الدرس 4

الاشتقاق الضمني
Implicit Differentiation

فكرة الدرس

إيجاد مشتقات العلاقات الضمنية.

تمييز الضمني

تكون العلاقة ضمنية عندما
لا نستطيع جعل y موضع للقانون .
او يصعب جعل y موضع للقانون
على شكل y=f(x)

شكل السؤال

1) تكون (y) لها قوة مثلا $\sqrt{y}, y^5$

2) تكون (x) مرتبطة في (y) مثلا $x^2y, \frac{x}{y^5}$

3) تكـــون الزاويـــة (y) لـــ sin أو cos مـــثلا $\sin y, \cos\sqrt{y}$

خطوات الاشتقاق الضمني

1) نشتق طرفي العلاقة (المعادلة) بالنسبة للمتغير x مراعياً قواعد الاشتقاق.

2) أينما نشتق y نراعي استخدام قاعدة السلسلة (نضرب بـ $\frac{dy}{dx}$) (او y')

3) نفصل جميع الحدود التي تحتوي على $\frac{dy}{dx}$ على جهة اليسار، والتي لا تحتوي على الجهة الأخرى.

4) نخرج $\frac{dy}{dx}$ عامل مشترك ونقسم على قوس المعامل

الناجحون والفاشلون لا يختلفون كثيرا في قدراتهم
انما يختلفون كثيرا في رغبتهم في تحقيق الهدف

مثال

أجد $\frac{dy}{dx}$ لكلٍّ ممّا يأتي:

1 $x^2 + y^2 = 4$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

---

2 $\sin x + \cos y = 2x - 3y$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2 - \cos x}{3 - \sin y}$$

تدريب

أجد $\frac{dy}{dx}$ لكلٍّ ممّا يأتي:

a) $x^2 + y^2 = 13$

$$-\frac{x}{y}$$

---

b) $2x + 5y^2 = \sin y$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2}{10y - \cos y}$$

مثال

جد $\frac{dy}{dx}$ للمعادلة $\sin x + \sin y = x + y$

$\frac{1 - \cos x}{\cos y - 1}$

مثال

أجد $\frac{dy}{dx}$ لكلٍّ ممّا يأتي:

1 $2xy - y^3 = 1$

$\frac{dy}{dx} = \frac{-y^2 \sin x - \cos(x+y)}{\cos(x+y) - 2y\cos x}$

$-\frac{2y}{2x - 3y^2}$

2 $\sin(x+y) = y^2 \cos x$

تدريب

جد مشتقة $\cos(x+2y) = y^2 \sin 2x$

$$\frac{2y^2 \cos 2x + \sin(x+2y)}{-2\sin(x+2y) - 2y \sin 2x}$$

تدريب : جد مشتقة كل من

a) $\tan(x-y) = 2xy^3 + 1$

$$\frac{\sec^2(x-y) - 2y^3}{6xy^2 + \sec^2(x-y)}$$

b) $3xy^2 + y^3 = 8$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3y^2}{6xy + 3y^2}$$

ملاحظة

يفضل في الاشتقاق الضمني التخلص من الجذور والكسور

مثال

جد مشتقة $y = \sqrt{x + yx}$

$$\frac{y+1}{2y-x}$$

مثال

جد $\frac{dy}{dx}$ عند النقطة $(1, 2)$ للعلاقة $\frac{(x^2+1)}{y+2} = \frac{x}{y}$

0

مثال

أجد $\frac{dy}{dx}$ لكلٍّ ممّا يأتي:

1 $y^2 = \frac{x-1}{x+1}$

$$\frac{1}{y(x+1)^2}$$

2 $x^2 = \frac{x-y}{x+y}$

$$\frac{y-x(x+y)^2}{x}$$

بالعزيمة و الإصرار كلُّ ما تحلمُ بهِ سيكونُ واقعاً

مثال

جد مشتقة $e^{(xy)} = 1 + \ln y$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-e^{xy}y}{xe^{xy} - \frac{1}{y}}$$

مثال

جد $\frac{dy}{dx}$ للعلاقة $3^y = x + y$

$$\frac{1}{3^y \ln 3 - 1}$$

وزاري

إذا علمت أن $x = \sqrt{y^2 + 3y}$ جد

$\frac{dy}{dx}$ عندما $x = 2$

$$\frac{4}{5} \text{ , } -\frac{4}{5}$$

مثال

إذا كان $\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}=10$ ، حيث $x>0\ ,\ y>0$ ، فأثبت أن $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}$

يمكن الإثبات بثلاث طرق:

- الاشتقاق المباشر
- تربيع الطرفين
- توحيد الأساس

مثال

إذا علمت أن $xy=(x+y)^4$

أثبت أن $\frac{dy}{dx}=\frac{y(3x-y)}{x(x-3y)}$

أمثلة و تدريبات

أجد $\frac{dy}{dx}$ لكلٍّ ممّا يأتي:

1. $x^2 - 2y^2 = 4$

$\frac{x}{2y}$

2. $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{10}$

$-\frac{y^3}{x^3}$

3. $(x^2 + y^2)^2 = 50(x^2 - y^2)$

$\frac{25x - x^3 - xy^2}{yx^2 + y^3 + 25y}$

4. $e^x y = xe^y$

$\frac{e^y - ye^x}{e^x - xe^y}$

5. $3^x = y - 2xy$

$\frac{2y + 3^x \ln 3}{1 - 2x}$

6 $\sqrt{x}+\sqrt{y}=5$

$\frac{-\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$

7 $x=\sec\frac{1}{y}$

$-y^2\cos\frac{1}{y}\cot\frac{1}{y}$

8 $(\sin\pi x+\cos\pi y)^2=2$

$\frac{\cos\pi x}{\sin\pi y}$

9 $\frac{x}{y^2}+\frac{y^2}{x}=5$

$\frac{y}{2x}$

12 $\sin x \cos y = x^2 - 5y$

$$\frac{\cos x \cos y - 2x}{\sin x \sin y - 5}$$

أجد y' لكلٍّ ممّا يأتي عند القيمة المعطاة:

1 $2y^2 + 2xy - 1 = 0, x = \frac{1}{2}$

$$-\frac{1}{3}$$

$$-\frac{2}{3}$$

10 $x + y = \cos(xy)$

$$-\frac{1 + y \sin xy}{x \sin xy + 1}$$

---

11 $x^2 + y^2 = \ln(x + y)^2$

$$\frac{1 - x^2 - xy}{xy + y^2 - 1}$$

2 $y^3 + 2x^2 = 11y,\ y = 1$

$= \frac{-\sqrt{5}}{2}$

$= \frac{\sqrt{5}}{2}$

تدريب

أجد $\frac{dy}{dx}$ لكلٍّ ممّا يأتي:

1 $x^3 y^3 = 144$

$-\frac{y}{x}$

2 $xy = \sin(x + y)$

$\frac{-y + \cos(x+y)}{x - \cos(x+y)}$

3 $y^4 - y^2 = 10x - 3$

$\frac{5}{2y^3 - y}$

4 $x \sin y - y \cos x = 1$

$\frac{\sin y + y \sin x}{\cos x - x \cos y}$

معادلة المماس لمنحنى علاقة ضمنية

مثال

أجد ميل مماس منحنى العلاقة:

$$e^{2x}\ln y = x + y - 2$$

عند النقطة $(1, 1)$.

ثم جد معادلة المماس عند (1,1)

$$\left(\frac{1}{e^2-1}\right)x - \left(\frac{1}{e^2-1}\right) + 1$$

5 $\cot y = x - y$

$-\tan^2 y$

---

6 $\sqrt{xy} + x + y^2 = 0$

$$-\frac{y + 2\sqrt{xy}}{x + 4y\sqrt{xy}}$$

مثال

أجد ميل مماس منحنى العلاقة:

$y^2 = x$ عندما $x = 4$.

$\frac{dy}{dx}|_{(4,-2)} = -\frac{1}{4}$ $\frac{dy}{dx}|_{(4,2)} = \frac{1}{4}$

تدريب

a) أجد ميل مماس منحنى العلاقة:

$y^2 = \ln x$ عند النقطة $(e, 1)$.

$\frac{1}{2e}$

b) أجد ميل مماس منحنى العلاقة:

$(y-3)^2 = 4(x-5)$

عندما $x = 6$.

ثم جد معادلة المماس عند X=6

Y=-x+7

y=x-1

مثال

أجد معادلة المماس لمنحنى العلاقة:

$x^2 - xy + y^2 = 7$ عند النقطة $(-1, 2)$.

$$y = \frac{4}{5}x + \frac{14}{5}$$

تدريب

أجد معادلة المماس لمنحنى العلاقة:

$x^3 + y^3 - 3xy = 17$ عند النقطة $(2, 3)$.

$$y = -\frac{1}{7}x + \frac{23}{7}$$

تدريب : جد ميل المماس لمنحنى كل علاقة مما يأتي عند النقطة المعطاة

1. $x^2 + y^2 = 25, (3, -4)$

$\frac{3}{4}$

2. $x^2 y = 4(2 - y), (2, 1)$

$-\frac{1}{2}$

3. $e^{\sin x} + e^{\cos y} = e + 1, \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

0

4. $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = 5, (8, 1)$

$-\frac{1}{2}$

تدريب : جد معادلة المماس لمنحنى كل علاقة عند النقطة المعطاة

1. $x^2 + xy + y^2 = 13, (-4, 3)$

$y = \frac{5}{2}x + 13$

2. $x + y - 1 = \ln(x^2 + y^2), (1, 0)$

$y = x - 1$

3. $x^2 + 3xy + y^2 = x + 3y, (2, -1)$

$y = -1$

4. $xe^y + y \ln x = 2, (1, \ln 2)$

$y = \left(-1 - \frac{1}{2}\ln 2\right)x + 1 + \frac{3}{2}\ln 2$

5 $4xy = 9\ ,\ \left(1, \frac{9}{4}\right)$

$y = -\frac{9}{4}x + \frac{9}{2}$

---

6 $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{8} = 1\ ,\ (1, 2)$

$y = -2x + 4$

مثال

أجد معادلة العمودي على المماس لمنحنى العلاقة: $(x-6)(y+4) = 2$ عند النقطة $(7, -2)$.

$y = \frac{1}{2}x - \frac{11}{2}$

مثال

أُثبِت أنَّ لمنحنى العلاقة: $3x^2 + 2xy + y^2 = 6$ مماسين أفقيين، ثم أجد إحداثيي نقطتي التماس.

للمنحنى مماسان أفقيان عند النقطتين $(-1,3),(1,-3)$

تدريب

أجد معادلة العمودي على المماس

لمنحنى العلاقة: $(x+y)^3 = x^2 + y$

عند النقطة $(1, 0)$.

$y = 2x - 2$

مثال

أجد إحداثيي نقطة على المنحنى: $x + y^2 = 1$،

بحيث يكون عندها مماس المنحنى

موازيًا للمستقيم: $x + 2y = 0$.

$(0,1)$

بالعزيمة و الإصرار كلُّ ما تحلمُ بهِ سيكونُ واقعاً

مثال

أجـــد إحداثيي نقطة (نقاط) على المنحنى: $y^3 = x^2$، بحيث يكون عندها مماس المنحنى عموديًّا على المســـتقيم: $y + 3x - 5 = 0$، حيث: $y \neq 0$.

$(8,4)$

مثال

أجد إحداثيات جميع النقاط على منحنى الدائرة: $x^2 + y^2 = 100$، التي يكون عندها ميل المماس $\frac{3}{4}$.

هناك نقطتان تحققان المطلوب هما $(6,-8), (-6,8)$

مثال

إذا كان $y = \ln x$ ، حيث: $x > 0$،

فأُثبِت أنَّ $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$

باستعمال الاشتقاق الضمني.

مثال

إذا كانت العلاقة: $x^3 + y^3 = 6xy$،

فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

1 أجد معادلة المماس عند نقطة تقاطع منحنى المعادلة مع منحنى $y = x$ في الربع الأوَّل.

$y = -x + 6$

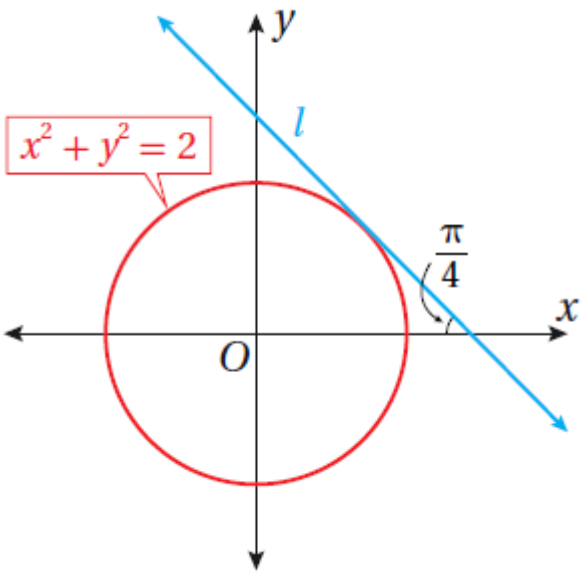
2 أجد إحداثيي نقطة على منحنى العلاقة في الربع الأوَّل، بحيث يكون عندها مماس المنحنى أفقيًّا.

$\left(\sqrt[3]{16}, \frac{1}{2}\sqrt[3]{(16)^2}\right)$

مثال

يُبيِّن الشكل المجاور منحنى العلاقة: $x^2 + y^2 = 2$، والمستقيم l الذي يُمثِّل مماسًّا لمنحنى العلاقة في الربع الأوَّل

أجد معادلة المستقيم l.



$y = -x + 2$

مثال

إذا مثَّـل l أيَّ مماس لمنحنى المعادلة:

$\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{k}$، حيث k عدد حقيقي موجب

فأُثبِت أنَّ مجموع المقطع x والمقطع y للمستقيم l يساوي k، مُبرِّرًا إجابتي.

مثال

أجد إحداثيي النقطة الواقعة في الربع الأوَّل

على منحنى العلاقة: $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$

التي يكون ميل المماس عندها -0.5

$(\sqrt{0.4},\sqrt{8.1})$

مثال

أجـــد نقطتي تقاطع منحنى العلاقـــة:

$x^2+xy+y^2=7$ مع المحور x،

ثم أُثبِت أنَّ مماســـي منحنى العلاقة

عند هاتين النقطتين متوازيان.

$P_1=(\sqrt{7},0), P_2=(-\sqrt{7},0)$

مثال

إذا كان: $x^2 - y^2 = 1$،

فأُجيب عن الأسئلة الأربعة الآتية تباعًا:

1 أجد $\frac{dy}{dx}$.

$\frac{x}{y}$

2 يُمكِن التعبير عن منحنى العلاقة: $x^2 - y^2 = 1$ بالمعادلة الوسيطية: $x = \sec t, y = \tan t$،

حيث: $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$

أستعمل هذه الحقيقة لإيجاد $\frac{dy}{dx}$ بدلالة t.

$\frac{\sec t}{\tan t}$

3 أُثبِت أنَّ المقدارين الجبريين اللذين يُمثِّلان $\frac{dy}{dx}$ الناتجين في الفرعين السابقين متكافئان، مُبرِّرًا إجابتي.

4 أجد إحداثيات النقاط التي يكون عندها ميل المماس لمنحنى العلاقة 2

$\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

المشتقة الثانية للعلاقات الضمنية

مثال

إذا كان: $2x^3 - 3y^2 = 8$، فأجد $\frac{d^2y}{dx^2}$.

$$\frac{2xy^2 - x^4}{y^3}$$

تدريب

إذا كان: $xy + y^2 = 2x$، فأجد $\frac{d^2y}{dx^2}$.

$$\frac{2xy - 4x + 2y^2 - 8}{(x + 2y)^3}$$

وزاري

جد $\frac{d^2y}{dx^2}$ للعلاقة $2x^3 - 3y^2 = 8$

$\frac{2xy^2 - x^4}{y^3}$

تدريب

جد $\frac{d^2y}{dx^2}$ للعلاقة $x^2 + y^2 = 2xy + 1$

عند $(1, 2)$

0

وزاري

إذا علمت أن $x = \tan 3y$ جد $\frac{d^2y}{dx^2}$

عندما $y = \frac{\pi}{12}$

$-\frac{1}{6}$

وزاري

إذا علمت أن $\cos y - xy = 2x$

أثبت أن

$$y''(x + \sin y) + y'(2 + y' \cos y) = 0$$

وزاري

إذا علمت أن $x + y = \sin y$

أثبت أن $(y')^2 = y''(\cot y - \csc y)$

تدريب

أجد $\frac{d^2y}{dx^2}$ لكلٍّ ممّا يأتي:

1. $x + y = \sin y$

$$\frac{\sin y}{(-1+\cos y)^3}$$

---

2. $4y^3 = 6x^2 + 1$

$$\frac{y^3 - 2x^2}{y^5}$$

4 $x^2 y - 4x = 5$

$$-\frac{16}{x^3} + \frac{6y}{x^2}$$

3 $xy + e^y = e$

$$\frac{2yx + 2ye^y - y^2e^y}{(x + e^y)^3}$$

5 $x^2 + y^2 = 8$

$$-\frac{8}{y^3}$$

6 $y^2 = x^3$

$$\frac{12xy^2 - 9x^4}{4y^3}$$

المشتقة الثانية للمعادلات الوسيطية

إذا علمت أن $x = h(t)$, $y = g(t)$

فإن: $$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

ثم $$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}$$

حيث $$\frac{dx}{dt} \neq 0$$

التعليل: لأنه سيتم الاشتقاق الضمني بالنسبة لـ t

النجاح ليس صدفة بل إنه عمل شاق

مثال

أجد $\frac{d^2y}{dx^2}$ للمعادلة الوسيطية الآتية عندما $t = 1$:

$x = t^3 + 3t^2, y = t^4 - 8t^2$

$\frac{4}{27}$

تدريب

أجد $\frac{d^2y}{dx^2}$ للمعادلة الوسيطية الآتية عندما $t=2$:

$$x=3t^2+1, y=t^3-2t^2$$

$\frac{1}{24}$

تدريب

أجد $\frac{d^2y}{dx^2}$ لكل معادلة وسيطية ممّا يأتي عند قيمة t المعطاة:

1. $x=\sin t, y=\cos t, \ t=\frac{\pi}{4}$

$-2\sqrt{2}$

2 $x = e^{-t}\ ,\ y = t^3 + t + 1, t = 0$

تدريب

إذا علمت أن

$$y = e^{2t} + t \quad , \quad x = t^2 + 5t$$

جد $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=1}$

$$\frac{8te^{2t} + 16e^{2t} - 2}{(2t+5)^3}$$

1

تدريب

(2023)

جد $\frac{d^2y}{dx^2}$ للمعادلة الوسيطية عندما $t = 1$

$x = t^3 - 3t^2 + 1 \ , \ y = t^2 + 2$

تدريب

إذا كان $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2t}$, $\frac{dy}{dx} = 3t^2$

فإن $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=2}$ تساوي

a) 2 b) 8 c) 12 d) 48

ورقـــة عـــمـــل (4)

1) إذا علمت أن $y - x = \cos y$ أثبت أن

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = -\frac{d^2y}{dx^2}(\sec y + \tan y)$$

2) مستخدماً اللوغاريتم جد $\frac{dy}{dx}$ للاقتران

$$y = \sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x^2}} \quad , \quad x \in R - \{1, -1\}$$

3) جد مشتقة $y^x + 1 = e^y - x$

4) جد مشتقة $\sin(x+y)^2 = x + y$

5) إذا علمت أن $xe^y = 1 + e^y$ أثبت أن

$$y'' = e^{2y}$$

6) إذا علمت أن $e^{xy} = x - y$ أثبت أن

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - xy + 1}{x^2 - xy + 1}$$

7) إذا علمت أن

$$(x-y)^4 + (y-x)^4 = 32, \quad x \neq y$$

فـإن $\frac{dy}{dx}$ تساوي:

a) 1 b) 4 c) -1 d) -4

8) إذا علمت أن $\frac{dy}{dx} = 3n^2$ ، $\frac{dx}{dn} = \frac{1}{2n}$

فإن $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{n=2}$ تساوي:

a) 2 b) 8 c) 12 d) 48

9) إذا علمت أن $x = \sin 2y$ حيث $y \in \left(0 , \frac{\pi}{2}\right)$ فـإن $2\frac{d^2y}{dx^2}\cos^3 2y$ تساوي:

a) $\frac{1}{2}x$ b) x c) 0 d) 2x

10) إذا علمت أن $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(y^2)$

فـإن $\frac{dy}{dx}$ يساوي:

a) $\frac{y}{x}$ b) $\frac{y}{3x}$ c) $\frac{x}{y}$ d) $\frac{x}{3y}$

11) إذا علمت أن $f(y+1) = x^3$ ، وكان $f(5) = 8 \ , f'(5) = 4$ فإن $\frac{dy}{dx}\Big|_{y=4}$ تساوي:

a) 4 b) 3 c) 12 d) 48

12) جد النقطة على المنحنى $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 3$ بحيث $\frac{dy}{dx} = -2$

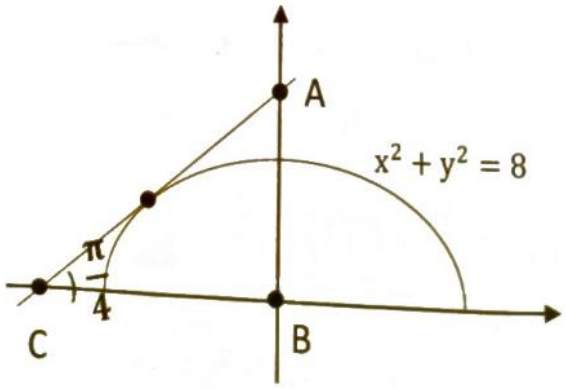
13) إذا علمت أن $x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$ جد $\frac{d^2y}{dx^2}$ عند $(2 , 0)$

14) إذا علمت أن $f(y^2) = xy$ ، $f'(4) = 3$ جد $\frac{dy}{dx}$ عند $(2 , 2)$

15) إذا علمت أن $x = \sin 3t$ $y = \cos 3t$ جد $\frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{t=\frac{\pi}{3}}$

16) جد جميع النقط الواقعة على منحنى $x^2 + y^2 - 2y = 67$ والتي يكون المماس عند تلك النقطة ميله يساوي 4

17) احسب مساحة المثلث ABC الموضح بالشكل التالي:



18)

إذا علمت أن $x = a(\cos\theta + \theta\sin\theta)$

$y = a(\sin\theta - \theta\cos\theta)$ ، حيث $a \neq 0$

أثبت أن $a\,\theta\,\frac{d^2y}{dx^2} = \sec^3\theta$

كل شيء سيكون على ما يرام
لكن بعد أن تأخذ نصيبك من
التعب ، الأشياء التي تأتي بسهولة
لا قيمة لها