الدرس 1

المُعدَّلات المرتبطة
Related Rates

أولاً : القوانين

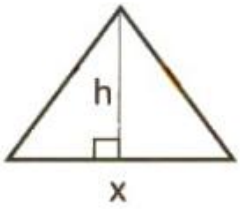
1) المثلث

المساحة

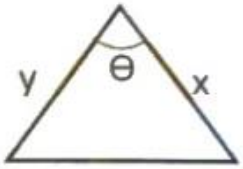
مثلث متساوي الأضلاع

$A = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2$

$A = \frac{1}{2}xh$



$A = \frac{1}{2}xy\sin\theta$



2) الدائرة وأجزاء الدائرة

1) مساحة الدائرة $A = \pi r^2$

2) محيط الدائرة $C = 2\pi r$

3) طول القوس $L = r\theta$

4) مساحة القطاع الدائري $A = \frac{1}{2}r^2\theta$

5) محيط القطاع الدائري

$$C = r + r + L = 2r + r\theta = r(2 + \theta)$$

6) مساحة القطعة الدائرية $A = A_{\text{القطاع}} - A_{\text{المثلث}}$

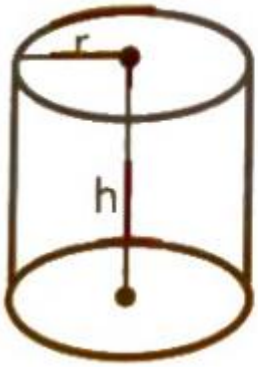
$$A = \frac{1}{2}r^2\theta - \frac{1}{2}r^2 \sin\theta$$

3) المستطيل

1) المساحة $A = xy$

2) المحيط $c = 2x + 2y$

4) الإسطوانة



1) الحجم $V = \pi r^2 h$

2) مساحة سطح الاسطوانة $A = 2\pi rh$

3) المساحة الكلية للاسطوانة $A = 2\pi rh + 2\pi r^2$

5) المخروط

1) الحجم $v = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

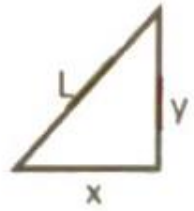
2) المساحة الجانبية ← $A = \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$

3) المساحة الكلية للمخروط $A = \pi r\sqrt{r^2 + h^2} + \pi r^2$

6) طول ضلع في مثلث

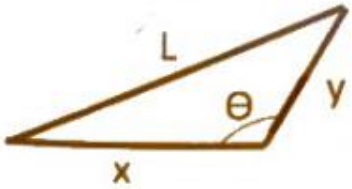
مثلث قائم الزاوية

$L^2 = x^2 + y^2$

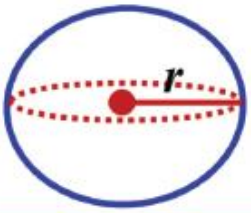


مثلث ليس قائم الزاوية

$L^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos\theta$



7) الكرة

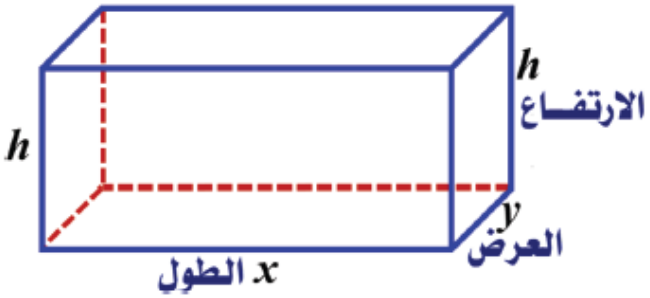


الكرة

مساحة سطح الكرة $\leftarrow$ $A = 4\pi r^2$

حجم الكرة $\leftarrow$ $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

8) متوازي المستطيلات



حجم متوازي المستطيلات

الطول * العرض * الارتفاع

$V = x.y.h$

مساحته الكلية

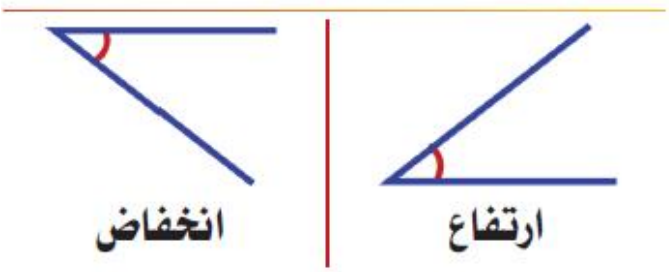
$2xy + 2xh + 2yh$

مساحته الجانبية

$2xh + 2yh$

9) زوايا الإرتفاع والإنخفاض

- زاوية الارتفاع: هي الزاوية المحصورة بين خط النظر لأعلى والخط الأفقي.
- زاوية الانخفاض: هي الزاوية المحصورة بين خط النظر لأسفل والخط الأفقي.



ثانياً :تعريف

مسائل المرتبطة بالزمن : هي مسائل تحتوي على كميات تتغير كل منها بالنسبة للزمن وسيتم ربط هذه الكميات بمعادلة او قانون .

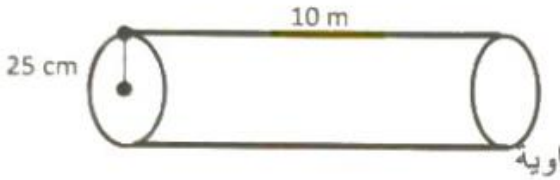
ثالثاً : الهدف

سيكون احد هذه الكميات معدله مجهول والبقية معطاة والمطلوب ايجاد معدل تغير الكمية المجهولة .

رابعاً :ملاحظات وتنبيهات

1) معدل تغير كمية = سرعة التغير = $\frac{d(\text{الكمية})}{dt}$

2) يجب التأكد من تناسق الوحدات أو تغير الوحدة حسب السؤال. مثلاً:



إما أن نحوّل 10 m إلى cm

او نحول 25cm إلى m

كما نحول الدرجة إلى راد في معدل تغير الزاوية

3) المعدلات المتناقصة تُعوض سالبة.

4) نحتاج أحياناً طول أو مقدار متغيّر مجهول

نستخدم المسافة = السرعة × الزمن

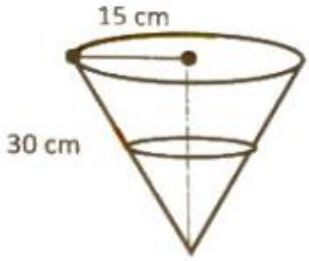
$$x = \frac{dx}{dt} \cdot t$$

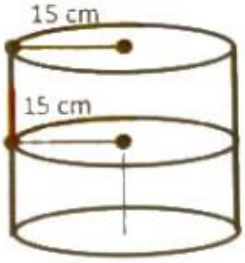
خامساً : طريقة الحل

1) قراءة المسألة جيداً، ورسم المسألة إن لم تكن الرسمة مُعطاة.

2) يتم تحديد المتغيرات والثوابت.

ويتم ترميز فقط المتغيرات وتحديد المتغير الذي نريد، مثلاً:





3) نكتب معادلة (قانون) تربط بين المتغيّر الذي نريد ايجاد معدله والمتغيرات معلومة المعدل.

4) نتخلص من المتغيّر الذي لم يُعطى معدله وهو غير مطلوب بدلالة متغيّر معدله معطى.

5) نشتق طرفي المعادلة باستخدام قاعدة السلسلة والضمني لايجاد مشتقة طرفي المعادلة بالنسبة للزمن t . مثلاً :

الكمية	المشتقة
x^2	$2x\frac{dx}{dt}$
A	$\frac{dA}{dt}$
y^5	$5y^4\frac{dy}{dt}$

6) نعوض في المعادلة الناتجة جميع القيم المعلومة ومعدلات تغيّرها ثم نجد المعدّل المجهول.

لكن كل الإنجازات العظيمة والأهداف الكبيرة
تتطلب وقت وجهد وتوكل على الله.

مُعدَّل تغيُّر المساحة والحجم بالنسبة إلى الزمن

مثال 1

عند سقوط قطرة ماء على مُسطَّح مائي، تتكوَّن موجات دائرية مُتَّحِدة المركز. إذا كان نصف قُطْر إحدى الدوائر يزداد بمُعدَّل $3\ cm/s$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:

(1) جد معدل تغير محيط الدائرة عندما يكون نصف قطرها $(5\ cm)$.

6π

---

(2) جد معدل التغير في مساحة الدائرة عندما يكون نصف قطرها $(9\ cm)$.

54π

مثال :

تنفخ ماجدة بالونًا على شـــكل كرة، فيزداد حجمه بمُعدَّل $80\ cm^3/s$. أجد مُعدَّل زيادة نصف قُطْر البالون عندما يكون نصف القُطْر $6\ cm$.

$\frac{5}{9\pi}$

مثال :

يزداد طول أحد أضلاع مســتطيل بمُعدَّل $2\ cm/s$، ويقل طول ضلعه الآخر بمُعدَّل $3\ cm/s$، بحيث يحافظ المســتطيل على شكله، وفي لحظة مُعيَّنة بلغ طول الضلع الأوَّل $20\ cm$، وطول الضلع الثاني $50\ cm$:

1 ما مُعدَّل تغيُّر مساحة المستطيل في تلك اللحظة؟

40

2 ما مُعدَّل تغيُّر محيط المستطيل في تلك اللحظة؟

-2

3 ما مُعدَّل تغيُّر طول قُطْر المستطيل في تلك اللحظة؟

$-\frac{11}{\sqrt{29}}$

مثال:

مُكعَّب طول ضلعه **10 cm**. بدأ المُكعَّب يتمدَّد، فزاد طول ضلعه بمُعدَّل **6 cm/s**، وظلَّ مُحافِظًا على شكله:

(1) جد معدل التغير في حجمه بعد $(4s)$ من بدء تمدده.

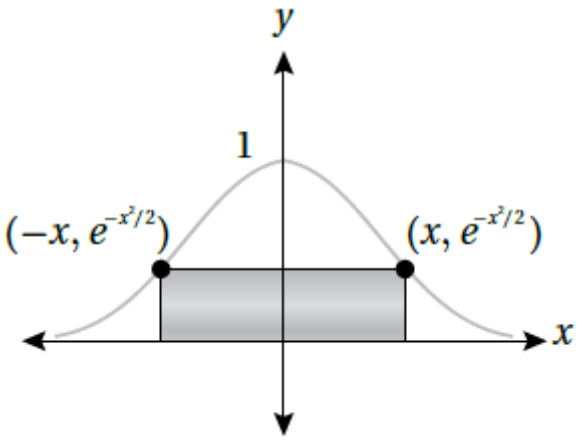
20808

(2) جد معدل تغير مساحة سطح المكعب بعد $(6s)$ من بدء تمدده.

3312

مثال:

يُبيِّـــن الشـــكل المجـــاور مســـتطيلًا مرســـومًا داخـــل منحنـــى الاقتران: $f(x) = e^{-x^2/2}$. إذا كان x يتغيَّـــر مع الزمن، مُغيِّرًا معه موضع المســـتطيل، فاجيب عن السؤالين الاتيين تباعًا:



1 أجد مساحة المستطيل بدلالة x.

$A = 2xe^{-\frac{x^2}{2}}$

2 أجد مُعدَّل تغيُّر مساحة المستطيل عندما $x = 4\ \text{cm}$، وعندما $\frac{dx}{dt} = 4\ \text{cm/min}$.

$-120e^{-8}$

مُعدل تغير المسافة بالنسبة للزمن

مثـــال: تتحرك الســـيارة (A) في اتجاه الغرب بسرعة $(80\ \text{km/h})$ وتتحرك السيارة (B) في اتجاه الشمال بسرعة $(100\ \text{km/h})$ وهما تتجهان نحو تقاطع مروري. جد معدل التغير في البعد بين السيارتين عندما تكون السيارة (A) والسيارة (B) على بعد 0.3km , $0.4\ \text{km}$ على الترتيب من التقاطع.

-128

مثـــــال: ســـفينتان b , a تقعان في ميناء واحد تحركت السفينة (a) باتجاه الشرق بسرعة $(30\,\mathrm{km/h})$ وبنفس الوقت تحركت السفينة (b) شمالاً بسرعة $(40\,\mathrm{km/h})$. ما معدل التغير في المسافة بين السفينتين بعد مرور ساعتين من بدء الحركة.

50

مثـــــال: مثلـث قـائم الزاويـة طول وتره ثابت ويساوي $(5\,\mathbf{cm})$ يزداد طول أحد ضلعي القائمة بمعدل $(2\,\mathbf{cm/min})$ ما معدل التغير في طول الضلع الأخر عندما يكون طول الضلع الأول $(4\,\mathbf{cm})$

$$\frac{-8}{3}$$

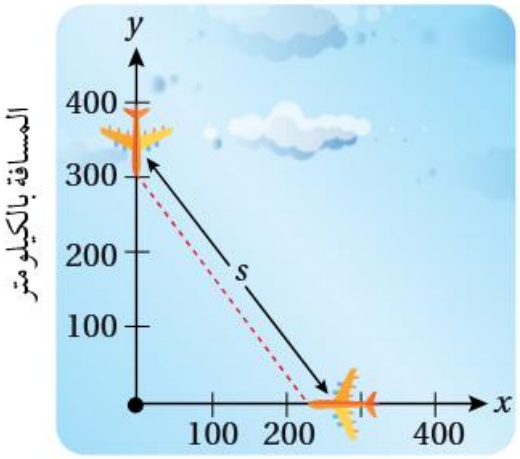
مثـــــال: طريقان متعامدان في (m) يقع بيت (b) على أحدهما ويبعد عن (m) مسافة $(3\,\mathbf{km})$ يسير رجل على الطريق الآخر مبتعداً عن (m) بمعدل $(6\,\mathbf{km/h})$ ، ما معدل ابتعاد الرجل عن البيت عندما يبعد الرجل عن (m) مسافة $(4\,\mathbf{km})$.

$$\frac{24}{5}$$

مثـــال: يتحرك رجل بسرعة $(8\ \mathrm{m/min})$ من قاعدة برج ارتفاع $(30\ \mathrm{m})$ ، ما معدل التغير في المسافة بين الرجل وقمة البرج في اللحظة التي يكون فيها الرجل على بعد $(40\ \mathrm{m})$ من قاعدة البرج.

$$\frac{-32}{5}$$

مثـــال: رصد مُراقِب الحركة الجوية فـي أحد المطارات طائرتين تُحلِّقان علـى الارتفاع نفسـه، وتقتربـان من نقطة التقاء مسـار حركتيهما في زاوية قائمة كما في الشـكل المجاور. كانت الطائرة الأولى تسـير بسـرعة **450 km/h**، في حين كانت الطائرة الثانية تسير بسرعة **600 km/h**:



12 أجد مُعدَّل تغيُّر المسافة بين الطائرتين في اللحظة التي تبعد فيها الطائرة الأولى مسـافة 225 km عن نقطة التقاء مسار حركة الطائرتين، وتبعد فيها الطائرة الثانية مسـافة 300 km عن النقطة نفسها، علمًا بأن الطائرتين تُحلِّقان على الارتفاع نفسه.

$$-750$$

(2) هل يجب على مراقب الحركة الجوية توجيه إحدى الطائرتين لاتخاذ مسار مختلف؟؟ برر إجابتك.

نعم يجب تغيير سرعة أو مسار أو ارتفاع إحدى الطائرتين

مثال: سفينتان b , a البعد بينهما $(70\,\mathrm{km})$ ، (b) تقع شرق (a) تحركت السفينة (b) باتجاه الغرب بسرعة $(10\,\mathrm{km/h})$ وبعد ساعتين من تحركها تحركت (a) شمالاً بسرعة $(15\,\mathrm{km/h})$. ما معدل التغير في المسافة بين السفينتين بعد ساعة من تحرك السفينة (a) ؟؟

$$\frac{-400+225}{\sqrt{1600+225}}$$

مثـــــال: ســـلم طوله $(11\,m)$ يرتكز على حائط عمودي بدأ ينزلق للأســـفل بحيث تبتعد قاعدة الســـلم عن الحائط بمعدل $(2\,m/s)$. ما ســـرعة نزول أعلى الســـلم إلى الأرض في اللحظة التي يبعد فيها أسفل السلم عن الحائط $(5\,m)$ ؟؟

$$\frac{-10}{\sqrt{96}}$$

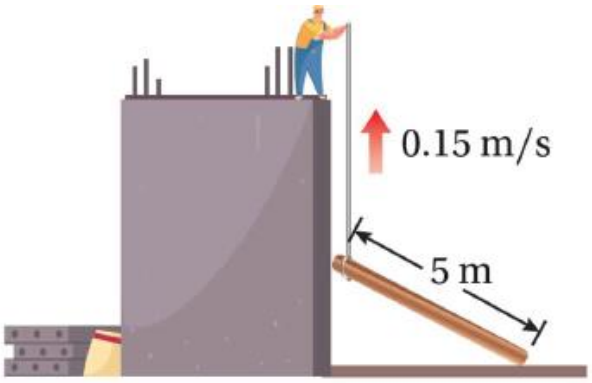
مثـــــال: ســـلم طوله $(11\,m)$ يرتكز على حائط عمودي بدأ ينزلق للأســـفل بحيث تبتعد قاعدة السـلم عن الحائط بمعدل $(3\,m/s)$. ما ما معدل هبوط الطرف الأعلى عندما يكون السـلم مائلاً بزاوية (60°) عن الأرض

$$\frac{-15}{\sqrt{96}}$$

مثـــــال: سـفينتان a , b المسـافة بينهما $(120\,\mathbf{km})$ ، (a) تقع شـرق (b) فإذا أبحرت (a) شـمالاً بسـرعة $(20\,\mathbf{km/h})$ وبنفس الوقـت أبحرت (b) جنوبـاً بسـرعـة $(30\,\mathbf{km/h})$. ما معدل تغير البعد بينهما بعد ساعة من إبحارهما.

$$\frac{250}{13}$$

مثـــــال: يسـحب عامل بناء لوحاً خشبياً طوله $(5\,\mathbf{m})$ إلى الأعلى بجانب مبنى لم يكتمل إنشاؤه بعد ، وذلك باستعمال حبل ربط به أحد طرفي اللوح كما في الشكل المجاور. إذا افترضت أن طرف اللوح المربوط بالحبل يتبع مساراً عمودياً على جدار المبنى ، وأن العامل يسحب الحبل بمعدل $(0.15\,\mathbf{m/s})$ ، بحيث يظل الطرف العلوي من اللوح ملامساً للجدار ، فما سرعة انزلاق الطرف الآخر للوح على الأرض عندما يكون على بُعد $(3\,\mathbf{m})$ من جدار المبنى ؟



$$\frac{dy}{dt} = 0.15\,\mathbf{m/s} \qquad \frac{dx}{dt} = ??$$

$$-0.2\,\mathbf{m/s}$$

مثال كتاب : يســـحب جمال قاربه إلى رصيف الاصطفاف باستعمال بكرة سحب ترتفع $(1\,\mathrm{m})$ عن مقدمة القارب. إذا طوت البكرة حبل السحب بسرعة $(1\,\mathrm{m/s})$ وكان القارب يبعد عن الرصيف مسافة $(8\,\mathrm{m})$ في لحظة ما. فما سرعة اقتراب القارب من الرصيف عندئذ ؟؟

$\frac{-\sqrt{65}}{8}$

مسافات المستوى الديكارتي

مثـــــال: تتحرك نقطـة على المنحنى $y=\sqrt{x^2+1}$ بحيث أن الإحداثي السيني (x) لها يزيد بمعدل $(2\,\mathrm{u/s})$. ما معدل التغير في المســـافة بينهما وبين النقطة الثابتة $(10,0)$ عندما يكون الإحداثي الســـيني للنقطة المتحركة $(4\,\mathrm{u})$.

$\frac{-4}{\sqrt{53}}$

مثال كتاب : يتحرك جُسيم على منحنى الاقتران $f(x)=2\sin\frac{\pi x}{2}$ وعند مروره بالنقطة $\left(\frac{1}{3},1\right)$ فإن الإحداثي (x) لموقعه يزداد بمعدل $\sqrt{10}$ وحدة طول لكل ثانية . جد معدل تغير المسافة بين الجُسيم ونقطة الأصل في هذه اللحظة.

$$\left(1+\frac{3\pi\sqrt{3}}{2}\right)$$

معدل تغير الزاوية بالنسبة للزمن

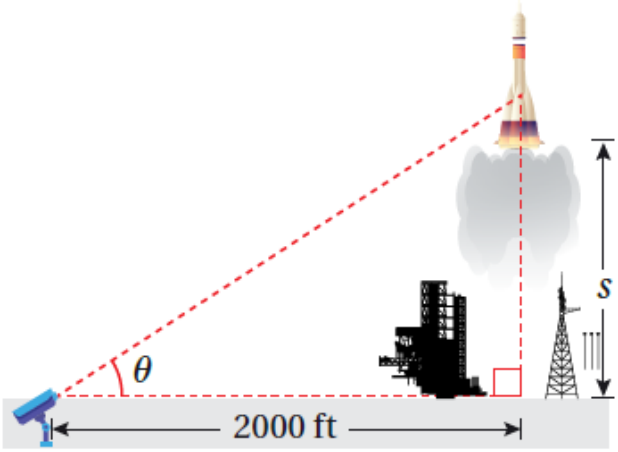
مثـــال: من نقطة (P) على أرض أفقية بدأ بالون بالارتفاع رأسياً إلى أعلى بسرعة $(3\,\mathrm{m/s})$ ، يقف ولد على بُعد $(30\,\mathrm{m})$ من النقطة (P) وينظر إلى البالون ، ما معدل التغير في قياس الزاوية بين خط نظر الولد إلى البالون وخد الأرض الأفقي عندما يكون البالون على ارتفاع $(40\,\mathrm{m})$.

$$\frac{9}{250}$$

مثـــــال: يقف رجل على رصيف حوض السـفن ويسـحب حبل متصـل بزورق بمعدل $(0.3\,\mathbf{m/s})$ إذا كـان ارتفـاع يـدي الرجـل عن مستوى اتصال الحبل بالزورق $(0.9\,\mathbf{m})$ ما سرعة تغير زاويـة انخفاض الحبل في اللحظـة التي يكون فيها الزورق على بُعد $(1.2\,\mathbf{m})$ عن الرصيف.

$$\frac{+0.27}{2.25} * \frac{5}{4}\ \mathbf{rad/s}$$

مثال كتاب: رصـــدت كاميرا مثبتة عند مستوى سطح الأرض لحظة إطلاق صاروخ رأسياً لأعلى وقد أعطي ارتفاعه بالاقتران $s(t) = 50t^2$ حيث (s) الموقع بالأقدام ، (t) الزمن بالثواني. إذا كانت الكاميرا تبعد مسافة $(2000\,\mathbf{ft})$ عن منصة الإطلاق. جد معدل تغير زاوية ارتفاع الصاروخ بعد (10) ثوان من انطلاقه.

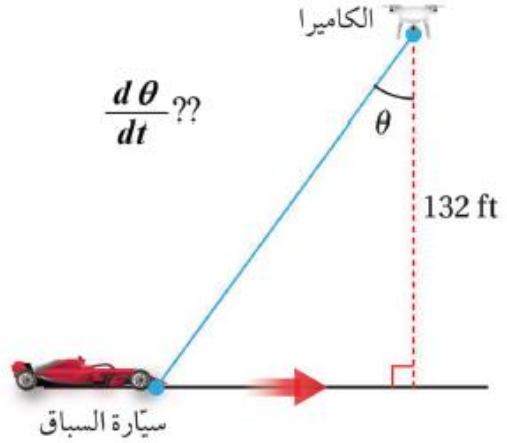


$$\frac{2}{\sqrt{29}}\ \mathbf{rad/s}$$

مثال كتاب : أمسك ولد ببكرة خيط طائرة ورقية تحلق على ارتفاع $(50\,\mathbf{m})$ فوق سطح الأرض وتتحرك أفقياً بسرعة $(2\,\mathbf{m/s})$ جد معدل تغير الزاوية بين الخيط والمستوى الأفقي عندما يكون طول الخيط $(100\,\mathbf{m})$ علماً بأن ارتفاع يد الولد عن الأرض $(1.5\,\mathbf{m})$.

$-0.0097\ \mathbf{rad/s}$

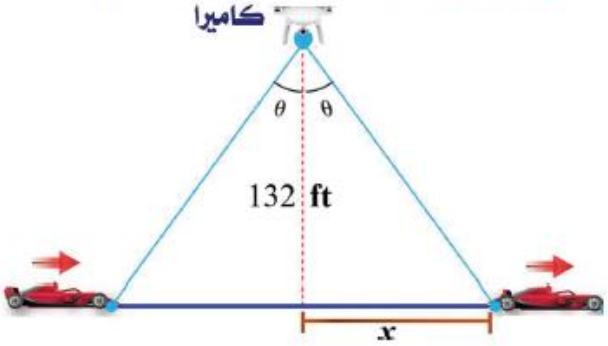
مثال كتاب : ترتفع كاميرا عن الأرض مسافة $(132\,\mathbf{ft})$ وترصد سيارة تتحرك على مضمار سباق وتبلغ سرعتها $(264\,\mathbf{ft/s})$ كما في الشكل.



جد سرعة تغير الزاوية (θ) عندما تكون السيارة أسفل الكاميرا تماماً.

$-2\ \mathbf{rad/s}$

مثال كتاب : ترتفع كـاميرا عن الأرض مسافة $(132\,\mathbf{ft})$ وترصد سيارة تتحرك على مضمار سباق وتبلغ سرعتها $(264\,\mathbf{ft/s})$ كما في الشكل.

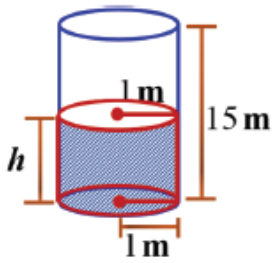


جد سرعة تغير الزاوية (θ) بعد نصف ثانية من مرور السيارة أسفل الكاميرا.

$1\,\mathbf{rad/s}$

مسائل الإسطوانة والمخروط

مثـــال: خزان أسطواني الشكل ارتفاعه $(15\,\mathbf{m})$ وقطر قاعدته $(2\,\mathbf{m})$ مُلئ بالوقود بمعدل $(500\ \mathbf{L/min})$.



(1) جـد معـدل تغير ارتفـاع الوقود في الخـزان عنـد أي لحظة.

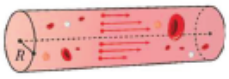
$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{2\pi}\ \mathbf{m/min}$$

---

(2) جد معدل التغير في المســـاحة الجانبية للوقود عند أي لحظة

$1\,\mathbf{m^2/min}$

مثـــال: ثـمـثـل الـمـعـادلـة $V = \frac{3125}{6}\left(R^2 - (0.0005)^2\right)$ سرعة الدم في أحد الأوعية الدموية بالميليمتر لكل ثانية حيث (R) نصف قطر الوعاء بالميليمتر . إذا كان الوعاء ينقبض بحيث ينقص نصف قطره بمعدل $(0.0002\ \text{mm/s})$ ، جد معدل تغير سرعة الدم في الوعاء في اللحظة التي يكون فيها طول نصف قطره $(0.075\ \text{mm})$.



(-0.0156)

مثـــال: أسطوانة معدنية مصمتة طول نصف قطرها (3) أمثال ارتفاعها تتمدد بالحرارة بحيث يزداد نصف قطرها بمعدل $(2\ \text{mm/h})$. جد معدل التغير في حجمها عندما يكون نصف قطرها $(5\ \text{mm})$.

علاقة مساعدة $r = 3h$

50π

مثـــــال: يتراكم الرمل على الأرض بعد سـقوطه من أنبوب مكوناً مخروط ارتفاعه يسـاوي ربع قطر قـاعـدتـه ويرتفع بمعـدل $(6\,\mathrm{cm/s})$. جـد معـدل التغير في حجم المخروط عنـدمـا يكون ارتفاعه $(10\,\mathrm{cm})$.

$$\frac{dh}{dt} = 6$$

$2400\,\mathrm{cm^3/s}$

مثـــــال: يسقط الرمل من أنبوب بمعدل $(2\,\mathrm{m^3/h})$ بحيث أنه يشـــكل كومة مخروطية ارتفاعها يساوي قطر قاعدتها.

جد سـرعة ارتفاع كومة الرمل عندما يكون ارتفاعها $(4\,\mathrm{m})$.

$$\frac{dV}{dt} = 2$$

$\frac{1}{2\pi}\,\mathrm{m/h}$

مثال كتاب : يسـقط الرمل من حزام ناقل بمعدل $\left(10\,\mathrm{m}^3/\mathrm{min}\right)$ على قمة كومة مخروطية الشكل ، إذا كان ارتفاع الكومة يساوي ثلاثة أثمان طول قطر قاعدتها ، جد كلاً مما يأتي:

(1) سرعة تغير ارتفاع كومة الرمل عندما يكون ارتفاعها $(4\,\mathrm{m})$

$$\left.\frac{dh}{dt}\right|_{h=4}$$

$\frac{90}{265\pi}\ \mathrm{m/min}$

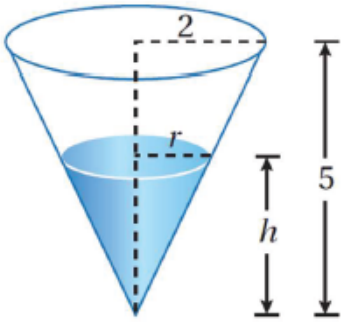
---

(2) سرعة تغير طول نصف قطر قاعدة الكومة عندما يكون ارتفاعها $(4\,\mathrm{m})$:

$$\left.\frac{dr}{dt}\right|_{h=4}$$

$\frac{15}{32\pi}\ \mathrm{m/min}$

مثال كتاب : خزان ماء على شكل مخروط دائري قائم ارتفاعه $(5\,\mathrm{m})$ ونصـــف قطر قاعدته $(2\,\mathrm{m})$ ورأسه إلى أسفل ، تسرب الماء من الخزان بمعدل $\left(\frac{1}{12}\mathrm{m}^3/\mathrm{min}\right)$ ما معدل تغير ارتفاع الماء في الخزان عندما يكون ارتفاعه $(4\,\mathrm{m})$.

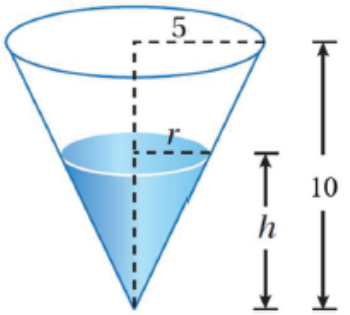


$$\frac{dV}{dt} = \frac{-1}{12}\ \mathrm{m}^3/\mathrm{h}$$

$$\frac{dh}{dt} = ???$$

$\frac{-25}{768\pi}\ \mathrm{m/min}$

مثال كتاب : خزان ماء على شكل مخروط دائري قائم رأسه للأسفل ، ارتفاعه $(10\,\mathrm{m})$ ونصف قطر قاعدته $(5\,\mathrm{m})$ ، صُب الماء في الخزان بمعدل $(\pi\,\mathrm{m}^3/\mathrm{min})$. ما معدل ارتفاع الماء في الخزان عندما يكون ارتفاعه $(8\,\mathrm{m})$:



$\frac{dV}{dt} = \pi\ \mathrm{m}^3/\mathrm{mm}$

المطلوب

$\frac{dh}{dt}$???

$\frac{1}{16}\ \mathrm{m/min}$

مثال: يتراكم الرمل على الأرض مكوناً مخروط دائري بزاوية $\left(\frac{\pi}{3}\right)$ ويرتفع بمعدل $(2\sqrt{3}\,\mathrm{cm/s})$. ما معدل التغير في حجم المخروط في اللحظة التي يكون فيها نصف قطر قاعدته $(\sqrt{3}\,\mathrm{cm})$.

$6\pi\sqrt{3}\ \mathrm{cm}^3/\mathrm{s}$

مثـــــال: يتراكم الثلج على الأرض مكوناً مخروطاً ارتفاعه يساوي نصف قطر قاعدته بمعدل $(80\,cm^3/h)$. ما معدل التغير في مساحة قاعدة المخروط عندما يكون نصف قطرها $(10\,cm)$.

$16\,cm^2/h$

قانون جيب التمام

مثال كتاب: تحركت دراجتان في الوقت نفسه ومن النقطة نفسها على طريقين مستقيمين قياس الزاوية بينهما $\left(\frac{\pi}{3}rad\right)$ إذا كانت سرعة الدراجة الأولى $(15\,km/h)$ وسرعة الدراجة الثانية $(20\,km/h)$. جد سرعة ابتعاد كل منهما عن الأخرى بعد ساعتين من انطلاقهما.

$5\sqrt{13}\,km/h$

مثـــــال: طريقـان يلتقيـان في (P) والزاوية بينهما $\left(\frac{\pi}{3}\text{rad}\right)$ يقع بيت على أحدهما ويبعد $(3\,\text{km})$ عن النقطة (P) يسير رجل على الطريق الآخر مقتربـاً من (P) بســـرعـة $(6\,\text{km/h})$ ما معدل اقتراب الرجل من البيت عندما يبعد الرجل عن (P) مسافة $(4\,\text{km})$.

$$\frac{-15}{\sqrt{13}}\ \text{km/h}$$

مثـــــال: طريقـان يميـل أحـدهمـا عن الآخر بزاوية $\left(\frac{\pi}{3}\text{rad}\right)$ يلتقيان في (m) وتسير سيارة على أحدهما بسرعة $(60\ \text{km/h})$ مقتربة من (m) وعلى الطريق الآخر تسير دراجة بسرعة $(80\ \text{km/h})$ مقتربة من النقطة (m). في الساعة الثامنة كانت السيارة والدراجة على بُعد $(100\,\text{km})$ و (120km) من النقطة (m) ما معدل اقترابهما من بعضهما في الساعة التاسعة.

$$\frac{2(100-x)^1\left(-\frac{dx}{dt}\right)+2(120-y)^1\left(-\frac{dy}{dt}\right)-(100-x)\left(-\frac{dy}{dt}\right)+(120-y)\left(-\frac{dx}{dt}\right)}{2\sqrt{(100-x)^2+(120-y)^2-(100-x)(120-y)}}$$

الحـــركة الدائـــرية

السرعة الزاوية

$$w = \frac{d\theta}{dt} = \frac{\theta}{t}$$

$$\theta = n * 2\pi$$

(n: عدد الدورات، 2π: الدورة كاملة)

حفظ

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{n * 2\pi}{t}$$

مثال تمهيدي: جد $\frac{d\theta}{dt}$ لكل مما يلي:

تدور عجلة دراجة بسرعة :

(1) عشر دورات في الدقيقة:

20π rad / min

---

(2) عشرين دورة في الدقيقة:

40π rad / min

---

(3) عشرين دورة في دقيقتين:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{20 * 2\pi}{2} = 20\pi \text{ rad / min}$$

(4) عشرين دورة في (4) دقائق:

10π rad / min

---

(5) عشرين دورة في نصف دقيقة:

80π rad / min

---

(6) دورة واحدة في دقيقتين:

π rad / min

---

(7) نصف دورة في الدقيقة:

π rad / min

فصبرًا في مجالِ العِلم صبرًا

فما نيلُ المُنى سهلُ المُرادِ

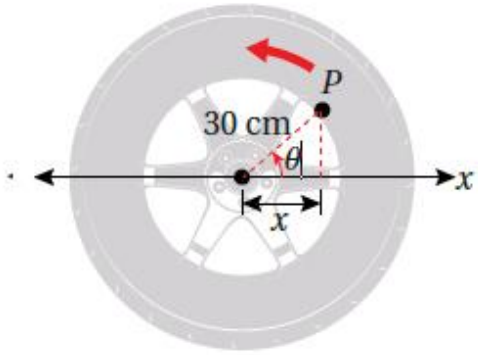
مثـــــال: أنشـــئت منـارة على جزيرة صـــغيرة وتبعد مســـافة $(2\,\mathbf{km})$ عن أقرب نقطة على ساحل مستقيم ، إذا كان مصباح المنارة يُكمل (3) دورات في الدقيقة ، جد ســـرعة تحرك بقعة الضـــوء على خط الســـاحل عند نقطة تبعد مســـافة $(4\,\mathbf{km})$ عن أقرب نقطة إلى المنارة.

60π **km / min**

مثال كتاب : أنشـــئت منارة على جزيرة صغيرة بحيث كانت على مستوى سطح البحر وهي تبعد مسافة $(3\,\mathbf{km})$ عن أقرب نقطة على ساحل مستقيم ، إذا كان مصباح المنارة يُكمل (4) دورات في الدقيقة ، جد سرعة تحرك بقعة الضوء على خط الساحل عند نقطة تبعد مسافة $(1\,\mathbf{km})$ عن أقرب نقطة إلى المنارة.

$\frac{80\pi}{3}$ **km / min**

سـؤال: عجلة سـيارة طول نصـف قطرهـا الـداخلي $(30\ \text{cm})$ وهي تـدور بمعـدل (10) دورات في الثانية. رسـمت النقطة (P) على حافة العجلة كما في الشكل المجاور.

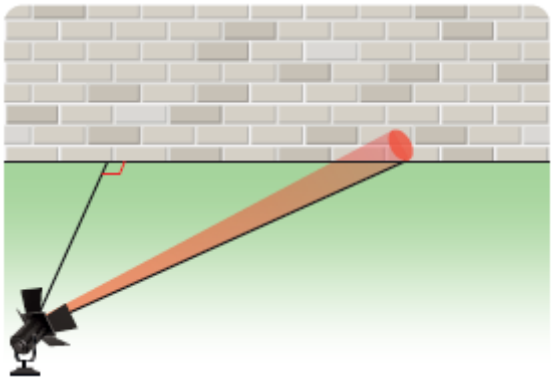


1. أجد $\frac{dx}{dt}$ بدلالة θ.
2. أجد $\frac{dx}{dt}$ عندما $\theta = \frac{\pi}{4}$.

$-600\pi \sin\theta$

$-\frac{600\pi}{\sqrt{2}}\ \text{cm/s}$

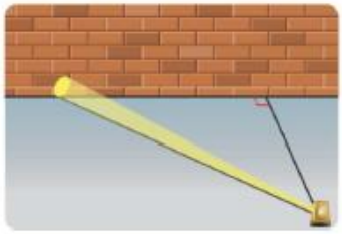
مثـــال: يدور مصباح مُثبت بالأرض حول نفسه (3) دورات في الدقيقة ، ويبعد مسافة (4m) عن جدار مستقيم كما في الشكل المجاور. جحد سرعة تحرك بقعة ضوء المصباح على الجدار عندما تكون على بعد (8m) من اقرب نقطة إلى المصباح على الجدار أثناء حركتها مبتعدة عن هذه النقطة.



120π

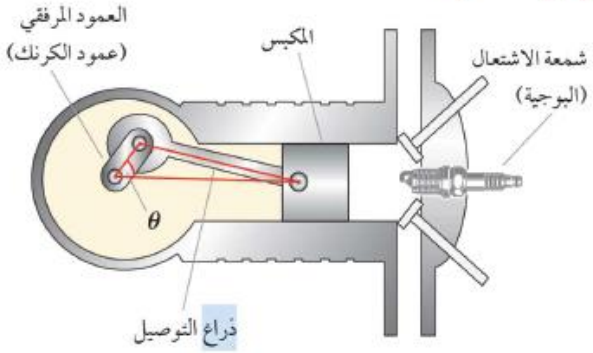
مثال:

يدور مصباح مثبت بالأرض حول نفسه 4 دورات في الدقيقة ، ويبعد مسافة 3m عن جدار مستقيم كما في الشكل المجاور. جد سرعة تحرك بقعة ضوء المصباح على الجدار عندما تكون على بعد 1m من أقرب نقطة إلى المصباح على الجدار أثناء حركتها مقتربة من هذه النقطة.



$-\frac{80\pi}{3}$

مثال كتاب : يُبين الشـــكل الآتي مُحرك سيارة يحتوي على ذراع توصيل طولها $(7\ \text{in})$ ، وهي مُثبتة بعمود مرفقي طوله $(3\ \text{in})$. إذا دار العمود المرفقي عكس اتجاه دوران عقارب الساعة (200) دورة في الدقيقة ، فما سرعة المكبس عندما $\left(\theta = \frac{\pi}{3}\right)$.

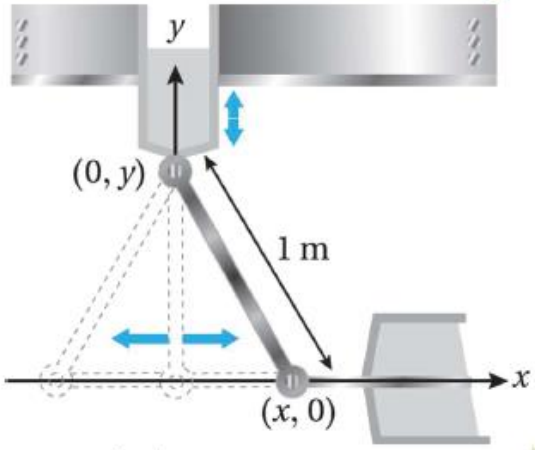


$$\frac{-9600\sqrt{3}\,\pi}{13}$$

مثـــــال:

يُبين الشكل المجاور ذراعاً معدنية متحركة طولها $(1\,\mathrm{m})$ وإحداثيات نهايتيها $(x\,,0)$ و $(0\,,y)$.

ويُمثل الاقتران $x(t)=\frac{1}{2}\sin\frac{\pi t}{6}$ ، موقع طرف الذراع على المحور (x) ، حيث (t) الزمن بالثواني:

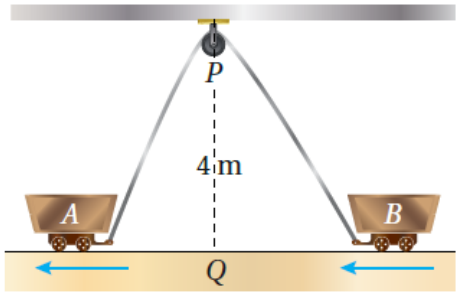


(a) أجد أعلى نقطة على المحور (y) يصـــلها طرف الذراع.

(b) أجد ســـرعة طرف الذراع الواقع على المحور (y) عندما يكون الطرف الأخر عند النقطة $\left(\frac{1}{4},0\right)$.

$\frac{-\pi}{24\sqrt{5}}\,\mathrm{m/s}$ $(0,1)$

26 **تبريـــر:** رُبِطت العربتان A و B بحبل طوله 12 m، وهو يمرُّ بالبكرة P كما في الشـــكل المجاور. إذا كانت النقطة Q تقع على الأرض بين العربتين أســـفل P مباشـــرة، وتبعد عنها مســـافة 4 m، وكانت العربة A تتحـــرَّك بعيدًا عن النقطة Q بســـرعة 0.5 m/s، فأجد ســـرعة اقتراب العربة B من النقطة Q في اللحظة التي تكون فيها العربة A على بُعْد 3 m من النقطة Q، مُبرِّرًا إجابتي.



$$-\frac{21}{10\sqrt{33}}\ \text{m/s}$$

27 **تبرير:** يركض عَدّاء في مضمار دائري، طول نصف قُطْره 100 m، بسرعة ثابتة مقدارها 7 m/s، ويقف صديقه على بُعْد 200 m من مركز مضمار الركض. أجد مُعدَّل تغيُّر المسـافة بين العَدّاء وصديقه عندما تكون المسافة بينهما 200 m.

تنبيه: أجد جميع الحلول المُمكِنة.

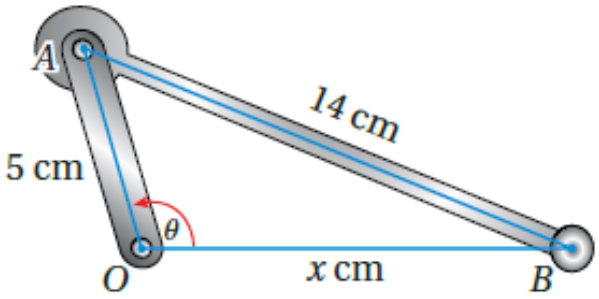
إذن، عندما تكون المسافة بين العدائين 200 m، فإنهما يقتربان من بعضهما أو يتباعدان عن بعضهما بسرعة مقدارها $\frac{7\sqrt{15}}{4}$ m/s

تدريبات :

1)

فـــي المُخطَّط الآتي، تُمثِّل $\overline{AB}$ ذراع توصيل مكبس طولها **14 cm** في مُحرِّك ســـيّارة، وتُمثِّل $\overline{OA}$ عمـــودًا مرفقيًّا طوله **5 cm**، وهو مُثبَّت بطرف ذراع التوصيل، ويدور حول النقطة O التي تبعد مسافة x **cm** عن المكبس.

أجد ســـرعة دوران العمود المرفقي عندمـــا يكون المكبس على بُعْـــد **11 cm** من النقطة O، ويتحرَّك مُقتربًا منها بسرعة مقدارها **120 cm/s** في تلك اللحظة.



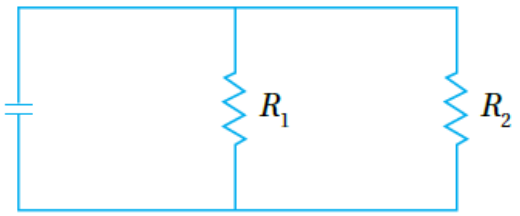
≈ 32.5 rad/s

(2

علوم: يُمثِّل الاقتران: $T(x) = \frac{200}{1+x^2}$ درجة الحرارة (بالسليسيوس) التي يشعر بها شخص على بُعْد x مترًا من النار. إذا كان الشخص يبتعد عن النار بمُعدَّل $2\ \text{m/s}$، فأجد سرعة تغيُّر درجة الحرارة التي يشعر بها الشخص عندما يكون على بُعْد $5\ \text{m}$ من النار.

$-5.9\ °\text{C}/s$

(3



كهرباء: تعطى المقاومة المكافئة R بالأوم (Ω) للمقاومتين R_1 و R_2 الموصولتين على التوازي، كما في الشكل المجاور، بالعلاقة الآتية:

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}$$

إذا كانت R_1 و R_2 تزدادان بمُعدَّل $0.3\ \Omega/s$ و $0.2\ \Omega/s$ على الترتيب، فأجد مُعدَّل تغيُّر R عندما $R_1=80\ \Omega$، و $R_2=100\ \Omega$.

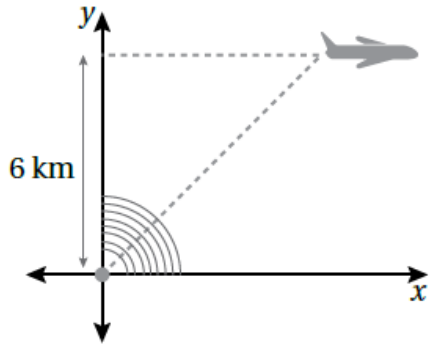
$\approx 0.132\ \Omega/s$

(4

ضـــوء: مصباح مُثبَّت بالأرض، وهو يضيء على جدار يبعد عنه مســـافة 12 m. إذا ســـار رجل طوله 2 m من موقع المصباح إلى الجدار بسرعة 1.6 m/s، فأجد مُعدَّل تغيُّر طول ظلِّه على الجدار عندما يكون على بُعْد 4 m من الجدار.

$-0.6\ \mathrm{m/s}$

(5



حلَّقت طائرة على ارتفاع 6 km، ومَرَّت في أثناء تحليقها مباشرة فوق رادار كما في الشـــكل المجاور. وعندما أصبح البُعْـــد بينها وبين الرادار 10 km، رصـــد الرادار مُعدَّل تغيُّر البُعْد بينه وبيـــن الطائرة، فكان 300 km/h. أجد سرعة الطائرة في هذه اللحظة.

375 km/h

6 إذا كانت θ الزاوية المحصورة بين الضلعين اللذين طول كلٍّ منهما s في مثلث متطابق الضلعين، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

1 أُثبِت أنَّ مساحة المثلث تعطى بالمعادلة: $A = \frac{1}{2} s^2 \sin\theta$.

2 إذا كانت الزاوية θ تزداد بمُعدَّل $\frac{1}{2}$ rad/min، فأجد مُعدَّل تغيُّر مساحة المثلث عندما $\theta = \frac{\pi}{6}$، علمًا بأنَّ طول الضلعين المتطابقين ثابت.

$\frac{\sqrt{3}}{8} s^2$

7 يتحرَّك جُسَـيْم على منحنى الاقتران: $f(x)=\frac{10}{1+x^2}$. إذا كان مُعدَّل تغيُّر الإحداثي x هو $3\ \text{cm/s}$، فأجد مُعدَّل تغيُّر الإحداثي y عندما $x=20$.

$\approx -0.007\text{cm/s}$

(8

مُلِئَ بالون كروي بالهيليوم بمُعدَّل $8\ \text{cm}^3/\text{s}$. أجد مُعدَّل تغيُّر نصف قُطْر البالون في كلٍّ من الحالات الآتية:

1. عندما يكون طول نصف قُطْره $12\ \text{cm}$.
2. عندما يكون حجمه $36\ \pi\ \text{cm}^3$ (أُقرِّب إجابتي إلى أقرب جزء من مئة).
3. إذا مُلِئَ مدَّة $33.5\ \text{s}$.

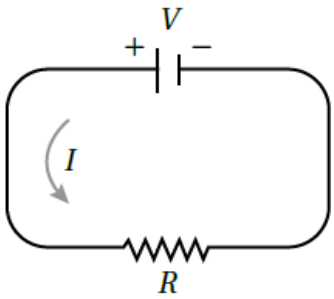
1) $\frac{1}{72\pi}\ \text{cm/s}$ ..2) $\frac{2}{9\pi}\ \text{cm/s}$ .. 3) $\frac{1}{8\pi} \approx 0.04\ \text{cm/s}$

(9

تحرَّكت السـيّارة A والسيّارة B في الوقت نفسه، ومن النقطة نفسها، بحيث اتَّجَهت السيّارة A نحو الشـمال بسرعة $45\ km/h$، واتَّجَهت السـيّارة B نحو الشرق بسرعة $40\ km/h$. أجد مُعدَّل تغيُّر البُعْد بين السيّارتين بعد ساعتين من انطلاقهما.

$\approx 60.21\ km/h$

(10



تُمثِّـل المعادلـة: $V = IR$ جُهْد الـدارة الكهربائيـة (بالفولت) المُبيَّنة في الشـكل المجاور، حيث I شِـدَّة التيار بالأمبير، وR المقاومة بالأوم. إذا كان جُهْد الدارة يزداد بمُعدَّل 1 volt/s، وشِـدَّة التيار تقل بمُعدَّل $\frac{1}{3}$ amp/s ، فأجد مُعدَّل تغيُّر R عندما $V = 12$، و$I = 2$.

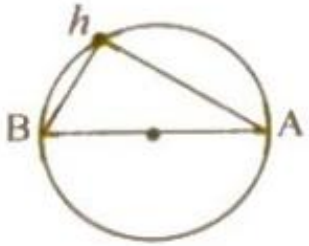
$1.5\ \Omega/s$

ورقـــة عـــمـــل (1)

1) مثلث متساوي الساقين ، طول قاعدته ثابت ويساوي 8 cm ، إذا كان طول كل من ساقيه يتناقص بمعدل 3cm/s . جد معدل التغيّر في مساحة المثلث عند اللحظة التي يكون فيها كلاً من الساقين مساوياً لطول القاعدة.

2) AB قطعة مستقيمة طولها 8cm ، يتحرك طرفها A على محور x الموجب ، بينما يتحرك طرفها B على محور y الموجب بحيث تزيد الزاوية ABO (O نقطة الأصل) بسرعة $\frac{1}{20}\text{rad}/\text{s}$.
احسب معدل تغيّر مساحة المثلث ABO عندما تكون A على بعد 4cm من نقطة الأصل O .

2006 (9 علامات)



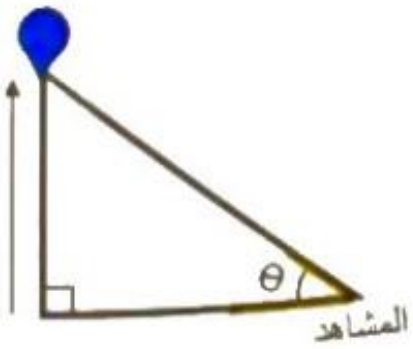
3) الشكل المجاور $\overline{AB}$ قطر في دائرة طوله 20 cm تتحرك النقطة h على القوس $\overset{\frown}{AB}$ بحيث يزيد قياس الزاوية hBA بمعدل $3^\circ/\text{min}$.
احسب معدل التغيّر مساحة المثلث ABh عندما يكون قياس $hBA = \frac{\pi}{3}$

2007 (9 علامات)

4) يرتكز سلم طوله 5m بطرفه العلوي على حائط رأسي وبطرفه السفلي على أرض أفقية. تحرك الطرف السفلي مبتعداً عن الحائط بمعدل $\frac{1}{5}m/s$ ، جد معدل هبوط الطرف العلوي للسلم عندما يكون قياس الزاوية بين السلم والأرض $\frac{\pi}{3}$.

2007 (9 علامات)

5) يرتفع بالون رأسياً للأعلى بسرعة ثابتة، ويتم رصده من مشاهد على الأرض يبعد 160 m . عن المسقط الرأسي للبالون على الأرض، إذا كانت Θ هي زاوية ارتفاع نظر المشاهد للبالون ، وكان معدل تغيّر Θ يساوي $\frac{1}{10}rad/min$ في اللحظة التي كان فيها ارتفاع البالون عن سطح الأرض 200 m ، جد سرعة ارتفاع البالون.



6) مخروط قائم رأسه للأسفل، زاوية رأسه ثابتة وتساوي $60°$ ينساب منه الماء في فتحة في رأسه، إذا علمت أن معدل تناقص مساحة سطح الماء $4\ cm^2/s$. جد معدل التغير في حجم الماء عندما يصبح قطر الماء فيه $16\ cm$.

7) رجل طوله $180\ cm$ يقف أمام مصباح كهربائي يرتفع عن الأرض $540\ cm$ ، أخذ الرجل بالاقتراب من المصباح بمعدل $300\ cm/s$. جـد معدل التغير في الزاوية بين العمود الذي يحمل المصباح والشعاع الواصل بين المصباح ورأس الرجل عندما يكون الرجل على بُعد $180\ cm$ من قاعدة المصباح.

8) انطلق شخص من النقطة A متجهاً شمالاً راكباً دراجة هوائية تسير بسرعة $6\ m/s$ ، وبعد $30\ s$ ومن النقطة B الواقعة على بُعد $300\ m$ شرق A انطلق شخص ثانٍ متجهاً جنوباً راكباً دراجة هوائية تسير بسرعة $5\ m/s$ جد معدل تغير المسافة بين الدراجتين بعد $20\ s$ من انطلاق الدراجة الثانية .

9) صندوق معدني على شكل متوازي مستطيلات طوله مثلي عرضه وارتفاعه 3 أمثال عرضه. يتمدد بالحرارة محافظاً على شكله بحيث يزداد حجمه بمعدل $72\ cm^3/s$. جد معدل التغير في مساحة سطحه الكلي عندما يكون طوله $36\ cm$.

10) **l و m طريقان مستقيمان متعامدان في النقطة C . تقع محطة وقود على الطريق m وتبعد $12\ km$ عن نقطة التقاطع C . إذا تحركت سيارة على الطريق l بسرعة $26\ km/h$ في اتجاه نقطة التقاطع C ، فما معدل تغير المسافة بين السيارة ومحطة الوقود عندما تكون السيارة على بعد $5\ km$ من نقطة التقاطع؟**

a) $-4\ km/h$

b) $-10\ km/h$

c) $10\ km/h$

d) $4\ km/h$

2023 (4 علامات)

11) مثلث متطابق الضلعين طول كل من ضلعيه المتطابقين 10 cm، وقياس الزاوية بينهما θ .
إذا تغيّرت θ بمعدل $\frac{\pi}{60}$ rad/min ، فإن معدل تغيّر مساحة المثلث عندما $\theta = \frac{\pi}{3}$ هو:

a) $\frac{5\pi}{6}$ cm²/min

b) $\frac{\pi}{6}$ cm²/min

c) $\frac{5\pi}{12}$ cm²/min

d) $\frac{\pi}{12}$ cm²/min

2023 (10 علامات)

12) يتساقط الرمل من شاحنة متوقفة على أرض مستوية بمعدل $2\ cm^3/s$ فيتشكل منه مخروط قائم ارتفاعه مساوٍ لطول قطر قاعدته. جد معدّل التغيّر في مساحة السطح الجانبية للمخروط المتشكل في اللحظة التي يكون فيها ارتفاع المخروط يساوي 12 cm .

كل مسألة تحمل في طياتها فرصة لتحدي عقلك وتحقيق النجاح.

""تعلم المعدلات المرتبطة بالزمن ليس مجرد فهم للرياضيات، بل هو خطوة نحو تنمية مهاراتك التحليلية.

""بالتركيز والإصرار، ستتمكن من حل أصعب المسائل. فقط تذكر أن المثابرة هي مفتاح التفوق.

""كل خطوة في حل المعادلات تقربك من فهم أعمق. لا تتوقف حتى تصل!

""الرياضيات تعلمك التفكير المنطقي. كل مرة تحل فيها مسألة، تبني لبنة جديدة في معرفتك.

""أنت قادر على التغلب على أي تحدٍ. استمر في التعلم وسترى النتائج!

"اجعل من هذا الدرس فرصة لتطوير قدراتك واستمتع برحلة التعلم

محبكم : الأستاذ عبد الحميد سعدي