x^2+x+2=0$$
$$(x-2)(6x^2-x-1)=0$$
$$(x-2)(3x+1)(2x-1)=0$$
$$x=2\ ,\ x=-\frac{1}{3}\ ,\ x=\frac{1}{2}$$

6. أمثلة من الحياة

مثال 1 : هندسة العمارة: صنع مهندس معماري نموذجًا لبناية على هيئة هرم قاعدته مُربَّعة الشكل باستعمال طابعة ثلاثية الأبعاد. إذا كان ارتفاع النموذج يقل $2\ \text{dm}$ عن طول ضلع قاعدته، وكان حجمه $25\ \text{dm}^2$ فما أبعاد النموذج ؟

الحـــل :

الخطوة 1: أستعمل قانون حجم الهرم لكتابة معادلة .

بما أنَّ قاعدة الهرم مُربَّعة، فإنَّني أفترض أنَّ طول ضلعها $x\ \text{dm}$.

ومنه، فإنَّ مساحتها x^2 .

وبما أنَّ ارتفاع الهرم يقل $2\ \text{dm}$ عن طول ضلع القاعدة، فإنَّ ارتفاع الهرم هو $(x-2)\ \text{dm}$.

أتذكَّر : حجم الهرم (V) يساوي ثلث مساحة قاعدته B في ارتفاعه (h).

$$\underset{V}{\text{حجم الهرم}} = \frac{1}{3} \times \underset{B}{\text{مساحة القاعدة}} \times \underset{h}{\text{الارتفاع}}$$

$$25 = \frac{1}{3} \times x^2 \times (x-2)$$

بضرب طرفي المعادلة في 3 $\quad x^3 - 2x^2 = 75$

بطرح 75 من طرفي المعادلة $\quad x^3 - 2x^2 - 75 = 0$

الخطوة 2: أجد أحد الأصفار النسبية المُحتمَلة لكثير الحدود المرتبط بالمعادلة.

أجد الأصفار النسبية المُحتمَلة لكثير الحدود المرتبط بالمعادلة، وهو: $P(x) = x^3 - 2x^2 - 75$.

بما أنَّ معامل الحدِّ الرئيس هو 1 ، فإنَّ الأصفار النسبية المُحتمَلة هي عوامل الحدِّ الثابت الذي يساوي (-75).

إذن، الأصفار النسبية المُحتمَلة لكثير الحدود $P(x)$ هي:

$$\pm 1\ ,\ \pm 3\ ,\ \pm 5\ ,\ \pm 15\ ,\ \pm 25\ ,\ \pm 75$$

الخطوة 3: أُنشِئ جدولًا لاختبار بعض الأصفار النسبية المُحتمَلة.

بما أنَّ الطول لا يُمكِن أنْ يكون سالبًا، فإنَّني أختبر الأصفار النسبية الموجبة فقط.

p	$P(p)$	هل p صفر لكثير الحدود ؟
3	$P(3) = (3)^3 - 2(3)^2 - 75 = -66$	✗
5	$P(5) = (5)^3 - 2(5)^2 - 75 = 0$	✓

الخطوة 4: أُحلِّل المعادلة باستعمال الأصفار النسبية، ثمَّ أحُلُّها.

بما أن $(x-5)$ أحد عوامل كثير الحدود المرتبطة بالمعادلة ، فإنه يمكن إيجاد العوامل الأُخرى بقسمة $P(x)$ على $(x-5)$ ، ثمَّ تحليل كثير الحدود الناتج (إنْ أمكن) .

×	x^2	$3x$	15	
x	x^3	$3x^2$	$15x$	0
-5	$-5x^2$	$-15x$	-75	

ناتج القسمة يساوي $(x^2 + 3x + 15)$. ومنه، يمكن تحليل كثير الحدود كما يأتي : $x^3 - 2x^2 - 75 = 0$

$$(x-5)(x^2 + 3x + 15) = 0$$
$$x - 5 = 0 \quad or \quad x^2 + 3x + 15 = 0$$

بما أنَّ العامل التربيعي $(x^2 + 3x + 15)$ مُميِّزه سالب، فإنَّه لا توجد له أصفار. ومن ثَمَّ، فإنَّ $x = 5$ هو الحلُّ الحقيقي الوحيد للمعادلة.

إذن، طول قاعدة النموذج $5\ \text{dm}$ ، وارتفاعه $3\ \text{dm}$.

مثال 2 : يزيد ارتفاع أسطوانة $5\ \text{dm}$ على طول نصف قُطر قاعدتها. إذا كان حجم الأسطوانة $72\pi\ cm^3$ ، فما طول نصف قُطر قاعدتها وارتفاعها ؟

الحـــل : ليكن طول نصف قطر قاعدة هذه الاسطوانة هو r وارتفاعها h وحجمها V

$$h = r + 5$$
$$V = \pi r^2 h$$
$$= \pi r^2 (r+5)$$
$$\rightarrow \quad \pi r^2 (r+5) = 72\pi$$
$$\rightarrow \quad r^3 + 5r^2 - 72 = 0$$

الأصفار النسبية المحتملة هي:

$$\pm 1\ ,\ \pm 2\ ,\ \pm 3\ ,\ \pm 4\ ,\ \pm 6\ ,\ \pm 8\ ,\ \pm 9\ ,\ \pm 12\ ,\ \pm 18$$
$$\pm 24\ ,\ \pm 36\ ,\ \pm 72$$

بتعويض $r = 3$ نجد: $27 + 45 - 72 = 0$

إذن، $r - 3$ عامل من عوامل كثير الحدود $r^3 + 5r^2 - 72$

×	r^2	$8r$	24	
r	r^3	$8r^2$	$24r$	0
-3	$-3r^2$	$-24r$	-72	

$$r^3 + 5r^2 - 72 = 0$$
$$(r-3)(r^2 + 8r + 24) = 0$$

مميز $r^2 + 8r + 24$ سالب إذن:

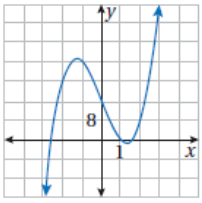
$$r = 3$$

نصف قطر قاعدة الأسطوانة $3\ cm$ ، وارتفاعها $8\ cm$

أسـئـلـة مـتـنـوعـة

تدريب 1 : أستعمل التمثيل البياني لمنحنى كل اقتران ممّا يأتي لإيجاد أحد أصفاره النسبية، ثمَّ إيجاد جميع أصفار الاقتران:

$f(x) = 4x^3 - 20x + 16$



أحد أصفار الاقتران هو $x = 1$

إذن، $(x - 1)$ عامل من عوامل $f(x)$.

×	$4x^2$	$4x$	-16	
x	$4x^3$	$4x^2$	$-16x$	0
-1	$-4x^2$	$-4x$	16	

$f(x) = (x - 1)(4x^2 + 4x - 16)$

صفراه الآخرين هما جذرا المعادلة

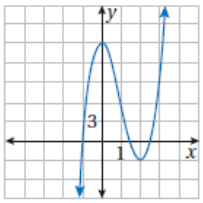
$4x^2 + 4x - 16 = 0$

$x^2 + x - 4 = 0$

$x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 + 16}}{2}$

$x \approx 1.56 \quad , \quad x \approx -2.56$

$f(x) = 4x^3 - 12x^2 - x + 15$



الحل : أحد أصفار الاقتران هو $x = -1$

إذن، $(x + 1)$ عامل من عوامل $f(x)$.

×	$4x^2$	$-16x$	15	
x	$4x^3$	$-16x^2$	$15x$	0
1	$4x^2$	$-16x$	15	

$f(x) = (x + 1)(4x^2 - 16x + 15)$

صفراه الآخرين هما جذرا المعادلة :

$4x^2 - 16x + 15 = 0$

$(2x - 3)(2x - 5) = 0$

$x = 1.5 \quad , \quad x = 2.5$

تدريب 2 : إذا كان: $x = 4 \quad , \quad x = 1$ هما حلَّين للمعادلة: $x^3 - 3x^2 + ax + b = 0$، فأجد الحلَّ الثالث لها.

الحـــل :

نفرض أن الحل الثالث هو $x = c$،

فتكون $(x - c) \, , \, (x - 4), (x - 1)$ عوامل للمقدار :

$x^3 - 3x^2 + ax + b$

$x^3 - 3x^2 + ax + b = (x - 4)(x - 1)(x - c)$

$x^3 - 3x^2 + ax + b = (x^2 - 5x + 4)(x - c)$

$x^3 - 3x^2 + ax + b = x^3 - cx^2 - 5x^2 - 5cx + 4x - 4x$

$x^3 - 3x^2 + ax + b = x^3 - (c + 5)x^2 + (4 + 5c)x - 4c$

بمقارنة معاملات الحدود المتشابهة في الطرفين نجد أن:

معامل x^2 : $-3 = -(c + 5)$

$c + 5 = 3 \quad \rightarrow c = -2$

إذن الحل الثالث هو $x = -2$.

تدريب 3 : إذا كان باقي قسمة: $f(x) = x^3 + ax^2 + x + 5$ على $x - 1$ يساوي مثلي باقي قسمته على $x + 1$، فما قيمة a ؟

الحـــل :

هذا يعني أن : $f(1) = 2f(-1)$

$1 + a + 1 + 5 = 2(-1 + a - 1 + 5)$

$a + 7 = 2a + 6$

$a = 1$

تدريب 4 : منحوتات جليدية: تُصنَع بعض المنحوتات الجليدية عن طريق مِلْءِ قالب بالماء ثمَّ تجميده. إذا كانت إحدى المنحوتات الجليدية على شكل هرم قاعدته مُربَّعة الشكل، وارتفاعها يزيد 1 m على طول قاعدتها، فأجد أبعاد المنحوتة إذا كان حجمها 4 m^3

الحل :

حجم الهرم = ثلث مساحة قاعدته مضروباً في ارتفاعه

افرض أن طول ضلع القاعدة هو x، فيكون الارتفاع $x + 1$.

$V = \dfrac{1}{3}x^2(x + 1)$

$4 = \dfrac{1}{3}x^2(x + 1)$

$12 = x^2(x + 1)$

$12 = x^3 + x^2$

$x^3 + x^2 - 12 = 0$

$f(x) = x^3 + x^2 - 12$

$f(2) = (2)^3 + (2)^2 - 12 = 0$

إذن، $(x - 2)$ عامل من عوامل $f(x)$.

×	x^2	$3x$	6	
x	x^3	$3x^2$	$6x$	0
-2	$-2x^2$	$-6x$	-12	

$f(x) = x^3 + x^2 - 12$
$= (x-2)(x^2+3x+6)$
$(x-2)(x^2+3x+6) = 0$
$x = 2 \quad , \quad x^2+3x+6 = 0$

المعادلة $x^2+3x+6=0$ ليس لها حل لأن مميزها سالب (-15)، فالحل الوحيد للمعادلة $x^3+x^2-12=0$ هو $x=2$

اذن، طول ضلع قاعدته المنحوتة هو 2 m، وارتفاعها 3 m.

تدريب 5 : إذا كان: $f(x) = ax^3 + bx^2 - 9x - 9$ ،
حيث: a , b ثابتان، و $a \neq 0$ ، فأجيب عن الأسئلة الآتية:

(1) اذا كان $(x-3)$ عاملاً من عوامل الاقتران $f(x)$ ،فأبين أن:
$3a + b = 4$

الحـــل: $(x-3)$ عاملاً من عوامل الاقتران:
$f(x) = ax^3 + bx^2 - 9x - 9$ ،إذن: $f(3) = 0$
$27a + 9b - 27 - 9 = 0$
$27a + 9b = 36$
بقسمة الطرفين على 9 ينتج أن: $3a + b = 4$

---

(2) اذا كان باقي قسمة $f(x)$ على $x-2$ يساوي -15 ،فأبين أن: $2a + b = 3$

الحـــل: باقي قسمة $f(x)$ على $(x-2)$ يساوي -15 ،يعني أن:
$f(2) = -15$
$8a + 4b - 18 - 9 = -15$
$8a + 4b = 12$
بقسمة الطرفين على 4 ينتج أن: $2a + b = 3$

---

(3) أجد قيمة كل من a , b .
بطرح المعادلة الناتجة في السؤال 21 من المعادلة الناتجة في السؤال 20
نجد أن $a = 1$ ،وبتعويض قيمة a في إحدى المعادلتين نجد أن
$b = 1$

تدريب 6 : أحل المسألة الواردة في بداية الدرس .
صندوق شاحنة على شكل متوازي مستطيلات، أبعاده بالأمتار:
2 , x , $x^2 + 6x - 19$. ما قيمة x التي تجعل حجم الصندوق $48\ m^3$ ؟

الحل: حجم الصندوق يساوي $2(x)(x^2+6x-19)$ وهذا يساوي $48\ m^3$
$2x(x^2+6x-19) = 48$
بقسمة الطرفين على 2 ، والتوزيع ينتج أن:
$x^3 + 6x^2 - 19x = 24$
$x^3 + 6x^2 - 19x - 24 = 0$
$f(x) = x^3 + 6x^2 - 19x - 24$
$f(-3) = (-3)^3 + 6(-3)^2 - 19(-3) - 24 = 0$
إذن، $(x-3)$ عامل من عوامل $f(x)$.

×	x^2	$9x$	8	
x	x^3	$9x^2$	$8x$	0
-3	$-3x^2$	$-27x$	-24	

$f(x) = x^3 + 6x^2 - 19x - 24$
$= (x-3)(x^2+9x+8)$
$(x-3)(x^2+9x+8) = 0$
$(x-3)(x+1)(x+8) = 0$
$x = 3 \quad , \quad x = -1 \quad , \quad x = -8$

الحلان السالبان مرفوضان لأن x أحد أبعاد الصندوق ولا يمكن أن يكون سالباً . إذن، قيمة x التي تجعل حجم الصندوق $48\ m^3$ هو 3 m

مهارات التفكير العليا

تدريب 7 : مسألة مفتوحة: أكتب اقترانًا من الدرجة الثالثة يكون $(x-3)$ أحد عوامله، ويكون باقي قسمته على $(x+1)$ يساوي -8

الحـــل:

بما أن $(x-3)$ عامل لاقتران من الدرجة الثالثة فإن العامل الثاني يكون تربيعيًا ،ليكن هذا العامل الثاني: ax^2+bx+c

$$f(x)=(x-3)(ax^2+bx+c)$$

باقي قسمة $f(x)$ على $(x+1)$ هو -8 ، فإن:

$$f(-1)=-8$$
$$(-1-3)(a-b+c)=-8$$
$$a-b+c=2$$

لذلك أختار أي قيم تحقق هذه المعادلة مثل:

$$a=1\ ,\ b=1\ ,\ c=2$$

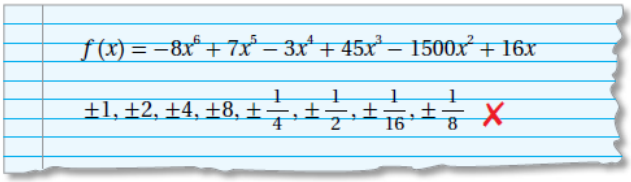
فيكون الاقتران المطلوب هو:

$$f(x)=(x-3)(x^2+x+2)$$
$$f(x)=x^3-2x^2-x-6$$

تدريب 8 :أكتشف الخطأ: أرادت سهام إيجاد الأصفار النسبية المُحتمَلة للاقتران:

$$f(x)=-8x^6+7x^5-3x^4+45x^3-1500x^2+16x$$

فكان حلُّها كالآتي :



أبيِّن الخطأ الذي وقعت فيه سهام، ثمَّ أُصحِّحه.

الحـــل:

قسمت سهام عوامل الحد الرئيس على عوامل الحد الثابت بعد إخراج العامل المشترك في حدود الاقتران وهو x.

الحل الصحيح هو:

$$f(x)=x(-8x^5+7x^4-3x^3+45x^2-1500x+16)$$

عوامل الحد الثابت (16) هي: $\pm16\ ,\pm8\ ,\pm4\ ,\pm2\ ,\pm1$

عوامل المعامل الرئيس (-8) هي: $\pm8\ ,\pm4\ ,\pm2\ ,\pm1$

الأصفار النسبية المحتملة هي:

$$\pm\frac{1}{8}\ ,\pm\frac{1}{4}\ ,\pm\frac{1}{2}\ ,\pm16\ ,\pm8\ ,\pm4\ ,\pm2\ ,\pm1$$

تدريب 9 :تحدٍّ: إذا كان باقي قسمة كثير الحدود $f(x)$ على $(x-3)$ يساوي 4 ، وباقي قسمته على $(x+2)$ يساوي 9 ، فأجد باقي قسمة $f(x)$ على $(x-3)(x+2)$.

الحـــل:

بما أن المقسوم عليه كثير حدود من الدرجة الثانية، فإن الباقي سيكون من الدرجة الأولى على الأكثر.

لنفرض هذا الباقي هو: $ax+b$، وناتج القسمة هو $Q(x)$.

$$f(x)=(x-3)(x+2)Q(x)+ax+b$$
$$f(3)=4\ \rightarrow\ (3-3)(3+2)Q(3)+3a+b=4$$
$$\rightarrow\ 3a+b=4\ \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (1)$$
$$f(-2)=9$$
$$\rightarrow(-2-3)(-2+2)Q(-2)-2a+b=9$$
$$\rightarrow -2a+b=9\ \ \ldots\ldots\ldots\ (2)$$

بطرح المعادلة (2) من المعادلة (1) ينتج:

$$5a=-5\ \rightarrow\ a=-1$$

وبالتعويض في إحدى المعادلتين نجد: $b=7$

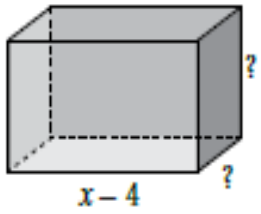
إذن، باقي قسمة $f(x)$ على $(x-3)(x+2)$ يساوي $-x+7$

أستعمل طريقة الجدول لإيجاد ناتج القسمة والباقي في كلٍّ ممّا يأتي:

1. $(6x^3-7x^2+6x+45) \div (2x+3)$

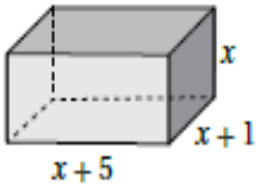
2. $(3x^4+x^3-9x^2-8x+9) \div (x-2)$

3. يُمثِّل الاقتران: $V(x)=x^3+3x^2-36x+32$ حجم متوازي المستطيلات المجاور.
أجد الأبعاد الأُخرى لمتوازي المستطيلات بدلالة x.



4. إذا كان باقي قسمة: $f(x)=2x^3-x^2+ax+6$ على $h(x)=x+2$ يساوي (-4)، فما قيمة a؟

5. أجد أبعاد متوازي المستطيلات في الشكل المجاور إذا كان حجمه $180\ \text{cm}^3$



6. إذا كان باقي قسمة: $f(x)=ax^3+bx^2+bx+3$ على $h(x)=x-1$ يساوي (4)، وكان $(x+1)$ عاملًا من عوامل $f(x)$، فما قيمة كلٍّ من a، وb؟

أُحلِّل كل اقتران ممّا يأتي تحليلًا تامًّا:

7. $3x^3+14x^2-7x-10$

8. $2x^4+x^3-5x^2+2x$

أحُلُّ كل معادلة ممّا يأتي:

9. $3x^3-4x^2-6x+4=0$

10. $2x^3+5x^2-16x-36=0$

11. يزيد ارتفاع مخروط $5\ \text{cm}$ على طول نصف قُطْر قاعدته. إذا كان حجم هذا المخروط $24\pi\ \text{cm}^3$، فما أبعاده؟
(حجم المخروط هو $V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$، حيث r نصف قُطْر القاعدة، وh الارتفاع).

الدرس الثاني : الكسور الجزئية
Partial Fractions

تعلمتُ سابقاً أن المقدار الجبري النسبي هو مقدار جبري يمكن كتابته في صورة كسر بسطه ومقامه كثيرا حدود، وتعلَّمْتُ أيضًا أنه عند جمع مقدارين نسبيين مختلفي المقام أو طرحهما، فإنه يجب أولا توحيد مقاميهما باستعمال المضاعف المشترك الأصغر (م.م.أ) للمقامين كما يأتي:

$$\frac{3}{x-4}-\frac{2}{x+2}=\frac{3(x+2)}{(x-4)(x+2)}-\frac{2(x-4)}{(x+2)(x-4)}=\frac{3x+6-2x+8}{(x-4)(x+2)}=\frac{x+14}{(x-4)(x+2)}$$

تجزئة المقادير النسبية هي عملية عكسية للعملية السابقة ،ينتج منها كتابة المقدار النسبي في صورة مجموع مقادير جبرية نسبية، يُبسط كل منها في صورة

$$\frac{P(x)}{Q(x)}$$

حيث P و Q كثيرا حدود لا يوجد بينهما عوامل مشتركة، ودرجة P أقل من درجة Q ، ويُسمى كل من هذه المقادير النسبية **كسرًا جزئيا**.

إرشاد : يشير مصطلح المقدار النسبي إلى المقدار الجبري النسبي أينما ورد في هذه الوحدة .

$$\frac{x+14}{(x-4)(x+2)}=\frac{3}{x-4}+\frac{-2}{x+2}$$

(كسر جزئي) (كسر جزئي) (تجزئة المقدار النسبي)

تعتمد عملية تجزئة المقادير الجبرية النسبية على عوامل المقام.

سأتعلم في هذا الدرس ثلاث حالات مختلفة من التجزئة تبعا لنوع عوامل المقام، وهي:

- عوامل المقام كثيرات حدود خطية مختلفة.
- عوامل المقام كثيرات حدود خطية، أحدها مكرر.
- عوامل المقام كثيرات حدود، أحدها تربيعي غير مكرر، ولا يمكن تحليله (مُميزه سالب).

1. تجزئة مقدار نسبي عوامل مقامه كثيرات حدود خطية مختلفة

إذا كانت جميع عوامل كثير الحدود في مقام المقدار النسبي خطية، فإنَّه ينتج من كل منها كسر جزئي بسطه ثابت ومقامه العامل الخطي في الصورة الآتية :

ثابت ← $\frac{A}{ax+b}$ ← عامل خطّي

مفهوم أساسي: تجزئة مقدار نسبي عوامل مقامه كثيرات حدود خطية مختلفة.

إذا كان $Q(x)$ كثير حدود يمكن تحليله تحليلا كاملا من دون تكرار أي عامل في الصورة الآتية:

$$Q(x)=(a_1x+b_1)(a_2x+b_2)(a_2x+b_2)\dots(a_nx+b_n)$$

فإنَّه يُمكن تجزئة المقدار الجبري النسبي $\frac{P(x)}{Q(x)}$، حيث درجة P أقل من درجة Q، في الصورة الآتية:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{a_1x+b_1}+\frac{A_2}{a_2x+b_2}+\frac{A_3}{a_3x+b_3}+\dots+\frac{A_n}{a_nx+b_n}$$

مثال 1 : أجزئ $\frac{2x-13}{x^2-x-2}$ الى كسور جزئية.

الحـــل :

الخطوة 1 : أحلل المقام تحليلا كاملا .

$$\frac{2x-13}{x^2-x-2}=\frac{2x-13}{(x-2)(x+1)}$$

الخطوة 2: أبدأ بإعداد تجزئة للمقدار النسبي باستعمال رموز تُمثل قيما مجهولة .

أكتب كسرين جزئيين مقاماهما العاملان الخطيان في مقام الكسر النسبي الأصلي، ثم أكتب رمزا في بسط كل كسر:

$$\frac{2x-13}{(x-2)(x+1)}=\frac{A}{(x-2)}+\frac{B}{(x+1)}$$

الخطوة 3 : أضرب طرفي المعادلة في المضاعف المشترك الأصغر لمقامي الكسرين الجزئيين.

بضرب طرفي المعادلة في (م.م.أ) لمقامي الكسرين الجزئيين، وهو $(x-2)(x+1)$، فإن:

$$(x-2)(x+1)\frac{2x-13}{(x-2)(x+1)}=(x-2)(x+1)\left(\frac{A}{(x-2)}+\frac{B}{(x+1)}\right)$$

باستعمال خاصية التوزيع في الطرف الأيمن من المعادلة والاختصار، تنتج المعادلة الآتية:

$$2x-13=A(x+1)+B(x-2)$$

الخطوة 4 : أجد قيمة كل من الثابت A والثابت B باستعمال التعويض.

- بتعويض $x = 2$ في المعادلة الناتجة:

$$2(2) - 13 = A(2+1) + B(2-2)$$
$$-9 = 3A$$
$$A = -3$$

- بتعويض $x = -1$ في المعادلة الناتجة:

$$2(-1) - 13 = A(-1+1) + B(-1-2)$$
$$-15 = -3B$$
$$B = 5$$

إذن، يُمكِن تجزئة المقدار النسبي في الصورة الآتية:

$$\frac{2x-13}{(x-2)(x+1)} = \frac{-3}{(x-2)} + \frac{5}{(x+1)}$$

مثال 2 : أجزئ كل مقدار نسبي مما يأتي الى كسور جزئية.

$a)$ $\dfrac{x}{x^2-5x+6}$

$$\frac{x}{x^2-5x+6} = \frac{x}{(x-2)(x-3)} = \frac{A}{(x-2)} + \frac{B}{(x-3)}$$
$$x = A(x-3) + B(x-2)$$
$$x = 3 \rightarrow 3 = A(3-2) + B(3-3) \rightarrow A = 3$$
$$x = 2 \rightarrow 2 = A(2-2) + B(2-3) \rightarrow B = -2$$

إذن، يُمكِن تجزئة المقدار النسبي في الصورة الآتية:

$$\frac{x}{x^2-5x+6} = \frac{-2}{(x-2)} + \frac{2}{(x-3)}$$

$b)$ $\dfrac{x^2+x-6}{x^3+5x^2+2x-8}$

الحـــل:

$$\frac{x^2+x-6}{x^3+5x^2+2x-8} = \frac{x^2+x-6}{(x-1)(x+4)(x+2)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x+4)} + \frac{C}{(x+2)}$$
$$x^2+x-6 = A(x+2)(x+4) + B(x-1)(x+2) + C(x-1)(x+4)$$
$$x = 1 \rightarrow -4 = 15A \rightarrow A = -\frac{4}{15}$$
$$x = -4 \rightarrow 6 = 10B \rightarrow B = \frac{3}{5}$$
$$x = -2 \rightarrow -4 = -6A \rightarrow C = \frac{2}{3}$$

إذن، يُمكِن تجزئة المقدار النسبي في الصورة الآتية:

$$\frac{x^2+x-6}{x^3+5x^2+2x-8} = \frac{-4}{15(x-1)} + \frac{3}{5(x+4)} + \frac{2}{3(x+2)}$$

مثال 3 : أُجزِّئ كُلًّا من المقادير النسبية الآتية إلى كسور جزئية :

(1) $\dfrac{2x-5}{(x+2)(x+3)} = \dfrac{A}{x+2} + \dfrac{B}{x+3}$

$$2x-5 = A(x+3) + B(x+2)$$
$$x = -2 \rightarrow -9 = A \rightarrow A = -9$$
$$x = -1 \rightarrow -11 = -B \rightarrow B = 11$$

إذن، يُمكِن تجزئة المقدار النسبي في الصورة الآتية:

$$\frac{2x-5}{(x+2)(x+3)} = \frac{-9}{x+2} + \frac{11}{x+3}$$

---

(2) $\dfrac{2x+22}{x^2+2x} = \dfrac{2x+22}{x(x+2)} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x+2}$

$$2x+22 = A(x+2) + Bx$$
$$x = 0 \rightarrow 22 = 2A \rightarrow A = 11$$
$$x = -2 \rightarrow 18 = -2B \rightarrow B = -9$$

إذن، يُمكِن تجزئة المقدار النسبي في الصورة الآتية:

$$\frac{2x+22}{x^2+2x} = \frac{11}{x} + \frac{-9}{x+2}$$

---

(3) $\dfrac{4x-30}{x^2-8x+15}$

$$= \frac{4x-30}{(x-5)(x-3)} = \frac{A}{x-5} + \frac{B}{x-3}$$
$$4x-30 = A(x-3) + B(x-5)$$
$$x = 5 \rightarrow -10 = 2A \rightarrow A = -5$$
$$x = 3 \rightarrow -18 = -2B \rightarrow B = 9$$

إذن، يُمكِن تجزئة المقدار النسبي في الصورة الآتية:

$$\frac{4x-30}{x^2-8x+15} = \frac{-5}{x-5} + \frac{9}{x-3}$$

---

(4) $\dfrac{2-3x-4x^2}{x(x-1)(1-2x)} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x-1} + \dfrac{C}{1-2x}$

$$2-3x-4x^2 = A(x-1)(1-2x) + Bx(1-2x) + Cx(x-1)$$
$$x = 0 \rightarrow 2 = -A \rightarrow A = -2$$
$$x = 1 \rightarrow -5 = -B \rightarrow B = 5$$
$$x = \frac{1}{2} \rightarrow 2 - \frac{3}{2} - 1 = -\frac{1}{4}C \rightarrow C = 2$$

إذن، يُمكِن تجزئة المقدار النسبي في الصورة الآتية:

$$\frac{2-3x-4x^2}{x(x-1)(1-2x)} = \frac{-2}{x} + \frac{5}{x-1} + \frac{2}{1-2x}$$

(5) $\dfrac{x}{8x^2-10x+3}$

$= \dfrac{x}{(4x-3)(2x-1)} = \dfrac{A}{4x-3} + \dfrac{B}{2x-1}$

$x = A(2x-1) + B(4x-3)$

$x = \dfrac{3}{4} \quad \rightarrow \dfrac{3}{4} = \dfrac{1}{2}A \quad \rightarrow \quad A = \dfrac{3}{2}$

$x = \dfrac{1}{2} \quad \rightarrow \dfrac{1}{2} = -B \quad \rightarrow \quad B = -\dfrac{1}{2}$

إذن، يُمكِن تجزئة المقدار النسبي في الصورة الآتية:

$$\frac{x}{8x^2-10x+3} = \frac{3}{2(4x-3)} + \frac{-1}{2(2x-1)}$$

---

(6) $\dfrac{1}{2x^3-3x^2-32x-15}$

$= \dfrac{1}{(x+3)(x-5)(2x+1)}$

$= \dfrac{A}{x+3} + \dfrac{B}{x-5} + \dfrac{C}{2x+1}$

$1 = A(x-5)(2x+1) + B(x+3)(2x+1) + C(x+3)(x-5)$

$x = -3 \quad \rightarrow 1 = 40A \quad \rightarrow \quad A = \dfrac{1}{40}$

$x = 5 \quad \rightarrow 1 = 88B \quad \rightarrow \quad B = \dfrac{1}{88}$

$x = -\dfrac{1}{2} \quad \rightarrow 1 = -\dfrac{55}{4}C \quad \rightarrow \quad C = -\dfrac{4}{55}$

إذن، يُمكِن تجزئة المقدار النسبي في الصورة الآتية:

$$= \frac{1}{40(x+3)} + \frac{1}{88(x-5)} + \frac{4}{5(2x+1)}$$

---

(7) $\dfrac{9x^2-9x+6}{2x^3-x^2-8x+4}$

$= \dfrac{9x^2-9x+6}{(x-2)(x+2)(2x-1)}$

$= \dfrac{A}{x-2} + \dfrac{B}{x+2} + \dfrac{C}{2x-1}$

$9x^2-9x+6 = A(x+2)(2x-1) + B(x-2)(2x-1) + C(x-2)(x+2)$

$x = 2 \quad \rightarrow 24 = 12A \quad \rightarrow \quad A = 2$

$x = -2 \quad \rightarrow 60 = 20B \quad \rightarrow \quad B = 3$

$x = \dfrac{1}{2} \quad \rightarrow \dfrac{15}{4} = -\dfrac{15}{4}C \quad \rightarrow \quad C = -1$

إذن، يُمكِن تجزئة المقدار النسبي في الصورة الآتية:

$$\frac{9x^2-9x+6}{2x^3-x^2-8x+4} = \frac{2}{x-2} + \frac{3}{x+2} + \frac{-1}{2x-1}$$

(8) $\dfrac{5+3x-x^2}{-x^3+3x^2+4x-12}$

الحـــل:

$\dfrac{5+3x-x^2}{-x^3+3x^2+4x-12} = \dfrac{x^2-3x-5}{x^3-3x^2-4x+12}$

$= \dfrac{x^2-3x-5}{(x-2)(x+2)(x-3)}$

$= \dfrac{A}{x-2} + \dfrac{B}{x+2} + \dfrac{C}{x-3}$

$x^2-3x-5 = A(x+2)(x-3) + B(x-2)(x-3) + C(x-2)(x+2)$

$x = 2 \quad \rightarrow -7 = -4A \quad \rightarrow \quad A = \dfrac{7}{4}$

$x = -2 \quad \rightarrow 5 = 20B \quad \rightarrow \quad B = \dfrac{1}{4}$

$x = 3 \quad \rightarrow -5 = 5C \quad \rightarrow \quad C = -1$

إذن، يُمكِن تجزئة المقدار النسبي في الصورة الآتية:

$$= \frac{7}{4(x-2)} + \frac{1}{4(x+2)} + \frac{-1}{2x-1}$$

---

(9) $\dfrac{(x-3)^2}{x^3-16x}$

الحـــل:

$\dfrac{(x-3)^2}{x^3-16x} = \dfrac{(x-3)^2}{x(x+4)(x-4)}$

$= \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x+4} + \dfrac{C}{x-4}$

$(x-3)^2 = A(x+4)(x-4) + Bx(x-4) + Cx(x+4)$

$x = 0 \quad \rightarrow 9 = -16A \quad \rightarrow \quad A = -\dfrac{9}{16}$

$x = -4 \quad \rightarrow 49 = 32B \quad \rightarrow \quad B = \dfrac{49}{32}$

$x = 4 \quad \rightarrow 1 = 32C \quad \rightarrow \quad C = \dfrac{1}{32}$

إذن، يُمكِن تجزئة المقدار النسبي في الصورة الآتية:

$$\frac{(x-3)^2}{x^3-16x} = \frac{-9}{16x} + \frac{49}{32(x+4)} + \frac{1}{32(x-4)}$$

2. تجزئة مقدار نسبي عوامل مقامه كثيرات حدود خطّية، أحدها مُكرَّر

في بعض الحالات، ينتج من التحليل الكامل لمقام المقدار النسبي تكرار أحد العوامل الخطّية.

مفهوم أساسي: تجزئة مقدار نسبي عوامل مقامه كثيرات حدود خطّية، أحدها مُكرَّر.

إذا كان $\frac{P(x)}{Q(x)}$ مقدارًا نسبيًّا، وكان التحليل الكامل لـ $Q(x)$ يحتوي على عامل خطّي مكرر n من المرات، ودرجة P أقل من درجة Q، فإنَّ تجزئة المقدار الجبري النسبي $\frac{P(x)}{Q(x)}$ تتضمن الحدود الآتية:

$$\frac{A_1}{ax+b}+\frac{A_2}{(ax+b)^2}+\frac{A_3}{(ax+b)^3}+\cdots+\frac{A_n}{(ax+b)^n}$$

مثال 1: أجزئ $\frac{-x^2+2x+4}{x^3-4x^2+4x}$ الى كسور جزئية.

الحـــل:

الخطوة 1: أحلل المقام تحليلا كاملا .

$$\frac{-x^2+2x+4}{x^3-4x^2+4x}=\frac{-x^2+2x+4}{x(x^2-4x+4)}$$
$$=\frac{-x^2+2x+4}{x(x-2)^2}$$

الخطوة 2: أبدأ بإعداد تجزئة للمقدار النسبي باستعمال رموز تُمثل قيما مجهولة.

أكتب ثلاثة كسور جزئية مقاماتها عوامل مقام الكسر النسبي الأصلي، ثم أكتب رمزًا في بسط كل كسر. أُلاحظ أن تحليل المقام هو $x(x-2)^2$، وأن العامل $(x-2)$ مُكرَّر مرتين في هذا التحليل؛ لذا يجب أن تحتوي التجزئة على ثلاثة كسور مقاماتها هي:

$$x\ ,\ (x-2)\ ,\ (x-2)^2$$
$$\frac{-x^2+2x+4}{x(x-2)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{(x-2)}+\frac{C}{(x-2)^2}$$

الخطوة 3: أضرب طرفي المعادلة في المضاعف المشترك الأصغر لمقامات الكسور الجزئية.

بضرب طرفي المعادلة في (م.م.أ) لمقامات الكسور الجزئية، وهو $x(x-2)^2$، فإنَّ:

$$x(x-2)^2\frac{-x^2+2x+4}{x(x-2)^2}$$
$$=x(x-2)^2\left(\frac{A}{x}+\frac{B}{(x-2)}+\frac{C}{(x-2)^2}\right)$$

باستعمال خاصية التوزيع في الطرف الأيمن من المعادلة والاختصار، تنتج المعادلة الآتية:

$$-x^2+2x+4=A(x-2)^2+Bx(x-2)+Cx$$

الخطوة 4: أجد قيمة كل من الثابت A و B و C باستعمال التعويض.

- بتعويض $x=0$ في المعادلة الناتجة:

$$-(0)^2+2(0)+4=A(0-2)^2+B(0)(0-2)+C(0)$$
$$4=4A\ \rightarrow\ A=1$$

- بتعويض $x=2$ في المعادلة الناتجة:

$$-(2)^2+2(2)+4=A(2-2)^2+B(2)(2-2)+C(2)$$
$$4=2C\ \rightarrow\ C=2$$

- بتعويض أي قيمة أخرى للمتغير x (مثل $x=2$) في المعادلة الناتجة، إضافة الى تعويض قيمتي A و C الناتجتين:

$$-(1)^2+2(1)+4=(1)(1-2)^2+B(1)(1-2)+(2)(1)$$
$$5=3-B\ \rightarrow\ 2=-B\ \rightarrow\ B=-2$$

إذن، يُمكِن تجزئة المقدار النسبي في الصورة الآتية:

$$\frac{-x^2+2x+4}{x(x-2)^2}=\frac{1}{x}+\frac{-2}{(x-2)}+\frac{2}{(x-2)^2}$$

مثال 2: أجزئ $\frac{x^2+8x+4}{x^3-2x^2}$ الى كسور جزئية.

الحـــل:

$$\frac{x^2+8x+4}{x^3-2x^2}=\frac{x^2+8x+4}{x^2(x-2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{(x-2)}$$
$$x^2+8x+4=Ax(x-2)+B(x-2)+Cx^2$$

$$x=2\ \rightarrow\ 24=4C\ \rightarrow\ C=6$$
$$x=0\ \rightarrow\ 4=-2B\ \rightarrow\ B=-2$$
$$x=1\ \rightarrow\ 13=-A+2+6\ \rightarrow\ A=-5$$

إذن، يُمكِن تجزئة المقدار النسبي في الصورة الآتية:

$$\frac{x^2+8x+4}{x^3-2x^2}=\frac{-5}{x}+\frac{-2}{x^2}+\frac{6}{(x-2)}$$

مثال 3: أجزئ كلاً مما يأتي الى كسور جزئية.

(1) $\frac{7x-3}{x^2-8x+16}$

الحـــل:

$$\frac{7x-3}{x^2-8x+16}=\frac{7x-3}{(x-4)^2}=\frac{A}{x-4}+\frac{B}{(x-4)^2}$$
$$7x-3=A(x-4)+B$$

$$x=4\ \rightarrow\ 25=B\ \rightarrow\ B=25$$
$$x=0\ \rightarrow\ -3=-4A+25\ \rightarrow\ A=7$$

إذن، يُمكِن تجزئة المقدار النسبي في الصورة الآتية:

$$\frac{7x-3}{x^2-8x+16}=\frac{7}{x-4}+\frac{25}{(x-4)^2}$$

(2) $\dfrac{1}{(x+1)(x-2)^2}$

الحـــل:

$$\frac{1}{(x+1)(x-2)^2}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{(x-2)^2}$$
$$1=A(x-2)^2+B(x+1)(x-2)+C(x+1)$$
$$x=-1 \quad \rightarrow \quad 1=9A \quad \rightarrow \quad A=\frac{1}{9}$$
$$x=2 \quad \rightarrow \quad 1=3C \quad \rightarrow \quad C=\frac{1}{3}$$
$$x=0 \quad \rightarrow \quad 1=\frac{4}{9}-2B+\frac{1}{3} \quad \rightarrow \quad B=-\frac{1}{9}$$

إذن، يُمكِن تجزئة المقدار النسبي في الصورة الآتية:

$$\frac{1}{(x+1)(x-2)^2}=\frac{1}{9(x+1)}+\frac{-1}{9(x-2)}+\frac{1}{3(x-2)^2}$$

---

(3) $\dfrac{2x^2-x-6}{x^3+4x^2+4x}$

الحـــل:

$$\frac{2x^2-x-6}{x^3+4x^2+4x}=\frac{2x^2-x-6}{x(x+2)^2}$$
$$=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{(x+2)^2}$$
$$2x^2-x-6=A(x+2)^2+Bx(x+2)+Cx$$
$$x=0 \quad \rightarrow \quad -6=4A \quad \rightarrow \quad A=-\frac{3}{2}$$
$$x=-2 \quad \rightarrow \quad 4=-2C \quad \rightarrow \quad C=-2$$
$$x=1 \quad \rightarrow \quad -5=-\frac{27}{2}+3B-2 \quad \rightarrow \quad B=\frac{7}{2}$$

إذن، يُمكِن تجزئة المقدار النسبي في الصورة الآتية:

$$\frac{2x^2-x-6}{x^3+4x^2+4x}=\frac{-3}{2x}+\frac{7}{2(x+2)}+\frac{-2}{(x+2)^2}$$

3. تجزئة مقدار نسبي عوامل مقامه كثيرات حدود، أحدها تربيعي غير مُكرَّر، ولا يُمكِن تحليله .

تعلَّمْتُ في المثالين السابقين تجزئة مقادير نسبية، جميع عوامل مقاماتها كثيرات حدود خطِّية. ولكنْ في بعض الحالات، قد يحوي تحليل المقام عاملاً تربيعيًّا لا يُمكِن تحليله، عندئذٍ ينتج من العامل التربيعي كسر جزئي بسطه كثيرحدود خطِّي في صورة $Ax+B$، ومقامه العامل التربيعي.

مفهوم أساسي: تجزئة مقدار نسبي عوامل مقامه كثيرات حدود، أحدها تربيعي غير مُكرَّر، ولا يُمكِن تحليله

إذا كان $\frac{P(x)}{Q(x)}$ مقدارًا جبرياً نسبيًّا، وكان التحليل الكامل لـــ $Q(x)$ يحتوي على عامل تربيعي غير مكرر، ولا يمكن تحليله وهو (ax^2+bx+c)، ودرجة P أقل من درجة Q، فإنَّ تجزئة $\frac{P(x)}{Q(x)}$ تتضمن الحد:

$$\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$$

مثال 1: أجزئ $\frac{x^2-3x+16}{(x+1)(x^2+9)}$ الى كسور جزئية.

الحـــل:

بما أنَّ المقدار النسبي يحتوي في مقامه على عامل تربيعي لا يُمكِن تحليله، فإنَّ بسط أحد الكسور الجزئية سيكون ثابتًا، وبسط الآخر سيكون مقدارًا خطِّيًّا.

الخطوة 1: أبدأ بإعداد تجزئة للمقدار النسبي باستعمال ثوابت غير معروفة، فأكتب ثابتًا في بسط العامل الخطِّي، ومقدارًا خطِّيًّا في بسط العامل التربيعي.

$$\frac{x^2-3x+16}{(x+1)(x^2+9)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{(x^2+9)}$$

الخطوة 2: أضرِب طرفي المعادلة في المضاعف المشترك الأصغر لمقامي الكسرين الجزئيين. بضرب طرفي المعادلة في (م.م.أ) لمقامي الكسرين الجزئيين، وهو $(x+1)(x^2+9)$، فإنَّ:

$$(x+1)(x^2+9)\frac{x^2-3x+16}{(x+1)(x^2+9)}$$
$$=(x+1)(x^2+9)\left(\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{(x^2+9)}\right)$$

باستعمال خاصية التوزيع في الطرف الأيمن من المعادلة والاختصار، تنتج المعادلة الآتية:

$$x^2-3x+16=A(x^2+9)+(Bx+C)(x+1)$$

الخطوة 3 : أجد قيمة كل من الثابت A و B و C باستعمال التعويض.

$x=-1 \rightarrow 20=10A \rightarrow A=2$

$x=0 \rightarrow 16=18+C \rightarrow C=-2$

- بتعويض أي قيمة أخرى للمتغير x (مثل $x=1$) في المعادلة الناتجة، إضافة الى تعويض قيمتي A و C الناتجتين:

$x=1 \rightarrow 14=2B+16 \rightarrow B=-1$

إذن، يُمكِن تجزئة المقدار النسبي في الصورة الآتية:

$$\frac{x^2-3x+16}{(x+1)(x^2+9)}=\frac{2}{x+1}+\frac{-x-2}{(x^2+9)}$$

مثال 2 : أجزئ $\frac{21-7x}{(x+5)(x^2+3)}$ الى كسور جزئية.

الحـــل:

$$\frac{21-7x}{(x+5)(x^2+3)}=\frac{A}{x+5}+\frac{Bx+C}{x^2+3}$$

$21-7x=A(x^2+3)+(Bx+C)(x+5)$

$x=-5 \rightarrow 56=28A \rightarrow A=2$

$x=0 \rightarrow 21=6+5C \rightarrow C=3$

$x=1 \rightarrow 14=8+(B+3)(6) \rightarrow B=-2$

إذن، يُمكِن تجزئة المقدار النسبي في الصورة الآتية:

$$\frac{21-7x}{(x+5)(x^2+3)}=\frac{2}{x+5}+\frac{-2x+3}{x^2+3}$$

مثال 3 : أجزئ كلاً مما يأتي الى كسور جزئية.

(1) $\frac{6x^2-7x+10}{(x-2)(x^2+1)}$

الحـــل:

$$\frac{6x^2-7x+10}{(x-2)(x^2+1)}=\frac{A}{x-2}+\frac{Bx+C}{x^2+1}$$

$6x^2-7x+10=A(x^2+1)+(Bx+C)(x-2)$

$x=2 \rightarrow 20=5A \rightarrow A=4$

$x=0 \rightarrow 10=4-2C \rightarrow C=-3$

$x=1 \rightarrow 9=8+(B-3)(-1) \rightarrow B=2$

إذن، يُمكِن تجزئة المقدار النسبي في الصورة الآتية:

$$\frac{6x^2-7x+10}{(x-2)(x^2+1)}=\frac{4}{x-2}+\frac{2x-3}{x^2+1}$$

(2) $\frac{x-3}{x^3+3x}$

الحـــل:

$$\frac{x-3}{x^3+3x}=\frac{x-3}{x(x^2+3)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+3}$$

$x-3=A(x^2+3)+(Bx+C)(x)$

$x=0 \rightarrow -3=3A \rightarrow A=-1$

$x=1 \rightarrow -2=-4+B+C$

$\rightarrow B+C=2 \quad \dots(1)$

$x=-1 \rightarrow -4=-4+B-C$

$\rightarrow B-C=0 \quad \dots(2)$

$(1)+(2) \rightarrow 2B=2 \rightarrow B=1 \ , \ C=1$

إذن، يُمكِن تجزئة المقدار النسبي في الصورة الآتية:

$$\frac{x-3}{x^3+3x}=\frac{-1}{x}+\frac{x+1}{x^2+3}$$

---

(3) $\frac{x^2+2x+40}{x^3-125}$

الحـــل:

$$\frac{x^2+2x+40}{x^3-125}=\frac{x^2+2x+40}{(x-5)(x^2+5x+25)}$$

$$=\frac{A}{x-5}+\frac{Bx+C}{x^2+5x+25}$$

$x^2+2x+40=A(x^2+5x+25)+(Bx+C)(x-5)$

$x=5 \rightarrow 75=75A \rightarrow A=1$

$x=0 \rightarrow 40=25-5C \rightarrow C=-3$

$x=1 \rightarrow 43=31-4B \rightarrow B=0$

$(1)+(2) \rightarrow 2B=2 \rightarrow B=1 \ , \ C=1$

إذن، يُمكِن تجزئة المقدار النسبي في الصورة الآتية:

$$\frac{x^2+2x+40}{x^3-125}=\frac{1}{x-5}+\frac{-3}{x^2+5x+25}$$

4. تجزئة مقدار نسبي ، درجة كثير الحدود في بسطه مُساوية لدرجة كثير الحدود في مقامه أو أكبر منها

تعلَّمْتُ في الأمثلة السابقة تجزئة مقادير نسبية مختلفة في صورة $\frac{P(x)}{Q(x)}$ حيث P و Q كثيرا حدود ولا يوجد بينهما عوامل ، ودرجة P أقل من درجة Q ، ولكن ، اذا كانت درجة P مساوية لدرجة Q أو أكبر منها ، فيجب أولا تجهيز المقدار النسبي باستعمال القسمة الطويلة، وذلك بقسمة P على Q .

مثال1 : أجزئ $\frac{2x^2+13x+6}{x^2+6x-16}$ الى كسور جزئية.

بما أنَّ درجة البسط مُساوِية لدرجة المقام، فإنَّني أَقسِم أوَّلًا البسط على المقام، ثمَّ أُجزِّئ.

الخطوة 1 : أَقسِم البسط على المقام باستعمال القسمة الطويلة، ثمَّ أكتب الكسر في صورة مجموع ناتج القسمة مع كسر يُمثِّل باقي القسمة .

$$\begin{array}{r|l} & 2 \\ \hline x^2+6x-16 & 2x^2+13x+6 \\ & (-)\ 2x^2+12x-32 \\ \hline & x+38 \end{array}$$

اذن، ناتج القسمة 2 ، والباقي $x+38$. ومنه، فإن:

$$\frac{2x^2+13x+6}{x^2+6x-16} = 2 + \frac{x+38}{x^2+6x-16}$$

الخطوة 2: أُحلِّل مقام باقي القسمة تحليلًا كاملاً، وأبدأ بإعداد تجزئة للمقدار النسبي باستعمال رموز تُمثِّل قِيَمًا مجهولةً.

أكتب كسرين جزئيين مقاماهما عوامل مقام الكسر النسبي الأصلي، ثمَّ أكتب رمزًا في بسط كلٍّ منهما:

$$\frac{x+38}{x^2+6x-16} = \frac{x+38}{(x+8)(x-2)} = \frac{A}{x+8} + \frac{B}{x-2}$$

الخطوة 3: أَضرِب طرفي المعادلة في المضاعف المشترك الأصغر للمقام. بضرب طرفي المعادلة في (م.م.أ) للمقام، وهو $(x+8)(x-2)$، فإنَّ:

$$(x+8)(x-2)\frac{x+38}{x^2+6x-16} = (x+8)(x-2)\left(\frac{A}{x+8} + \frac{B}{x-2}\right)$$

باستعمال خاصية التوزيع في الطرف الأيمن من المعادلة والاختصار، تنتج المعادلة الآتية :

$$x+38 = A(x-2) + B(x+8)$$

الخطوة 3 : أجد قيمة كل من الثابت A و B باستعمال التعويض.

$$x=-8 \rightarrow 30=-10A \rightarrow A=-3$$
$$x=2 \rightarrow 40=10B \rightarrow B=4$$

إذن، يُمكِن تجزئة المقدار النسبي في الصورة الآتية:

$$\frac{x^2-3x+16}{(x+1)(x^2+9)} = \frac{2}{x+1} + \frac{-x-2}{(x^2+9)}$$

مثال2 : أجزئ $\frac{3x^2+12x+4}{x^2+x}$ الى كسور جزئية.

الحـــل:

$$\frac{3x^2+12x+4}{x^2+x} = 3 + \frac{9x+4}{x^2+x} = 3 + \frac{9x+4}{x(x+1)}$$

$$\frac{9x+4}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1}$$

$$9x+4 = A(x+1) + Bx$$

$$x=0 \rightarrow 4=A \rightarrow A=4$$
$$x=-1 \rightarrow -5=-B \rightarrow B=5$$

إذن، يُمكِن تجزئة المقدار النسبي في الصورة الآتية:

$$\frac{3x^2+12x+4}{x^2+x} = 3 + \frac{4}{x} + \frac{5}{x+1}$$

مثال3 : أجزئ كلاً مما يأتي الى كسور جزئية.

(1) $$\frac{-2x^3-30x^3+36x+216}{x^3+216}$$

$$= -2 + \frac{-30x^2+36x+648}{x^3+216}$$

$$= -2 + \frac{-30x^2+36x+648}{(x+6)(x^2-6x+36)}$$

$$\frac{-30x^2+36x+648}{(x+6)(x^2-6x+36)} = \frac{A}{x+6} + \frac{Bx+C}{x^2-6x+36}$$

$$-30x^2+36x+648 = A(x^2-6x+36) + (Bx+C)(x+6)$$

$$x=-6 \rightarrow -1080-216+648 = 108A$$
$$\rightarrow A=-6$$
$$x=0 \rightarrow 648 = -216+6C \rightarrow C=144$$
$$x=1 \rightarrow 654 = -186+7B+1008$$
$$\rightarrow B=-24$$

إذن، يُمكِن تجزئة المقدار النسبي في الصورة الآتية:

$$\frac{-2x^3-30x^3+36x+216}{x^3+216} = -2 + \frac{-6}{x+6} + \frac{-24x+11}{x^2-6x+36}$$

(17) $\dfrac{x^3+12x^2+33x+2}{x^2+8x+15}$

الحـــل:

$$\frac{x^3+12x^2+33x+2}{x^2+8x+15}=x+4+\frac{-14x-58}{x^2+8x+15}$$
$$=x+4+\frac{-14x-58}{(x+3)(x+5)}$$
$$\frac{-14x-58}{(x+3)(x+5)}=\frac{A}{x+3}+\frac{B}{x+5}$$
$$-14x-58=A(x+5)+B(x+3)$$
$x=-3 \rightarrow 42-58=2A \rightarrow A=-8$
$x=-5 \rightarrow 70-58=-2B \rightarrow B=-6$

إذن، يُمكِن تجزئة المقدار النسبي في الصورة الآتية:

$$\frac{x^3+12x^2+33x+2}{x^2+8x+15}=x+4+\frac{-8}{x+3}+\frac{-6}{x+5}$$

---

(18) $\dfrac{x^5-2x^4+x^3+x+5}{x^3-2x^2+x-2}$

الحـــل:

$$\frac{x^5-2x^4+x^3+x+5}{x^3-2x^2+x-2}=x^2+\frac{2x^2+x+5}{x^3-2x^2+x-2}$$
$$=x^2+\frac{2x^2+x+5}{(x-2)(x^2+1)}$$
$$\frac{2x^2+x+5}{(x-2)(x^2+1)}=\frac{A}{x-2}+\frac{Bx+C}{x^2+1}$$

$$2x^2+x+5=A(x^2+1)+(Bx+C)(x-2)$$

$x=2 \rightarrow 15=5A \rightarrow A=3$
$x=0 \rightarrow 5=3C \rightarrow C=-1$
$x=1 \rightarrow 8=6-B+1 \rightarrow B=-1$

إذن، يُمكِن تجزئة المقدار النسبي في الصورة الآتية:

$$\frac{x^5-2x^4+x^3+x+5}{x^3-2x^2+x-2}=x^2+\frac{3}{x-2}+\frac{-x-1}{x^2+1}$$

أسئلة متنوعة

سؤال 1: أبين أنَّه يُمكن كتابة $\frac{1}{x^2-a^2}$ في صورة:

$$\frac{1}{2a(x-a)}-\frac{1}{2a(x+a)}$$

حيث a عدد حقيقي لا يساوي صفرًا.

الحـــل:

$$\frac{1}{x^2-a^2}=\frac{1}{(x-a)(x+a)}=\frac{A}{(x-a)}+\frac{B}{(x+a)}$$
$$1=A(x+a)+B(x-a)$$
$x=a \rightarrow 1=2aA \rightarrow A=\frac{1}{2a}$
$x=-a \rightarrow 1=-2aB \rightarrow B=-\frac{1}{2a}$

إذن، يُمكِن تجزئة المقدار النسبي في الصورة الآتية:

$$\frac{1}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a(x-a)}+\frac{-1}{2a(x+a)}$$

سؤال 2: اذا كان: $\frac{5x}{(x+3)^2}=\frac{p}{x+3}-\frac{3p}{(x+3)^2}$، فأجد قيمة p.

الحـــل:

$$\frac{5x}{(x+3)^2}=\frac{p}{x+3}-\frac{3p}{(x+3)^2}=\frac{p(x+3)-3p}{(x+3)^2}$$
$$p(x+3)-3p=5x$$
$x=-2 \rightarrow p-3p=-10 \rightarrow p=5$

سؤال 3: اذا كان:

$$\frac{x^2+8x+7}{(x-1)^2(x^2+2)}=\frac{px-37}{9(x^2+2)}-\frac{p}{9(x-1)}+\frac{8p}{3(x-1)^2}$$

فأجد قيمة p.

الحـــل:

$$\frac{x^2+8x+7}{(x-1)^2(x^2+2)}=\frac{px-37}{9(x^2+2)}-\frac{p}{9(x-1)}+\frac{8p}{3(x-1)^2}$$
$$=\frac{(px-37)(x-1)^2-p(x-1)(x^2+2)+24p(x^2+2)}{9(x-1)^2(x^2+2)}$$
$$9(x^2+8x+7)=(px-37)(x-1)^2$$
$$-p(x-1)(x^2+2)+24p(x^2+2)$$
$x=1 \rightarrow 144=72p \rightarrow p=2$

سؤال 4 : هندسة ميكانيكية : يُستعمل الاقتران الآتي لتقدير درجة الحرارة لعادم محرك ديزل :

$$R(x)=\frac{2000(4-3x)}{(11-7x)(7-4x)} \quad , \quad 0\le x\le 1$$

حيث x مقدار جهد المُحرّك ، و $R(x)$ درجة الحرارة بالفهرنهايت :

(1) أُجزئ الاقتران $R(x)$ إلى كسور جزئية.

الحـــل :

$$\frac{2000(4-3x)}{(11-7x)(7-4x)}=\frac{A}{(11-7x)}+\frac{B}{(7-4x)}$$

$$2000(4-3x)=A(7-4x)+B(11-7x)$$

$$x=\frac{11}{7} \rightarrow -\frac{10000}{7}=\frac{5}{7}A \quad \rightarrow \quad A=-2000$$

$$x=\frac{7}{4} \rightarrow \frac{32000}{7}=-\frac{5}{4}B \quad \rightarrow \quad B=2000$$

$$\frac{2000(4-3x)}{(11-7x)(7-4x)}=\frac{-2000}{(11-7x)}+\frac{2000}{(7-4x)}$$

---

(2) إذا كان $R(x)$ يُمثل الفرق بين اقتران أعلى درجة حرارة للعادم واقتران أقل درجة حرارة للعادم، فأجد كلا من الاقترانين، وأستعين بالسؤال السابق في عملية الحلّ .

اقتران أعلى درجة حرارة هو: $\frac{2000}{7-4x}$

اقتران أدنى درجة حرارة هو: $\frac{2000}{11-7x}$

سؤال 5 : يُمثِّل الاقتران: $v=\frac{t^2-5t+6}{(t+2)(t^2-1)}$ العلاقة بين سرعة سيّارة v بالكيلومتر لكل ساعة والزمن t بالساعات. هل يُمكِن كتابة الاقتران v في صورة مجموع مقدارين جبريين نسبيين، مقام أحدهما $(t+2)$، ومقام الآخر (t^2-1) ؟

$$=\frac{t^2-5t+6}{(t+2)(t-1)(t+1)}=\frac{A}{t+2}+\frac{B}{t-1}+\frac{C}{t+1}$$

$$t^2-5t+6=A(t-1)(t+1)+B(t+2)(t+1)+C(t+2)(t-1)$$

$$t=-2 \quad \rightarrow \quad 20=3A \quad \rightarrow \quad A=\frac{20}{3}$$

$$t=1 \quad \rightarrow \quad 2=6B \quad \rightarrow \quad B=\frac{1}{3}$$

$$t=-1 \quad \rightarrow \quad 12=-2C \quad \rightarrow \quad C=-6$$

إذن، يُمكِن تجزئة المقدار النسبي في الصورة الآتية :

$$\frac{t^2-5t+6}{(t+2)(t^2-1)}=\frac{\frac{20}{3}}{t+2}+\frac{\frac{1}{3}}{t-1}+\frac{-6}{t+1}$$

$$=\frac{\frac{20}{3}}{t+2}+\frac{\frac{1}{3}(t+1)-6(t-1)}{t^2-1}$$

$$=\frac{\frac{20}{3}}{t+2}+\frac{\frac{-17}{3}t+\frac{19}{3}}{t^2-1}$$

مهارات التفكير العليا

سؤال 6 : تحدٍّ: أُجزِّئ كُلًّا من المقادير النسبية الآتية إلى كسور جزئية:

(1) $\dfrac{x^3-2x^2-4x+3}{x^4}$

$$=\frac{x^3}{x^4}-\frac{2x^2}{x^4}-\frac{4x}{x^4}+\frac{3}{x^4}=\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}-\frac{4}{x^3}+\frac{3}{x^4}$$

---

(2) $\dfrac{2x^2+6x-5}{(x-2)^3}$

$$\frac{2x^2+6x-5}{(x-2)^3}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{(x-2)^2}+\frac{C}{(x-2)^3}$$
$$2x^2+6x-5=A(x-2)^2+B(x-2)+C$$
$x=2 \rightarrow 15=C \rightarrow C=15$

$x=3 \rightarrow 31=A+B+15$
$\rightarrow A+B=16 \quad ...(1)$

$x=1 \rightarrow 3=A-B+15$
$\rightarrow A-B=-12 \quad ...(2)$

$(1)+(2) \rightarrow 2A=4 \rightarrow A=2 \quad , \quad B=14$

$$\frac{2x^2+6x-5}{(x-2)^3}=\frac{2}{x-2}+\frac{14}{(x-2)^2}+\frac{15}{(x-2)^3}$$

---

(3) $\dfrac{3x^3+12x-20}{x^4-8x^2+16}$

$$=\frac{3x^3+12x-20}{(x^2-4)^2}=\frac{3x^3+12x-20}{(x-2)^2(x+2)^2}$$
$$=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{(x-2)^2}+\frac{C}{x+2}+\frac{D}{(x+2)^2}$$
$$3x^3+12x-20=A(x-2)(x+2)^2+B(x+2)^2+C(x+2)(x-2)^2+D(x-2)^2$$

$x=2 \rightarrow 28=16B \rightarrow B=\frac{7}{4}$

$x=-2 \rightarrow -68=16D \rightarrow D=-\frac{17}{4}$

$x=0 \rightarrow -20=-8A+7+8C-17$
$\rightarrow -4A+4C=-5 \quad ...(1)$

$x=4 \rightarrow 220=72A+63+24C-17$
$\rightarrow 35A+12C=87 \quad ...(2)$

$9\times(1)+(2) \rightarrow 48C=42$
$\rightarrow C=\frac{7}{8} \quad , \quad A=\frac{17}{8}$

$$\frac{3x^3+12x-20}{x^4-8x^2+16}=\frac{17}{8(x-2)}+\frac{7}{4(x-2)^2}+\frac{7}{8(x+2)}+\frac{-17}{4(x+2)^2}$$

سؤال 7 : أكتشف الخطأ: بدأت رنيم خطوات تجزئة المقدار $\frac{5x+2}{(x+3)^2}$ كالآتي:

$$\frac{5x+2}{(x+3)^2}=\frac{A}{x+3}+\frac{B}{x+3}$$

أُحدِّد الخطأ الذي وقعت فيه رنيم، ثمَّ أُصحِّحه.

الحـــل:

الخطأ الذي وقعت فيه رنيم هو أنها جعلت مقامي الكسرين متماثلين في حيث أنه يجب أن تجعل مقام الكسر الثاني $(x+3)^2$ تكون الخطوة الأولى الصحيحة على النحو الآتي:

$$\frac{5x+2}{(x+3)^2}=\frac{A}{x+3}+\frac{B}{(x+3)^2}$$

سؤال 7 : تبرير: إذا كان: $\frac{ax+b}{x^2-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}$، فأجد قيمة كلٍّ من A و B بدلالة المُتغيِّرين a و b، ثمَّ أُبرِّر إجابتي.

الحـــل:

$$\frac{ax+b}{x^2-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}$$
$$ax+b=A(x+1)+B(x-1)$$

$x=1 \rightarrow a+b=2A \rightarrow A=\frac{a+b}{2}$

$x=-1 \rightarrow -a+b=-2B$
$\rightarrow B=\frac{-a+b}{-2}=\frac{a-b}{2}$

سؤال 8 : مسألة مفتوحة: أكتب اقترانًا نسبيًّا في صورة $\frac{f(x)}{g(x)}$، بحيث تحتوي مقامات كسوره الجزئية على عوامل خطِّية غير مُكرَّرة.

الحـــل:

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{x^2-2x+7}{2x^3-7x^2+9}$$
$$=\frac{x^2-2x+7}{(x-3)(2x^2-x-3)}$$
$$=\frac{x^2-2x+7}{(x-3)(2x-3)(x+1)}$$
$$=\frac{A}{(x-3)}+\frac{B}{(2x-3)}+\frac{C}{(x+1)}$$
$$=\frac{5}{6(x-3)}+\frac{-5}{3(2x-3)}+\frac{1}{2(x+1)}$$

أُجزِّئ كُلًّا من المقادير النسبية الآتية إلى كسور جزئية:

1. $\frac{x^2-2x-3}{(x+1)(2x+5)(7-3x)}$
2. $\frac{3x-5}{x(x-1)^2}$
3. $\frac{x^2+x-2}{(2x-1)(x^2+1)}$
4. $\frac{5x-1}{2x^2-5x-3}$
5. $\frac{9-5x}{x^3-4x^2+3x}$
6. $\frac{36+5x}{16-x^2}$
7. $\frac{8x+3}{x^2-3x}$
8. $\frac{3x^2-2x-5}{x^3+x^2}$
9. $\frac{3x^2+2x+2}{(x-2)(x-3)^2}$
10. $\frac{2x^2-3x-27}{x^3-6x^2+9x}$
11. $\frac{5x+8}{4x^3-12x^2+9x-2}$
12. $\frac{5x^2+2}{(x^2+3)(1-2x)}$
13. $\frac{24}{(2x^2+x+5)(x-1)}$
14. $\frac{6x^2+8x-7}{2x^2+3x-5}$
15. $\frac{x^3-3x^2-3x+12}{x^2-3x+2}$

16. أجد الاقتران النسبي الذي يُمكِن كتابته في صورة كسور جزئية على النحو الآتي:

$$\frac{2}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{x+1}$$

أُجزِّئ كُلًّا من المقادير النسبية الآتية إلى كسور جزئية:

17. $\frac{ax+b}{(x-c)^2}$
18. $\frac{1}{x^2-ax-bx+abx}$
19. $\frac{ax+b}{x^2-c^2}$

20. أُجزِّئ المقدار: $\frac{2}{x(x+2)}$، ثمَّ أستعمل ناتج التجزئة لإيجاد المجموع الآتي:

$$\frac{2}{1\times 3}+\frac{2}{3\times 5}+\frac{2}{5\times 7}+\ldots+\frac{2}{11\times 13}$$

اختبار نهاية الوحدة

أختار رمز الإجابة الصحيحة في كلٍّ ممّا يأتي:

1 باقي قسمة: $f(x)=x^3-2x^2-5x+9$ على $(x+2)$ يساوي:

a) 3 b) -1 c) 9 d) 27

2 إذا كان $(x-3)$ عاملًا من عوامل: $g(x)=2x^3+x^2+px-6$، فإنَّ قيمة p هي:

a) -17 b) -3 c) 10 d) -19

3 إذا كان: $\frac{x-4}{x^2-5x-2k}=\frac{2}{x-2}-\frac{1}{x+k}$، فـإنَّ k تساوي:

a) -3 b) -2 c) 2 d) 3

4 إذا كان: $\frac{5x-12}{x^2-3x-4}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-4}$، فـإنَّ قيمة $A+B$ هي:

a) -12 b) -7 c) 3 d) 5

5 إذا كان باقي قسمة كثير الحدود $f(x)$ على $(x-1)$ هو 2، وباقي قسمته على $(x-2)$ هو 5، فإنَّ باقي قسمة $f(x)$ على $(x-2)(x-1)$ هو:

a) 10 b) $1-x$

c) $2x-1$ d) $3x-1$

أُحلِّل كُلًّا ممّا يأتي تحليلًا كاملًا:

6 $3x^3-10x^2-9x+4$

7 $8x^4+2x^3-53x^2+37x-6$

أحُلُّ كل معادلة ممّا يأتي:

8 $x^4-7x^3+13x^2+3x-18=0$

9 $x^3+16x^2-3x=5x^2-18x+27$

10 إذا كان باقي قسمة كلٍّ من المقدارين:

$mx^3+x^2-10x-6$، و $2x^3-4x^2+mx+8$

على $(x-2)$ متساويًا، فأجد قيمة الثابت m.

أُجزِّئ كُلًّا من المقادير النسبية الآتية إلى كسور جزئية:

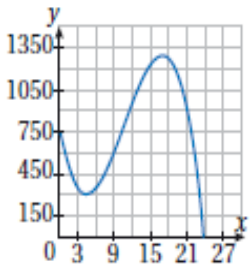
11 $\frac{6}{(x+3)(x+1)}$ 12 $\frac{5x^2-6}{x^3-2x^2+x}$

13 $\frac{3x^2+x-4}{x^2-2x}$ 14 $\frac{4x^2-x-2}{x^4+2x^2}$

15 إذا كان: $\frac{7x-5}{(x-a)(x-3)}=-\frac{9}{x-a}+\frac{b}{x-3}$، فأجد قيمة كلٍّ من a، و b.

16 إذا كان العدد (-2) هو أحد حلول المعادلة: $x^3+5x^2+5x-2=0$، فأجد حلولها الأُخرى.

17 أستعمل التمثيل البياني المجاور للاقتران: $f(x)=-x^3+32x^2-224x+768$ لأُحلِّله تحليلًا كاملًا.



18 يريد حدّاد أنْ يصنع خزّان ماء على هيئة متوازي مستطيلات، بحيث يزيد طوله 1 m على مثلي عرضه، ويزيد ارتفاعه 1 m على عرضه، ويكون حجمه $30\ m^3$. كم مترًا مُربّعًا من الحديد يَلزمه لصنع خزّان الماء؟