الدرس 3

قاعدة السلسلة
The Chain Rule

أفكار الدرس

* إيجاد مشتقات اقترانات مركبة باستخدام قاعدة السلسلة .
* الاستعمال المتكرر لقاعدة السلسلة لاقترانات مركبة بزاوية وأس .
* إيجاد مشتقة المعادلات الوسيطية .

أولاً :

قاعدة السلسلة والاقترانات المشهورة.

قاعدة

$$(f\circ g)'(x)=\left(f\left(g\left(x\right)\right)\right)'=f'\left(g\left(x\right)\right)g'\left(x\right)$$

$$(g\circ f)'(x)=\left(g\left(f\left(x\right)\right)\right)'=g'\left(f\left(x\right)\right)f'\left(x\right)$$

أي: مشتقة الخارج مع بقاء الداخل مضروبا في مشتقة الداخل .

إنّ التوهّج يليق بك جداً

نتائج القاعدة

$$\frac{d}{dx}\left(\sin g(x)\right)=\cos\left(g(x)\right)\times g'(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left(\cos g(x)\right)=-\sin\left(g(x)\right)\times g'(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left(\tan g(x)\right)=\sec^2\left(g(x)\right)\times g'(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left(\csc g(x)\right)=-\csc\left(g(x)\right)\cot\left(g(x)\right)\times g'(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left(\sec g(x)\right)=\sec\left(g(x)\right)\tan\left(g(x)\right)\times g'(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left(\cot g(x)\right)=-\csc^2\left(g(x)\right)\times g'(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left(e^{(g(x))}\right)=e^{g(x)}\times g'(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left(\ln g(x)\right)=\frac{g'(x)}{g(x)}$$

جـد مشتقة ما يلي:

1) $f(x)=\sin(x^2+5x+1)$

$\cos(x^2+5x+1)(2x+5)$

2) إذا كان $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ جد $f'\left(\frac{1}{2}\right)$

$\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$

$f(x) = e^{(x^3+\sin x+1)}$ (3

$(3x^2+\cos x)e^{(x^3+\sin x+1)}$

4) إذا علمت أن

$$y = \ln\left(\frac{x^3}{3}+\frac{5}{2}x^2+6x+1\right)$$

جد قيم x التي يكون عندها المماس أفقي

x = -2 , -3

5) جد مشتقة

$$f(x) = \sin 5x - \cos 3x + e^{x^2}$$

$5\cos 5x + 3\sin 3x + 2x\,e^{x^2}$

6) إذا كان $f(x) = \ln(x^2+2x+5)$

جد $f''(1)$

0

7) إذا علمت أن $y = \ln\left(\frac{1+e^x}{1-e^x}\right)$

جـــد $\frac{dy}{dx}$

$\frac{e^x}{1+e^x}+\frac{e^x}{1-e^x}$

تدريب : اكتب المشتقة في الجدول التالي

$f\ (x)$	$f'(x)$
$x^2 + e^{\tan x}$	
$xe^{\tan x}$	
$\sec \sqrt{x}$	
$\ln \sqrt{(\sin x + \cos x)}$	
$\sin(e^x + 1)$	

تدريب ؟

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

1 $f(x) = e^{4x+2}$

$4e^{4x+2}$

2 $f(x) = 50e^{2x-10}$

$100e^{2x-10}$

3 $f(x) = \cos(x^2 - 3x - 4)$

$(3-2x)\sin(x^2-3x-4)$

4 $f(x) = 10x^2 e^{-x^2}$

$20xe^{-x^2}(1-x^2)$

5 $f(x) = x^2 \tan \frac{1}{x}$

$-\sec^2 \frac{1}{x} + 2x \tan \frac{1}{x}$

6 $f(x) = 3x - 5\cos(\pi x)^2$

$3 + 10\pi^2 x \sin(\pi x)^2$

7 $f(x) = e^{\sin 2x} + \sin(e^{2x})$

$2e^{\sin 2x}\cos 2x + 2e^{2x}\cos(e^{2x})$

تدريب :

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

1 $f(x) = 100e^{-0.1x}$

$-10e^{-0.1x}$

2 $f(x) = \sin(x^2 + 1)$

$2x\cos(x^2+1)$

❸ $f(x) = \cos 2x - 2\cos x$

$-2\sin 2x + 2\sin x$

---

❹ $f(x) = \dfrac{\sin(2x+1)}{e^{x^2}}$

$\dfrac{2\cos(2x+1) - 2x\sin(2x+1)}{e^{x^2}}$

---

❺ $f(x) = \ln(x^3 + 2)$

$\dfrac{3x^2}{x^3+2}$

مثال

أجد معادلة المماس لكل اقتران

ممّا يأتي عند قيمة x المعطاة:

1) $f(x) = 4e^{-0.5x^2}\ , x = -2$

$y = \frac{8}{e^2}x + \frac{20}{e^2}$

---

2) $f(x) = x + \cos 2x\ , x = 0$

$y = x + 1$

مثال :

إذا كان: $A(x) = f(g(x))$، وكان: $g'(5) = 6$,

$f'(-2) = 4, f'(5) = 3, g(5) = -2$

$f(-2) = 8$، فأجـــد $A'(5)$.

24

تدريب

أجد معادلة المماس لكل اقتران

ممّا يأتي عند قيمة x المعطاة:

1) $y = 2\sin 5x - 4\cos 3x, x = \frac{\pi}{2}$

$y = -12x + 6\pi + 2$

2) $f(x) = \tan 3x, x = \frac{\pi}{4}$

$y = 6x - \frac{3\pi}{2} - 1$

لا تأتي الامور على قدر حلمك إنما على قدر سعيك اليها

مثال

إذا كان الاقتران: $y = e^{ax}$، حيث a ثابت، و$a > 0$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

1) أجد إحداثيي النقطة P التي تقع على منحنى الاقتران، ويكون ميل المماس عندها 1.

$P\left(\frac{-\ln a}{a}, \frac{1}{a}\right)$

2) أُثبِت أنَّه يُمكِن كتابة معادلة العمودي على المماس عند النقطة P في صورة: $x + y = k$، ثم أجد قيمة الثابت k.

$\frac{1 - \ln a}{a}$

سعيًا إلى العلياءِ نُنفقُ عمرنا
لا بُدّ للسّاعينَ ثَمّ وُصولُ!"

مثال

أجد المشتقة العليا المطلوبة

1) $f(x) = \sin \pi x \,, f'''(x)$

$-\pi^3 \cos \pi x$

---

2) $f(x) = \cos(2x+1), f^{(5)}(x)$

$-32\sin(2x+1)$

---

3) $f(x) = \cos x^2, f''(x)$

$-4x^2 \cos x^2 - 2\sin x^2$

مثال

إذا كان الاقتران: $f(x) = e^{2x} + e^{-2x}$،

فأُثبِت أنَّ $f''(x) = 4f(x)$.

مثال

إذا كان الاقتران: $y = e^{\sin x}$،

فأجد ميل مماس منحنى الاقتران

عند النقطة $(0, 1)$.

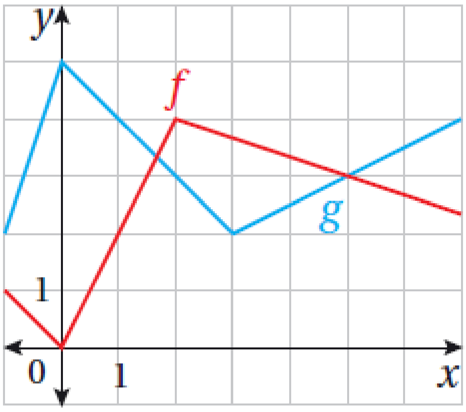
1

مثال :

يُبيِّن الشكل المجاور منحنيي الاقترانين $f(x)$ و $g(x)$. إذا كان:

$h(x) = f(g(x))$، وكان: $p(x) = g(f(x))$،

فأجد كُلًّا ممّا يأتي:



1) $h'(1)$

$\frac{1}{3}$

2) $p'(1)$

-2

مثال :

إذا كان الاقتران: $y = \ln(ax + b)$،

حيث a و b ثابتان موجبان، وكان ميل

المماس لمنحنى الاقتران عند النقطة

P هو 1، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

1) أُثبِت أنَّ الإحداثي x للنقطة P أقل من 1

المقدار $\left(1 - \frac{b}{a}\right)$ أقل من 1 لأن $\frac{b}{a}$ مقدار موجب كون a, b موجبين.

إذن، الإحداثي x للنقطة P أقل من 1

2) أجد قيمة كلٍّ من a و b، علمًا بأنَّ P هي النقطة $(0, 2)$، ثم أُبرِّر إجابتي.

$a = b = e^2$

---

3) أجد إحداثيي النقطة التي يكون عندها ميل المماس $\frac{1}{2}$

$(1,\ 2 + \ln 2)$

يُمثِّل الاقتران: $s(t) = \ln(t^2 - 2t + 1.9), t \geq 0$

موقع جُسَـيْم يتحرَّك في مسـار مسـتقيم،

حيث s الموقع بالأمتار، وt الزمن بالثواني:

1) أجد سرعة الجُسَيْم وتسارعه بعد t ثانية.

$\frac{-2t^2 + 4t - 0.2}{(t^2 - 2t + 1.9)^2}$

---

2) أجد موقع الجُسَيْم وتسارعه عندما تكون سرعته صفرًا.

$\approx 2.2 \text{ m/s}^2$

3) متى يعود الجُسَيْم إلى موقعه الابتدائي؟

يعود الجسيم إلى موقعه الابتدائي بعد ثانيتين من بدء حركته.

مثال

تتحرَّك كرة مُعلَّقة بزنبرك إلى الأعلى وإلى الأسـفل، ويُحدِّد الاقتران: $s(t) = 0.1 \sin 2.4t$ موقع الكرة عند أيِّ زمن لاحق، حيث t الزمن بالثواني، وs الموقع بالسنتيمترات:

1) أجد سرعة الكرة عندما $t = 1$.

$\approx -0.177 \text{ cm/s}$

لا تَقنَطَنَّ مِنَ النَجاحِ لِعَثرَةٍ

ما لا يَنالُ اليَومَ يُدرَكُ في غَدِ.

2) أجد موقع الكرة عندما تكون سرعتها صفرًا.

عندما تكون سرعة الكرة صفرًا يكون موقعها عند 0.1cm أو −0.1 cm

3) أجد موقع الكرة عندما يكون تسارعها صفرًا.

عندما يكون تسارع الكرة صفرًا يكون موقعها عند $s = 0$، أي عند مرورها بموقع الاتزان.

مثال

يُمثِّل الاقتران: $A(t) = Ne^{0.1t}$ عدد الخلايا البكتيرية بعد t ساعة في مجتمع بكتيري:

1) أجد مُعدَّل نمو المجتمع بعد 3 ساعات بدلالة الثابت N.

$0.1Ne^{0.3}$

2) إذا كان مُعدَّل نمو المجتمع بعد k ساعة هو 0.2 خلية لكل ساعة، فما قيمة k بدلالة الثابت N؟

$k = 10 \ln \frac{2}{N}$

مثال :

إذا كان: $f(x) = \sin 4x + \cos 4x$،

فأُثبِت أنَّ $f''(x) + 16f(x) = 0$.

تدريب

يُمثِّل الاقتران: $v(t) = 15t\,e^{-0.05t^2}$

ســـرعة (بالمتر لكل ثانية) ســـيّارة تتحرَّك

في مســـار مســـتقيم، حيث:

$0 \le t \le 10$. أجد سرعة السيّارة عندما

يكون تسارعها صفرًا.

$\frac{15\sqrt{10}}{\sqrt{e}}$ m/s

ثانياً : أقواس مركبة بأس

مشتقة قوس له قوة سلسلة القوة (قوس)^{ن}

$$\frac{d}{dx}(g(x))^n = n(g(x))^{n-1} * g'(x)$$

$$\text{مشتقة (قوس)}^n = n\left(\text{القوس نفسه}\right)^{n-1} * \text{مشتقة ماداخل القوس}$$

مثال : جد مشتقة كل مما يلي

1. $f(x) = \sqrt[3]{(x^2-1)^2}$

$\frac{4x}{3\sqrt[3]{x^2-1}}$

تدريب : جد مشتقة كل من

a) $f(x) = \sqrt[5]{(x^2-1)^2}$

$\frac{4x}{5\sqrt[5]{(x^2-1)^3}}$

b) $f(x) = \sqrt{\cos x}$

$\frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}}$

c) $f(x) = (\ln x)^5$

$\frac{5(\ln x)^4}{x}$

إنّ التوهّج يليق بك جداً

2 $f(x) = \tan^4 x$

$4\tan^3 x \times \sec^2 x$

3 $f(x) = \sqrt{\ln x}$

$\frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$

تذكر

أتعلَّم

إذا كان $g(x)$ اقترانًا قابلًا للاشتقاق، فإنَّ:

$\left(\sqrt{g(x)}\right)' = \frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}$.

مثال : جد مشتقة كل مما يلي

1. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{x}}$

$$-\frac{-1}{2x^2\sqrt{1+\frac{1}{x}}}$$

2. $f(x) = (\ln x)^4$

$$\frac{4}{x}(\ln x)^3$$

3. $f(x) = \sin\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{\sin x}$

$$\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\cos\sqrt[3]{x} + \frac{\cos x}{3\sqrt[3]{\sin^2 x}}$$

4. $f(x) = \sqrt[5]{x^2 + 8x}$

$$\frac{2x+8}{5\sqrt[5]{(x^2+8x)^4}}$$

5. $f(x) = \left(\dfrac{\sin x}{1+\cos x}\right)^2$

$$\frac{2\sin x}{(1+\cos x)^2}$$

مثال إذا كان: $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$، فأثبت أنَّ

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}}.$$

تدريب : جد مشتقة كل مما يلي

❶ $f(x)=\cos^2 x$

$-\sin 2x$

❷ $f(x)=2\cot^2(\pi x+2)$

$-4\pi\cot(\pi x+2)\csc^2(\pi x+2)$

❸ $f(x)=\left(\frac{x^2}{x^3+2}\right)^2$

$\frac{8x^3-2x^6}{(x^3+2)^3}$

❹ $f(x)=x^2\sqrt{20-x}$

$\frac{80x-5x^2}{2\sqrt{20-x}}$

تدريب

إذا كان $f(x) = (\ln x)^5$ جد $f'(e)$

$\boxed{\frac{5}{e}}$

مثال :

إذا كان $f'(2) = 3, f(2) = 2$

$g(x) = (f(x))^3$ فجد $g'(2)$

36

ثالثاً الاستعمال المُتكرِّر لقاعدة السلسلة

بأن يكون هنالك تركيب في الزاوية والأس

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

مثال : جد مشتقة كل مما يلي

1. $f(x) = e^{\csc 4x}$

$-4e^{\csc 4x} \csc 4x \cot 4x$

2. $f(x) = \sin\left(\tan\sqrt{3x^2+4}\right)$

$$\frac{3x\cos(\tan\sqrt{3x^2+4}) \times \sec^2\sqrt{3x^2+4}}{\sqrt{3x^2+4}}$$

ضاعف جهودك إن أردت وصولا

واصبر فمازال الطريق طويلاً

3 $f(x) = \tan^4(\sec(\cos x))$

$-4\tan^3(\sec(\cos x))\sec^2(\sec(\cos x))\sec(\cos x)\tan(\cos x)\sin x$

تدريب : جد مشتقة كل مما يلي

a) $f(x) = \cos^2(7x^3 + 6x - 1)$

$-(21x^2+6)\sin 2(7x^3+6x-1)$

b) $f(x) = (2 + (x^2+1)^4)^3$

$24x(x^2+1)^3(2+(x^2+1)^4)^2$

c)

إذا كان $f(x) = \sin^3 5x^2$ جد $f'(x)$

$30x \cos 5x^2 (\sin 5x^2)^2$

لا تأتي الامور على قدر حلمك إنما على قدر سعيك اليها

رابعاً

قاعدة السلسلة مركبة بالقواعد الأساسية

1) إذا علمت أن $f(x) = e^{-0.2x} \sin 4x$

جد ميل المماس لمنحنى $f(x)$

عندما $x = \frac{\pi}{8}$

$-0.2e^{\frac{-\pi}{40}}$

---

2) جد مشتقة $f(x) = e^{\sin x} \times \tan 2x$

$\boxed{y' = e^{\sin x}\left(\cos x \tan(2x) + 2\sec^2(2x)\right)}$

3) جد ميل العمودي على المماس لمنحنى الاقتران $f(x) = \frac{\cos^2 x}{e^{2x}}$

عندما $x = \frac{\pi}{2}$

ميل العمودي غير معرف اي ان العمودي على المماس عند تلك النقطةy يوازي محور

تدريب جد ميل المماس لمنحنى الاقتران

$f(x) = (2x+1)^5(x^3 - x + 1)^4$

عندما $x = 1$

2754

4) إذا علمت أن $f(1) = -4$

$f'(1) = 2\ ,\ g(x) = \sqrt[4]{(x^2 - x + 1)^3}$

جــد $\left(\frac{f}{g}\right)'_{(1)}$

5

تعتبر قاعدة الجذر التربيعي من قاعدة سلسلة القوة:

$$f(x) = \sqrt{g(x)} = (g(x))^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(g(x))^{\frac{-1}{2}} \times g'(x)$$

$$= \frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}$$

$$= \frac{\text{مشتقة ما داخل الجذر}}{2\sqrt{g(x)}}$$

5) جد معادلة المماس لمنحنى

$f(x) = \sqrt{x+1}\sin\frac{\pi x}{2}$ عندما $x = 3$

$\boxed{y = -0.25x - 1.25}$

تحدٍّ: أجد $\frac{dy}{dx}$ لكلٍّ ممّا يأتي:

1) $y = \sqrt{\sin\sqrt{x}}$

$\frac{\cos\sqrt{x}}{4\sqrt{x}\sin\sqrt{x}}$

2) $y = e^{x} \sin^{2} x \cos x$

$-e^{x} \sin^{3} x + 2e^{x} \cos^{2} x \sin x + e^{x} \cos x \sin^{2} x$

مثال

طرحت إحدى الشركات منتجاً جديداً في الأسواق ثم رصدت عدد القطع المبيعة منذ طرحه، إذا مثّل الاقتران $N(t) = \dfrac{250000t^2}{(2t+1)^2}$, $t > 0$

N: عدد القطع المبيعة منذ طرحه

t: الزمن بالأسابيع

a) جد معدل تغيّر عدد القطع بالنسبة للزمن

$\dfrac{500000\,t}{(2t+1)^{3}}$

B) أجد $N'(52)$.

22

أمثلة و تدريبات

1) جد معادلة المماس للاقتران

$$f(x) = (x^2 + 2)^3 \,, x = -1$$

$y = -54x - 27$

مثال أجد مشتقة

$$f(x) = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)^3 \left(x + \frac{1}{x}\right)^2$$

$$-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)^2\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(\frac{8+5x+4x^2+x^3}{x^4}\right)$$

مثال

إذا كان: $f(x) = 3\sin x - \sin^3 x$،

فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

1. أُثبِت أنَّ $f'(x) = 3\cos^3 x$.

2. أجد $f''(x)$.

$-9\cos^2 x \sin x$

مثال

إذا كان: $h(x) = \sqrt{4 + 3f(x)}$،

وكان: $f(1) = 7, f'(1) = 4$،

فأجد $h'(1)$.

$\frac{6}{5}$

مثال

أجد $(f \circ g)'(x)$ عند قيمة x المعطاة

❶ $f(u) = u^5 + 1,$

$u = g(x) = \sqrt{x} \quad , x = 1$

$\frac{5}{2}$

❷ $f(u) = u + \frac{1}{\cos^2 u},$

$u = g(x) = \pi x, \quad x = \frac{1}{4}$

5π

تدريب

أجد ميل العمودي على المماس

لمنحنى الاقتران: $f(x) = \left(\frac{3x-1}{x^2+3}\right)^2$

عندما $x = 0$.

$\frac{-2}{3}$

تدريب

تُحسَب قيمة بدل الخدمة لأحد المُنتَجات بالدينار باستعمال الاقتران: $U(x) = 80\sqrt{\frac{2x+1}{3x+4}}$، حيث x عدد القطع المَبيعة من المُنتَج:

a) أجد مُعدَّل تغيُّر قيمة بدل الخدمة بالنسبة إلى عدد القطع المَبيعة من المُنتَج.

$\frac{200}{(3x+4)^2}\sqrt{\frac{3x+4}{2x+1}}$

b) أجد $U'(20)$، مُفسِّرًا معنى الناتج.

0.061

خامساً : مشتقة $a^{(g(x))}$

نظرية

إذا كان a عددًا حقيقيًّا موجبًا، و $a \neq 1$، وكان $g(x)$ اقترانًا قابلًا للاشتقاق، فإنَّ:

$$\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \times \ln a$$

$$\frac{d}{dx}(a^{g(x)}) = \ln a \times a^{g(x)} \times g'(x)$$

مثال

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

1) $f(x) = 8^{5x}$

$(5\ln 8)8^{5x}$

2) $f(x) = 6^{x^2}$

$(2x\ln 6)\,6^{x^2}$

3) $f(x) = e^{3x} + 2^{3x}$

$3e^{3x} + (3\ln 2)2^{3x}$

تدريب

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

a) $f(x) = \pi^{\pi x}$

$\pi^{\pi x+1}\ln\pi$

b) $f(x) = 6^{1-x^3}$

$(-3x^2 \ln 6)6^{1-x^3}$

c) $f(x) = e^{4x} + 4^{2x}$

$4e^{4x} + (2\ln 4)4^{2x}$

d) $f(x) = \frac{3^{2x}}{x}$

$\frac{(-1+2x\ln 3)3^{2x}}{x^2}$

e) $f(x) = 2^{-x}\cos \pi x$

$-\pi\, 2^{-x}\sin \pi x - 2^{-x}(\cos \pi x)\ln 2$

f) $f(x) = 3^{\cot x}$

$-(3^{\cot x}\ln 3)\csc^2 x$

مثال أجد معادلة المماس لـ

$$f(x) = 2^x \,, x = 0$$

$y = (\ln 2)x + 1$

مثال يُمكِن نمذجة الكمية A (بالغرام) المتبقية من عيِّنةٍ كتلتها الابتدائية 20 g من عنصر البلوتونيوم بعد t يومًا باستعمال الاقتران: $A(t) = 20\left(\frac{1}{2}\right)^{t/140}$. أجد مُعدَّل تحلُّل عنصر البلوتونيوم عندما $t = 2$.

≈ -0.098

تدريب :

1) جد مشتقة $f(x) = 5^{7x}$

$5^{7x} \times \ln 5 \times 7$

2) جد مشتقة $y = 3^{(x^2+2x+1)}$

$3^{(x^2+2x+1)} \times \ln 3 \times (2x+2)$

---

3) جد مشتقة $f(x) = e^{x^2} \times 2^{(5x)}$

$5\ln(2)\ 2^{(5x)}\ e^{x^2} + 2^{(5x+1)}\, x\, e^{x^2}$

---

4) جد معادلة المماس لمنحنى $f(x) = 2^{(x^2)}$ عندما $x = 2$

$(y - 16) = 64\ln 2(x - 2)$

فـــكـــرّ

جد مشتقة $f(x) = \frac{3^{x^2} . 9^{2x}}{27^{3-x}}$

$f'(x) = (7+2x)\ 3^{x^2+7x-9} \cdot \ln(3)$

تدريب إذا علمت أن $f(x) = 2^{-x} \cos \pi x$

جـد $f'\left(\frac{1}{2}\right)$

$-\frac{\pi}{\sqrt{2}}$

ملاحظة

يمكن تبسيط الأس بأخذ $e^{\ln(\text{المقدار})}$

$$y = x^x = e^{\ln(x^x)}$$

سؤال: اثبت أن

$$\frac{d}{dx}(a^{g(x)}) = \ln a \times a^{g(x)} \times g'(x)$$

تحفيزُك لذاتِك هو أحد أسبَاب النّجاح ، إن العَالم يفسَح الطَريق للمرء الذي يعرِف إلى أين هُو ذاهب ..

سادساً مشتقة $\log_a g(x)$

نظرية

إذا كان a عددًا حقيقيًّا موجبًا، و $a \neq 1$،
وكان $g(x)$ اقترانًا قابلًا للاشتقاق، فإنَّ:

$$\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x \ln a}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\log_a g(x)\right) = \frac{g'(x)}{(\ln a)g(x)}$$

مثال

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

1) $f(x) = \log \cos x$

$-\frac{\tan x}{\ln 10}$

2) $f(x) = \log_2\left(\frac{x^2}{x-1}\right)$

$\frac{2}{(\ln 2)\, x} - \frac{1}{(\ln 2)\,(x-1)}$

تدريب

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

a) $f(x) = \log \sec x$

$\frac{\tan x}{\ln 10}$

b) $f(x) = \log_8 (x^2 + 3x)$

$\frac{2x+3}{(x^2+3x)\ln 8}$

c) $f(x) = \frac{10 \log_4 x}{x}$

$\frac{10 - 10\ln 4 \log_4 x}{x^2 \ln 4}$

d) $f(x) = \log_3 \dfrac{x\sqrt{x-1}}{2}$

$\dfrac{1}{x\ln 3} + \dfrac{1}{2(x-1)\ln 3}$

---

e) $f(x) = \log 2x$

$\dfrac{1}{x\ln 10}$

تدريب

1) جد مشتقة $f(x) = \log(\sin x)$

حيث $\sin x > 0$

$\dfrac{\cot x}{\ln 10}$

---

2) جد مشتقة $f(x) = \log_3\left(\dfrac{x^2}{x^2-1}\right)$

$\dfrac{2x}{(\ln 3)(x^2)} - \dfrac{2x}{(\ln 3)(x^2-1)}$

---

3) جد مشتقة x $f(x) = x\log_3 x$ ، حيث $x > 0$

$\log_3 x + \dfrac{1}{\ln 3}$

---

4) إذا علمت أن $f(x) = \log(x^2+2x+3)$

جد $f''(x)$

$\dfrac{-2x^2-4x+2}{\ln 10\,(x^2+2x+3)^2}$

5) إذا علمت أن

$$f(x) = \log(x^2 + 5x + a)$$

حيث $a \in R$ ، $f'(1) = 4$ ، فجد a

$$\frac{7}{4\ln 10} - 6$$

تدريب إذا علمت أن

$f(x) = log_3(1 + x\ln x)$ جد $f'(x)$

حيث $x > 1$

$$\boxed{\frac{\ln(x)+1}{\ln 3\,(x\ln x + 1)} = f'(x)}$$

النجاح ليس صدفة بل إنه عمل شاق

تذكّر

$$1)\ \log(g(x)) = \log_{10}(g(x))$$

$$2)\ \log_a(g(x)) = \frac{\ln g(x)}{\ln a}$$

سؤال: أثبت أنّ :

$$\frac{d}{dx}(\log_a g(x)) = \frac{g'(x)}{(\ln a)g(x)}$$

سابعاً مشتقة المعادلات الوسيطية

تسمى العلاقة بالعلاقة الوسطية إذا كانت على شكل

$y = g(t)$ ، $x = h(t)$ حيث t المتغير الوسيط

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \quad , \quad \frac{dx}{dt} \neq 0$$

مثال جد مشتقة المعادلة الوسطية عندما $t = \frac{\pi}{2}$

$$x = \cos t \quad , \quad y = \sin 2t$$

2

مثال

أجد معادلة مماس منحنى المعادلة الوسيطية الآتية عندما $t = \frac{\pi}{4}$:

$$x = 2 \sin t , \quad y = 3 \cos t$$

$$0 \leq t \leq 2\pi$$

$$2y + 3x = 6\sqrt{2}$$

تدريب

أجد معادلة مماس منحنى المعادلة الوسيطية الآتية عندما $t=\frac{\pi}{4}$:

$$x=\sec t\ ,\qquad y=\tan t$$

$$-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$$

$y=\sqrt{2}x-1$

تدريب

أجد معادلة المماس لمنحنى كل معادلة وسيطية ممّا يأتي عند النقطة المُحدَّدة بقيمة t المعطاة:

1) $x=t+2,\ y=t^2-1,\ t=1$

$y=2x-6$

2) $x=\frac{t}{2},\ y=t^2-4,\ t=-1$

$y=-4x-5$

4 $x = \sec^2 t - 1, y = \tan t, t = -\frac{\pi}{4}$

$$y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

3 $x = t - \sin t, y = 1 - \cos t, t = \frac{\pi}{3}$

$$y = \sqrt{3}x - \frac{\sqrt{3}\pi}{3} + 2$$

مثال يعطى منحنى بالمعادلة الوسـيطية:

$x = 2(t - \sin t), y = 2(1 - \cos t)$.

حيث: $0 \leq t \leq 2\pi$. أُثبِت أنَّ ميل المماس وميل العمودي على المماس لمنحنى هذه العلاقة عندما $t = \frac{\pi}{4}$ هما: $1 + \sqrt{2}$، و$1 - \sqrt{2}$ على الترتيب.

مثال يعطى منحنى بالمعادلة الوسيطية:

$x = t^2 , y = 2t$:

1 أجد $\frac{dy}{dx}$ بدلالة t.

$\frac{1}{t}$

---

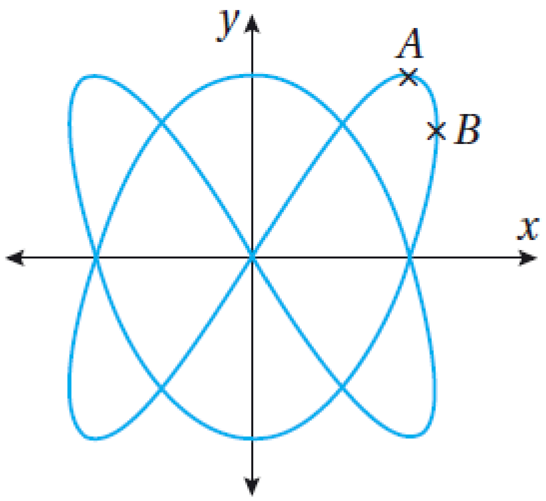
2 أجد معادلة العمودي على مماس المنحنى عند النقطة $(a^2 , 2a)$.

$y = -ax + a^3 + 2a$

3 أُثبِت أنَّ مساحة المثلث المُكوَّن من العمودي على المماس، والمحورين الإحداثيين، هي $\frac{1}{2}|a|\,(2+a^2)^2$

تحدٍّ: يُبيِّن الشكل المجاور منحنى المعادلة الوسيطية:

$$x=\sin 2t,\qquad y=\sin 3t,\qquad 0\le t\le 2\pi$$



1 إذا كان مماس منحنى المعادلة أفقيًّا عند النقطة A الواقعة في الربع الأوَّل، فأجد إحداثيي A.

$\left(\frac{\sqrt{3}}{2},1\right)$

2 إذا كان مماس المنحنى موازيًا للمحور y عند النقطة B، فأجد إحداثيي B.

$\left(1, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

3 إذا مَرَّ فرعان من المنحنى بنقطة الأصل كما هو مُوضَّح في الشكل، فأجد ميل المماس لكلٍّ منهما عند هذه النقطة.

$\frac{-3}{2}$

مثال يعطى منحنى بالمعادلة الوسـيطية:
$x = a\cos t, y = b\sin t$،
حيث: $0 \le t \le 2\pi$.
أجد المقطع y لمماس المنحنى عندما $t = \frac{\pi}{4}$ بدلالة a و b.

$y = \sqrt{2}b$

تدريب يعطى منحنى بالمعادلة الوسيطية:

$x = \sin^2\theta, y = 2\cos\theta$،

حيث: $0 \le \theta \le 2\pi$:

1. أجد $\frac{dy}{dx}$ بدلالة θ.

$-\sec\theta$

2. أجد معادلة المماس عندما يكون الميل $\sqrt{2}$.

$y = \sqrt{2}x - \frac{3}{\sqrt{2}}$

3. أجد النقطة التي يكون عندها المماس موازيًا للمحور y.

$(1,0)$

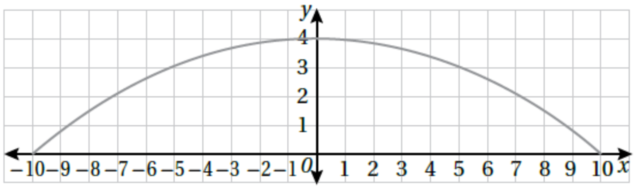
إن كل تراه في الحياة عظيمًا كان نتيجة صبر، ومثابرة، واجتهاد:

مثال

يُبيِّـن التمثيل البياني المجاور شـكل مَطَبٍّ سرعةٍ صُمِّم للتخفيف من سرعة السيّارات على أحـد الطرق. وفيه يُمثِّل المحور x سـطح الأرض، وتقاس جميع الأطوال بالسنتيمترات.

إذا كانت المعادلة الوسيطية التي تُمثِّل منحنى المَطَبِّ هي: $x = 10 \sin t,\ y = 2 + 2 \cos 2t$،

حيث: $-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}$، فأجد:



1 ميل المماس لمنحنى المَطَبِّ بدلالة t.

$-\frac{4}{5}\sin t$

2 قيمة t عند أعلى نقطة على منحنى المَطَبِّ.

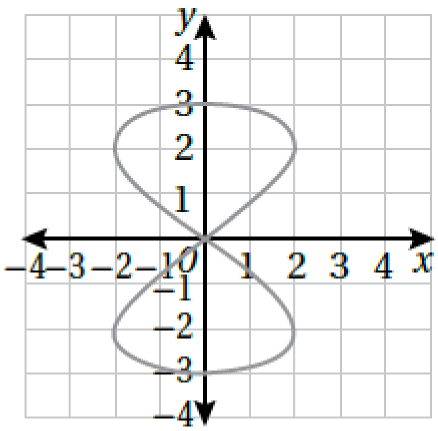
$t = 0$

مثال

يُبيِّن الشكل المجاور منحنى المعادلة الوسيطية:

$$x = 2 \sin 2t\ ,\ y = 3 \cos t$$

$$0 \le t \le 2\pi$$



أجد ميل المماس لمنحنى المعادلة عند نقطة الأصل، مُبرِّرًا إجابتي.

ورقـــــة عمـــل (3)

السؤال الأول

من الجدول التالي أجب عن الأسئلة $(1-3)$:

x	f(x)	f′(x)	g(x)	g′(x)
-1	2	3	2	-3
2	6	4	1	-5

1) $(f \circ g)'_{(-1)}$ تساوي:

a) -12 b) 8 c) 4 d) -20

2) إذا كان $L(x) = \left(2g(x)\right)^2$ فإن $L'(2)$ تساوي:

a)-40 b) -24 c) -48 d) -12

3) إذا كان $m(x) = g^2(x)$ فإن $m'(2)$ تساوي:

a) 4 b) -6 c) -10 d) -12

4) إذا علمت أن $f(x) = \sin^2 3x$

فـــإن $f'\left(\frac{\pi}{12}\right)$ تساوي:

a) 3 b) 0 c) $\sqrt{2}$ d) 1

5) إذا علمت أن
$g(x) = x^2 - 1$ ، $f(x) = c\tan x$
وكان $(g \circ f)'_{\left(\frac{\pi}{4}\right)} = 4$ ، فإن c تساوي:

a) ± 2 b) ± 1 c) ± 4 d) $\pm\sqrt{2}$

ميل مماس أحد فرعي المنحنى عند نقطة الأصل هو $\frac{3}{4}$ وميل مماس الفرع الآخر $-\frac{3}{4}$

6) إذا علمت أن $f(x) = (1+\sin x)^3$

فــإن $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ تساوي:

a) 0 b) 3 c) 4 d) 12

7) إذا علمت أن $f(x^3-4) = 6x^2+1$

فــإن $f'(4)$ تساوي:

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4

8) إذا علمت أن

$f(x) = e^{\sin x} + \ln(5x+1)^2$ فإن $f'(0)$

تساوي:

a) 11 b) 10 c) 5 d) 3

9) إذا علمت أن $y = ae^{2x} + \sin(\ln x)$

حيث $a \in R$ ، وكان $\left.\frac{dx}{dy}\right|_{x=1} = e^3+1$ فإن a

تساوي:

a) e b) 2 c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{e}{2}$

10) إذا علمت أن $f(x) = \ln\left(\frac{e^{2x}}{x}\right)^2$

فإن $f'(1)$ تساوي:

a) 0 b) 1 c) 2 d) e^2

11) إذا علمت أن $f(x) = e^{3x}\ln(2x+1)$

فإن $f'(0)$ تساوي:

a) 0 b) 5 c) 2 d) 6

12) إذا علمت أن $f(x) = \log_3(1+\ln x)$

فــإن $f'(1)$ تساوي:

a) 0 b) $\frac{2}{\ln 3}$ c) $\frac{1}{\ln 3}$ d) $\frac{1}{2\ln 3}$

13) إذا علمت أن $f(x) = \frac{1-10^x}{1+10^x}$

فــإن $f'(0)$ تساوي:

a) $\frac{1}{\sqrt{10}}$ b) $\ln\frac{1}{10}$

c) $\ln\sqrt{10}$ d) $\ln\frac{1}{\sqrt{10}}$

السؤال الثاني

إذا علمت أن $y = a^x \cdot x^a \quad , \ a \in R$

جــــد المشتقة.

السؤال الثالث

جد معادلة المماس لمنحنى العلاقة الوسطية

$x = \sin^2 t \ \ , y = 2\cos t \quad , t \in [0, \pi]$

عندما يكون الميل $= \sqrt{2}$

السؤال الرابع

إذا علمت أن $y = ln\sqrt{\frac{1+\tan x}{1-\tan x}}$

أثبت أن $y' = \sec 2x$

السؤال الخامس

إذا كان $f(x) = x\ln x \quad , \quad x > 0$

a) جد معادلة المماس لمنحنى $f(x)$ عندما $x = 1$

b) جد أحداثيي النقطة التي يكون ميل المماس عندها يساوي 2

السؤال السادس

إذا كان $f(x) = \tan^3\left(\frac{\pi}{3}\sec(\pi\cos x)\right)$

جد $f'(0)$

السؤال السابع

إذا كان $f(x) = \frac{x+2}{\sqrt[4]{\sin x+\cos x+15}}$ جد $f'(0)$

السؤال الثامن

جد مشتقة $y = \log_3\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\ln 3}$

السؤال التاسع

إذا علمت أن $y = 3\cos t \quad , \quad x = 2\sin 2t$ ، حيث $0 \le t \le 2\pi$ جد ميل المماس لمنحنى المعادلة عند نقطة الأصل.

ولقد تنالك في الطريق مشقة

لكن أسقام الجهالة أوضع

لولا المشقة سادَ الناس كلهمُ

الجود يُفقر والأقدام قتال

محبكم

الأستاذ : عبد الحميد سعدي