الاستاذ عبد الحميد سعدي
مدارس الروم الأرثوذكس
الثـــانـــي ثانـــوي
(الهندسي , العلوم والتكنولوجيا , الصحي)
0785249733
مركز مادبا الاكاديمي

الدرس 2
مشتقتا الضرب والقسمة والمشتقات العليا
Product and Quotient Rules and Higher-Order Derivatives

فكرة الدرس

- إيجاد مشتقة ضرب اقترانين، ومشتقة قسمة اقترانين.
- إيجاد مشتقات الاقترانات المثلثية.
- إيجاد المشتقات العليا.

أولاً: مشتقة الضرب و القسمة .

مشتقة حاصل ضرب اقترانين

اذا كانت $A(x)=f(x)g(x)$ ، فإن:

$$A'(x)=f(x)g'(x)+g(x)f'(x)$$

(مشتقة الاول)(الثاني) + (مشتقة الثاني)(الاول)

مشتقة القسمة $=\dfrac{\text{بسط}}{\text{مقام}}$

اذا كانت $B(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ ، فإن:

$$B'(x)=\frac{g(x)f'(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

$$=\frac{\text{مشتقة المقام} \times \text{البسط} - \text{مشتقة البسط} \times \text{المقام}}{(\text{المقام})^2}$$

ملاحظة : سنبرهن النظريات في اخر الدرس بالتعريف العام للمشتقة .

مثال

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

1) $f(x)=(3x-2x^2)(5+4x)$

$-24x^2+4x+15$

2) $f(x)=xe^x$

xe^x+e^x

وافتح علينا فتوحًا لا حدودَ لها
يا واسعَ الفضلِ والإنعامِ والكرَمِ

تدريب:

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

a) $f(x) = (x^3 - 2x^2 + 3)(7x^2 - 4x)$

$35x^4 - 72x^3 + 24x^2 + 42x - 12$

---

b) $f(x) = \ln x \cos x$

$-\ln x \sin x + \frac{\cos x}{x}$

مثال: جد مشتقة كل مما يلي

1) $f(x) = x \cot x$

$x(-\csc^2 x) + \cot x$

---

2) إذا علمت أن $f(2) = 5$ ، $f'(2) = 3$ وكان $g(x) = x^2 f(x)$ ، فإن $g'(2)$ تساوي:

a) 30 b) 32 c) 12 d) 17

b

قاعدة للجذر التربيعي ستتم مراجعتها في درس السلسلة

$$f(x) = \sqrt{g(x)} \rightarrow f'(x) = \frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}$$

بالكلمات:

مشتقة الجذر التربيعي

$$= \frac{\text{مشتقة ما داخل الجذر}}{2 \cdot \sqrt{\text{الجذر نفسه}}}$$

مثال: أجد مشتقة ما يلي:

1) $f(x) = \sqrt{2x^5 + 8}$

$\frac{10x^4}{2\sqrt{2x^5 + 8}}$

---

2) $f(x) = \sqrt{8x^2 + 4x + 2}$

$\frac{16x + 4}{2\sqrt{8x^2 + 4x + 2}}$

---

3) $f(x) = (\sqrt[3]{x} + 1)(\sqrt{x} - 1)$

جد $f'(64)$

مثال

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

1 $f(x) = \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$

$\dfrac{-4x}{(1+x^2)^2}$

2 $f(x) = \dfrac{\ln x}{x+1}$

$\dfrac{x+1-x\ln x}{x(x+1)^2}$

تدريب

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

a) $f(x) = \dfrac{x+1}{2x+1}$

$\dfrac{-1}{(2x+1)^2}$

b) $f(x) = \dfrac{\sin x}{e^x}$

$\dfrac{\cos x - \sin x}{e^x}$

c) $f(x) = \dfrac{\csc x}{1+\tan x}$

$\dfrac{-\csc x \cot x - \csc x - \csc x \sec^2 x}{(1+\tan x)^2}$

d) $f(x)=\dfrac{\tan x}{1+\sin x}$

$$\frac{(1+\sin x)(\sec^2 x)-(\tan x)(\cos x)}{(1+\sin x)^2}$$

مثال:

إذا علمت أن $f(2)=4\ ,\ f'(2)=3$

$g(2)=-2, g'(2)=1$ ، جـد:

a) $\left(\dfrac{f}{g}\right)'_{(2)}$

-2.5

---

b) $\left(\dfrac{g}{x^2}\right)'_{(2)}$

0.75

الفشل هو التجربة التي تسبق النجاح، فلا تيأس

6) إذا علمت أن

$f(x)=\dfrac{g(x)}{h(x)}\quad , \quad h(x)\neq 0$

وكان كلا من $h(x)$, $g(x)$ قابلين للاشتقاق عند $x=a$ وأن $f'(a)=0$ أثبت أن:

$$f(a)=\frac{g'(a)}{h'(a)}$$

مثال :

$$(1+x^2)f(x)+12=4x^3$$

جـد $f'(-1)$

a) 14 b) -2 c) -6 d) 0

b

مثال :

$f(x) = (x+1)(x^2-1)(x^3+5x+2)$

جد $f'(1)$

32

فكر:

إذا علمت أن $f(x) + x^3 = xf(x) + 5$

جد $f'(2)$

9

فصبرًا في مجالِ العِلم صبرًا
فما نيلُ المُنى سهلُ المُرادِ

مثال :

إذا علمت أن $f(1) = 2\,,\ f'(1) = -1$

، $g(1) = 3\,,\ g'(1) = 1$

a) $(f \cdot g)'(1)$

-1

b) $\left(\frac{f}{g}\right)'(1)$

$\boxed{-\frac{5}{9}}$

كُلُّ الأمَاني البَعِيدَةُ بالدعاء تَقْتَرِبُ

مثال

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

1) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

$\dfrac{-2x}{(1+x^2)^2}$

2) $f(t) = \dfrac{1}{t+\frac{1}{t}}$

$\dfrac{1-t^2}{t^2(t+\frac{1}{t})^2}$

تدريب:

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

c) $(x^2 \cdot f)'(1)$

3

d) $\left(x^2 f(x) g(x)\right)' (1)$

11

e) $\left(f(1) g(1)\right)'$

0

مشتقة المقلوب

اذا كانت $f(x) = \dfrac{a}{g(x)}$ ، فإن:

$$f'(x) = \frac{-a \times g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}$$

$$\frac{\text{سالب العدد} \times \text{مشتقة المقام}}{(\text{المقام})^2}$$

a) $f(x) = \frac{1}{5x - x^2}$

$\frac{2x-5}{(5x-x^2)^2}$

b) $f(x) = \frac{1}{e^x + \sqrt{x}}$

$\frac{2\sqrt{x}e^x + 1}{2\sqrt{x}(e^x + \sqrt{x})^2}$

c) إذا كان $f(x) = \frac{3}{\sin x + \cos x}$ جد $f'(0)$

-3

لا يأتي النجاح الا على طبق من تعب

تدريب إذا كان $f(x) = \frac{1}{3+ax}$

$a \in R$ ، $x \neq \frac{-3}{a}$ ، وكان $f'(1) = 2$

جد قيمة الثابت a .

$\boxed{a=-2}$, $\boxed{a=-4.5}$

يمكن برهنة نظرية المقلوب من خلال قاعدة مشتقة القسمة

إذا كان $f(x)$ اقترانًا قابلًا للاشتقاق،

حيث: $f(x) \neq 0$، وكان: $A(x) = \frac{1}{f(x)}$،

فإنَّ:

مثال: أثبت أن مشتقة **f(x)=tanx**

تعطى بالعلاقة :

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$$

تدريب :

أُثبِت صحة كلٍّ ممّا يأتي

1) $\frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$

2) $\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$

3) $\frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$

فكلما عظمت الأهداف طال الطريق..

تدريب:

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

1. $f(x) = \dfrac{x^3}{2x-1}$

$\dfrac{4x^3 - 3x^2}{(2x-1)^2}$

2. $f(x) = x^3 \sec x$

$x^3 \sec x \tan x + 3x^2 \sec x$

3. $f(x) = \dfrac{x+1}{\cos x}$

$\dfrac{\cos x + x \sin x + \sin x}{\cos^2 x}$

4. $f(x) = e^x (\tan x - x)$

$e^x \tan^2 x + e^x \tan x - x e^x$

5. $f(x) = \dfrac{\sin x + \cos x}{e^x}$

$\dfrac{-2 \sin x}{e^x}$

6. $f(x) = x^3 \sin x + x^2 \cos x$

$x^3 \cos x + 2x^2 \sin x + 2x \cos x$

7. $f(x) = \sqrt[3]{x}\,(\sqrt{x} + 3)$

$\dfrac{5}{6\sqrt[6]{x}} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$

10 $f(x) = (x^3 - x)(x^2 + 2)(x^2 + x + 1)$

$$(x^3 - x)(x^2 + 2)(2x + 1) + (x^3 - x)(x^2 + x + 1)(2x) + (x^2 + 2)(x^2 + x + 1)(3x^2 - 1)$$

11 $f(x) = (\csc x + \cot x)^{-1}$

$$\frac{\csc x}{\cot x + \csc x}$$

8 $f(x) = \dfrac{1 + \sec x}{1 - \sec x}$

$$\frac{2 \sec x \tan x}{(1 - \sec x)^2}$$

9 $f(x) = \dfrac{2 - \frac{1}{x}}{x - 3}$

$$\frac{-2x^2 + 2x - 3}{(x^2 - 3x)^2}$$

سَنَكسِبُ رِهانَ الحياةِ يوماً ، ما كانَ جِهادُنا على أحلامِنا عَبَثاً

تدريب:

أجد مشتقة كل اقتران ممّا يأتي:

1) $f(x) = \frac{\sin x}{x}$

2) $f(x) = -\csc x - \sin x$

3) $f(x) = \frac{x + c}{x + \frac{c}{x}}$

الاجابات:

1	$f'(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}$
2	$f'(x) = \csc x \cot x - \cos x$
3	$= \frac{2cx - cx^2 + c^2}{(x^2 + c)^2}$, $x \neq 0$

4) $f(x) = x \cot x$

5) $f(x) = 4x - x^2 \tan x$

6) $f(x) = \frac{\cos x}{x^2}$

الإجابة :

4	$f'(x) = -x\csc^2 x + \cot x$
5	$f'(x) = 4 - x^2\sec^2 x - 2x\tan x$
6	$f'(x) = \frac{-x^2\sin x - 2x\cos x}{x^4} = \frac{-x\sin x - 2\cos x}{x^3}$

7) $f(x) = x\left(1 - \frac{4}{x+3}\right)$

$1 - \frac{12}{(x+3)^2}$

8) $f(x) = \frac{3(1 - \sin x)}{2\cos x}$

$\frac{-6 + 6\sin x}{4\cos^2 x}$

9) $f(x) = (x+1)e^x$

$(x+2)e^x$

تدريب :

إذا كان $f(x)$ و $g(x)$ اقترانين قابلين للاشتقاق عندما $x=0$، وكان $g(0)=-1, g'(0)=2$ ، $f(0)=5, f'(0)=-3,$

1) $(fg)'(0)$

13

2) $\left(\frac{f}{g}\right)'(0)$

-7

3) $(7f-2fg)'(0)$

-47

مثال:

إذا كان: $f(x)=9\ln x+\frac{1}{2x^2}$،

فأُثبِت أنَّ $f'(x)=\frac{(3x-1)(3x+1)}{x^3}$.

تحدٍّ: إذا كان: $y=\frac{x+1}{x-1}$، حيث: $x\neq 1$،

فأُجيب عن الأسئلة الثلاثة الآتية تباعًا:

1) أجد $\frac{dy}{dx}$.

$\frac{-2}{(x-1)^2}$

2) أُعيد كتابة المعادلة بالنسبة إلى المُتغيِّر x (x اقتران بالنسبة إلى y)، ثم أجد $\frac{dx}{dy}$.

$\frac{dx}{dy} = \frac{-2}{(y-1)^2}$

3) أُبيِّن أنَّ $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$.

$\frac{(x-1)^2}{-2} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$

مثال:

أجد معادلة المماس لكل اقتران ممّا يأتي عند النقطة المعطاة:

$$1)\ f(x) = \frac{1+x}{1+e^x}\ ,\ (0, \frac{1}{2})$$

$\Rightarrow y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$

2) $f(x) = e^x \cos x + \sin x, (0, 1)$

$\Rightarrow y = 2x + 1$

تدريب:

أجد معادلة المماس لكل اقتران

ممّا يأتي عند النقطة المعطاة:

1) $f(x) = x^2 \cos x \, , \left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$

2) $f(x) = \dfrac{1 + \sin x}{\cos x}, (\pi, -1)$

$y = x - \pi - 1$

تذكر:

1) معدل تغيّر اقتران بالنسبة لمتغير = المشتقة

2) ميل المنحنى (منحنى $f(x)$) عند النقطة $x = a$ يساوي

ميل المماس عند نفس النقطة = $f'(a)$

3) المشتقات من رسم منحنى الاقتران $f(x)$

a) القمة والقاع، دائماً المشتقة = 0

(المماس أفقي)

b) إذا كان المطلوب $f'(a)$ و a تقع على مستقيم فإن :

$f'(a) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \tan\theta \;\; , \;\; 0 \le \theta < \pi$

حيث θ بالاتجاه الموجب .

تبرير: إذا كان: $y = \frac{1 - e^{-x}}{1 + e^{-x}}$،

فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

1) أجد ميل المماس عند نقطة الأصل.

0.5

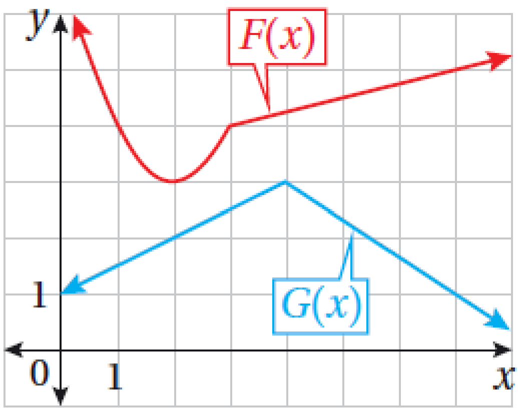
2) أبيِّن عدم وجود مماس أفقي للاقتران y مُبرِّرًا إجابتي.

مثال :

يُبيِّن الشكل المجاور منحنيي الاقترانين: $F(x)$، و $G(x)$. إذا كان:

$P(x) = F(x)G(x)$،

وكان: $Q(x) = \frac{F(x)}{G(x)}$،



1) $P'(2)$

1.5

1) $u'(1)$

$\boxed{3}$

2) $v'(4)$

$\boxed{-\frac{7}{12}}$

2) $Q'(7)$

$\boxed{\frac{43}{12}}$

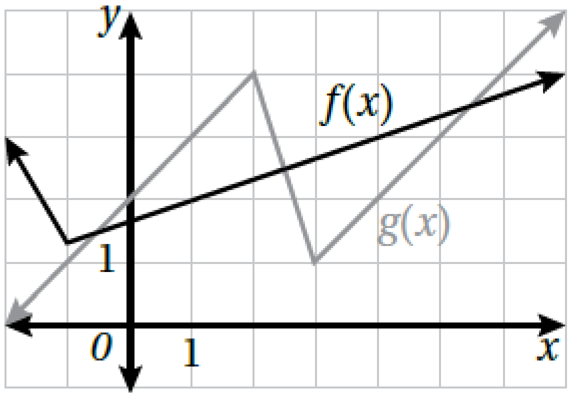
تدريب:

يُبيِّن الشكل المجاور منحنيي الاقترانين:

$f(x)$، و $g(x)$. إذا كان:

$u(x) = f(x)g(x)$،

وكان: $v(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي:



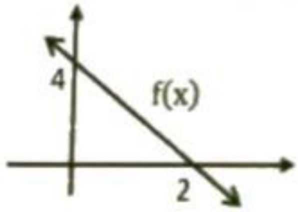
فكّر :

من الشكل التالي لمنحنى $f(x)$

إذا علمت أن

$g(x) = x^2 \cdot f(x)$

جد $g'(1)$.



مثال:

أجد إحداثيي النقطة (النقاط) التي يكون عندها لمنحنى كل اقتران ممّا يأتي مماس أفقي:

1) $f(x) = \dfrac{2x-1}{x^2}$

$(1,1)$

ولقد تنالك في الطريق مشقة
لكن أسقام الجهالة أوضع

لولا المشقة سادَ الناس كلهمُ
الجود يُفقر والأقدام قتال

أمثلة:

1) إذا كان: $f(x) = x\sec x$،

فأثبت أنَّ $f'(x) = \sec x\,(1 + x\tan x)$.

2) إذا علمت أن $f(x) = \sec x \tan x$

جـ $f'(x)$

$\boxed{\sec^3 x + \sec x \tan^2 x}$

3) إذا علمت أن $f(x) = \dfrac{\tan\frac{\pi}{4} + x}{\sin\frac{\pi}{2} - \cos x}$

جـ $f'(x)$

$\dfrac{1 - \cos x - \sin x - x\sin x}{(1 - \cos x)^2}$

2) $h(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + 1}$

$(0,0)$

3) $g(x) = \dfrac{8(x-2)}{e^x}$

$\left(3, \frac{8}{e^3}\right)$

4) إذا علمت أن $f(x) = (ae^x + 1)(e^x - a)$

$f'(0) = 1$، جد a ، حيث $a \in R - \{0\}$

a =2

5) إذا كان $f(x) = \frac{g(x)}{xh(x)}$

وكان $f'(2) = g(2) = -3$

$g'(2) = h(2) = 1$ ، جـد $h'(2)$

$\boxed{-\frac{17}{6}}$

6) إذا علمت أن

$$f(x) = (ax + 1)(x^2 - 2)$$

وكان $f'(2) = -3$

جـد a حيث $a \in R$

$\boxed{-\frac{17}{10}}$

لا يوجد طريق سهل
يوجد فقط عمل جاد
ليالي متأخرة صباحات باكرة
دراسة ممارسة تدريب تكرار معاناة إجهاد كفاح
إنضباط تضحية

ثانياً : مسائل حياتية

مثال تعطى درجة حرارة مريض في أثناء مرضه بالاقتران: $T(t) = \frac{4t}{1+t^2} + 98.6$،

حيث t الزمن بالساعات بعد ظهور أعراض المرض ، و T درجة الحرارة بالفهرنهايت:

1 أجد مُعدَّل تغيُّر درجة حرارة المريض بالنسبة إلى الزمن.

$\frac{4-4t^2}{(1+t^2)^2}$

2 أجد مُعدَّل تغيُّر درجة حرارة المريض عندما $t = 2$

-0.48

تدريب:

يعطى عدد سكّان مدينة صغيرة بالاقتران:

$P(t) = \frac{500t^2}{2t+9}$، حيث t الزمن بالسنوات،

وP عدد السكّان بالآلاف:

a) أجد مُعدَّل تغيُّر عدد السكّان في المدينة بالنسبة إلى الزمن.

$\frac{9000t+1000t^2}{(2t+9)^2}$

b) أجد مُعدَّل تغيُّر عدد السكّان في المدينة عندما $t = 12$

≈ 231.405

مثال:

يعطى طول مستطيل بالمقدار $6t+5$، ويعطى عرضه بالمقدار $\sqrt{t}$، حيث t الزمن بالثواني، والأبعاد بالسنتيمترات. أجد مُعدَّل تغيُّر مساحة المستطيل بالنسبة إلى الزمن.

$9\sqrt{t}+\frac{5}{2\sqrt{t}}$ cm^2/s

تدريب:

وجد فريق بحث زراعي أنَّه يُمكِن التعبير عن ارتفاع نبتة مُهجَّنة من نبات تبّاع الشمس h بالأمتار، باستعمال الاقتران: $h(t) = \frac{3t^2}{4+t^2}$، حيث t الزمن بالأشهر بعد زراعة البذور.

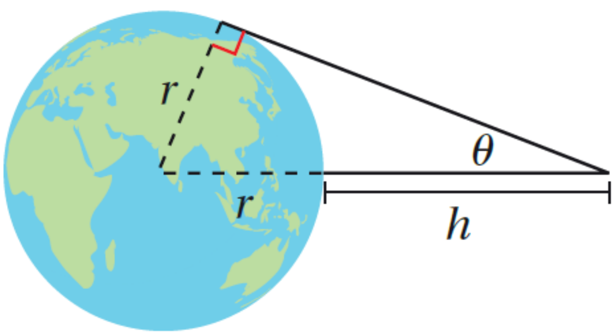
أجد مُعدَّل تغيُّر ارتفاع النبتة بالنسبة إلى الزمن.

$\frac{24t}{(4+t^2)^2}$

مثال:

أقمار صناعية: عندما ترصد الأقمارُ الصناعيةُ الأرضَ، فإنَّه يُمكِنها مسح جزء فقط من سطح الأرض. وبعض الأقمار الصناعية تحوي مُستشعِرات لقياس الزاوية θ (بالراديان) المُبيَّنة في الشكل المجاور.

إذا كان h يُمثِّل المسافة بين القمر الصناعي وسطح الأرض بالكيلومتر، و r يُمثِّل نصف قُطْر الأرض بالكيلومتر، فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:



1) أُثبِت أنَّ $h = r(\csc\theta - 1)$.

2) أجد مُعدَّل تغيُّر h بالنسبة إلى θ عندما $\theta = \frac{\pi}{6}$ rad

(أفترض أنَّ $r = 6371$ km).

$6371(-2 \times \sqrt{3}) \approx -22070$ km/rad

ألم الدراسة لحظة وتنتهي ، لكن إهمالها ألم يستمر مدى الحياة

ثالثاً:

المشتقات العليا

اذا كانت $y=f(x)$ ، فإن:

المشتقة الاولى $\frac{dy}{dx}=y'=f'(x)$

المشتقة الثانية $\frac{d^2y}{dx^2}=y''=f''(x)$

المشتقة الثالثة $\frac{d^3y}{dx^3}=y'''=f'''(x)$

المشتقة الرابعة $\frac{d^4y}{dx^4}=y^{(4)}=f^{(4)}(x)$

المشتقة النونية $\frac{d^ny}{dx^n}=y^{(n)}=f^{(n)}(x)$

مثال

أجد المشتقات الأربع الأولى للاقتران: $f(x)=x^2-\frac{1}{x}$.

$f^{(4)}(x)=-\frac{24}{x^5}$

...

تدريب:

أجد المشتقات الثلاث الأولى للاقتران: $f(x)=x\sin x$.

$f'''(x)=-3\sin x-x\cos x$ ...

1) اذا علمت أن

$$f(x)=(3x^2+2)(x^3-2x+1)$$

فاثبت أن: $f'(1)\times f''(1)=210$

2) إذا علمت أن

$$f(x) = ax^3 + 4x^2 - 2x + 1$$

وكان $f''(1) = 50$

جد a حيث $a \in R$

a=7

3) إذا علمت أن

$$f(1) = 2 , f'(1) = -1 , f''(1) = 3$$

جد $\left(\frac{f'}{f}\right)'_{(1)}$ تساوي

a) $\frac{5}{4}$ b) $\frac{5}{2}$ c) 5 d) $\frac{-5}{4}$

a

4) إذا علمت أن $f(x) = x^n$

وكان $f^{(4)}(x) = ax$ ، جد a حيث n عدد طبيعي

120

5) إذا كان $f(x) = x^n$

وكان $f^{(3)}(x) = 210\, x^{n-3}$

جد n ، حيث n عدد طبيعي

7

6) إذا علمت أن وزاري

$y = \frac{\sin x}{1+\cos x}$, $\cos x \neq -1$ أثبت أن

$$y'' = \frac{\sin x}{(1+\cos x)^2}$$

7) إذا كان $f(x) = \sin x - \cos x$

$x \in [0, \pi]$ ، فإن قيمة x التي تحقق $f'''(x) = 0$

a) $\frac{3\pi}{4}$ b) $\frac{5\pi}{6}$ c) $\frac{2\pi}{3}$ d) $\frac{5\pi}{4}$

a

8) إذا كان $f(x) = \frac{1+x}{1+\sqrt[3]{x}}$ جد $f''(8)$

$\boxed{-\frac{1}{144}}$

كُلُّ ألَامَانِي البَعِيدَةُ بالدعاء تَقْتَرِبُ

تدريبات

1) إذا علمت أن $f(x) = \frac{1}{x}$ فإن

$$f'''(x) - 3xf'(x)f''(x) =$$

a) 1 b) 0 c) $\frac{-12}{x^4}$ d) $\frac{12}{x^4}$

(b) $\boxed{0}$

2) إذا علمت أن

$$y = x\cos x - 4\sin x$$

فـــإن $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=\pi}$ تساوي

a) $-\pi$ b) -3 c) 2 d) π

d

3) إذا علمت أن $y = (1 + a^2)x^4 - \frac{1}{x}$, $x \neq 0$

وكان $\left.\frac{d^3y}{dx^3}\right|_{x=1} = 246$ ، جد a حيث $a \in R$

$\boxed{a = 3 \quad \text{أو} \quad a = -3}$

تدريب

أجد المشتقة الثانية لكل اقتران

ممّا يأتي عند قيمة x المعطاة:

1) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 + 4}, x = -2$

$-\frac{1}{4}$

---

2) $f(x)= \dfrac{1 - x}{1 + \sqrt{x}}, x = 4$

$\frac{1}{32}$

مثال:

أُلاحِظ المشتقة المعطاة في كلٍّ ممّا يأتي،

ثم أجد المشتقة العليا المطلوبة:

1) $f''(x) = 2 - \frac{2}{x}, f'''(x)$

$f'''(x) = \frac{2}{x^2}$

2) $f'''(x) = 2\sqrt{x}, f^{(4)}(x)$

$f^{(4)}(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

3) $f^{(4)}(x) = 2x+1, f^{(6)}(x)$

$f^{(6)}(x) = 0$

مثال :

إذا كان الاقتران: $y = e^x \sin x$،

فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

1) أجد $\frac{dy}{dx}$، و $\frac{d^2y}{dx^2}$.

$\frac{dy}{dx} = e^x(\cos x + \sin x)$

$\frac{d^2y}{dx^2} = 2e^x \cos x$

2) أُثبِت أنَّ $\frac{d^2y}{dx^2} = 2\frac{dy}{dx} - 2y$.

مثال:

إذا كان: $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$، فأُجيب

عن السؤالين

1) أُثبِتُ أنَّ $f''(x) = \frac{6\ln x - 5}{x^4}$

---

2) أجد قيمة المقدار:

$.x^4 f''(x) + 4x^3 f'(x) + 2x^2 f(x) + 1$

0

مثال:

إذا كان: $f(x) = \frac{\ln x}{x}$، حيث: $x > 0$،

فأجد $f'(x)$، و $f''(x)$.

$f'(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{\ln x}{x^2}$

$f''(x) = \frac{-3 + 2\ln x}{x^3}$

مثال :

يُمثِّل الاقتران: $v(t) = \frac{10}{2t+15}\,, t \geq 0$

سرعة سيّارة بدأت الحركة في مسار مستقيم،

حيث تقاس v بالقَدم لكل ثانية:

أجد تسارع السيّارة عندما $t = 5$.

برهان نظرية مشتقة الضرب

برهان نظرية مشتقة القسمة

ورقة عمل (2)

السؤال الأول:

1) إذا علمت أن $f'(1) = 1$ وأن $f(x) = \frac{c}{x^2+1}$
حيث $c \in R$ فإن قيمة c تساوي

a) $\frac{1}{2}$ b) 4 c) 2 d) -2

2) إذا علمت أن $f(x) = (ax^2 + 1)(x^3 - 1)$
وكان $f'(1) = 2$ فإن a تساوي

a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{-1}{3}$ c) $\frac{1}{5}$ d) $\frac{-1}{5}$

بالاعتماد على المعلومات التالية:

$f(2) = 1 \quad , \quad f'(2) = -2$

$g(2) = -1 \quad , \quad g'(2) = 3$

أجب عن الأسئلة $(3 - 6)$

3) $\frac{d}{dx}(f \times g)_{(2)}$ تساوي

a) 6 b) 1 c) 5 d) -6

4) $\left(\frac{f}{g}\right)'_{(2)}$ تساوي

a) 0 b) $\frac{1}{2}$ c) 1 d) -1

5) $\left(\frac{f(2)}{g}\right)'_{(2)}$ تساوي

a) 0 b) 3 c) -3 d) -1

6) $(f(2) \times g(2))'$ تساوي

a) 5 b) -5 c) -6 d) 0

7) إذا علمت أن $g'(2) = 5$, $f(2) = 8$
وأن $f(x) = x^2g(x)$ فإن $f'(2)$ تساوي:

a) 20 b) 42 c) 25 d) 28

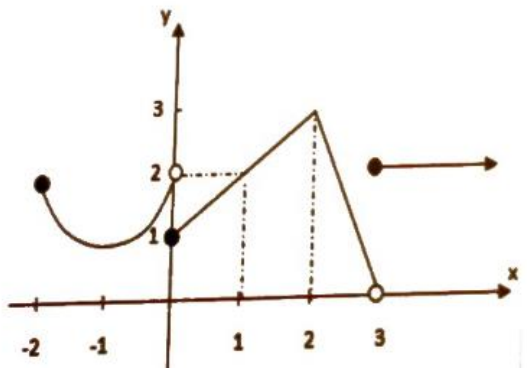
8) إذا علمت أن $f(x) = 2x^2f(x) - 1$
فإن $f'(1)$ تساوي

a) 1 b) -1 c) 4 d) -4

9) إذا كان $f(x) = x^n$
وكان $f'''(x) = 120x^{n-3}$ فإن n تساوي

a) 6 b) 4 c) 5 d) 7

بناءً على الشكل التالي لمنحنى f(x) أجب عن الأسئلة (13- 10)



10) إذا كان $g(x) = x^2 f(x)$ فإن $g'(-1)$ تساوي:

a) 2 b) 0 c) غير موجودة d) -2

11) إذا كان $h(x) = \frac{x}{f(x)}$ فإن $h'(1)$ تساوي

a) $\frac{1}{2}$ b) 0 c) $\frac{1}{4}$ d) $\frac{-1}{4}$

12) $f'(4)$ تساوي:

a) 2 b) 0 c) غير موجودة d) 1

13) إن قيم x التي تجعل $f'(x)$ غير موجودة

a) {-2 , -1 , 0 , 2 , 3} b) {-2 , 0 , 2 , 3}

c) {-2 , 0 , 3} d) {0 , 2 , 3}

14) إذا علمت أن $f(x) = \frac{\pi}{\cos x}$ فإن $f'(\pi)$ تساوي:

a) 0 b) π c) $-\pi$ d) 1

15) إذا علمت أن $f(x) = \frac{2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - x}{\sec^2\frac{\pi}{4}}$ فـإن $f'(x)$ تساوي:

a) 0 b) -1 c) $\frac{-1}{2}$ d) $\frac{1}{2}$

16) إذا علمت أن $f(x) = \sin x, g(\pi) = -1$ ، $g'(\pi) = 2$ فـإن $(f' \cdot g)'_{(\pi)}$ تساوي:

a) -2 b) 2 c) 1 d) -1

17) إذا علمت أن $y = \sin x + \cos x$ فـإن $(y')^2 + (y)^2$ تساوي:

a) 1 b) 2 c) -2 d) -1

18) إذا علمت أن $f(x) = 2\sin x + 3\cos x$ فـإن $f''(x) + f(x)$ تساوي:

a) $4\sin x$ b) $-4\cos x$

c) 0 d) $-4\sin x - 4\cos x$

19) إذا علمت أن $f(x) = \cos x - \frac{1}{2}x$ حيث $x \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$ ، فـإن قيم x التي تجعل لمنحنى الاقتران $f(x)$ مماساً أفقياً :

a) $\frac{4\pi}{3}$ b) $\frac{7\pi}{6}$ c) $\frac{10\pi}{9}$ d) $\frac{5\pi}{4}$

20) إذا علمت أن $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ فإن $f'(1)$ تساوي:

a) -1 b) 1 c) 0 d) $\frac{1}{2}$

21) إن معادلة المماس لمنحنى الاقتران

$f(x) = \frac{1+\sin x}{\cos x}$ ، عندما $x = \pi$ هي:

a) $y = -x - \pi + 1$ b) $y = x + \pi - 1$

c) $y = x - \pi - 1$ d) $y = x + \pi + 1$

22) إذا علمت أن $y = x^n e^x$ جد n

حيث $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1} = 6e$

a) 0 b) 6 c) 5 d) 4

23) إن معادلة العمودي على المماس لمنحنى $f(x)$

حيث $f(x) = \sin x + \cos x$ عند النقطة

التي يقطع فيها منحنى $f(x)$ محور x ،

حيث $x \in [0, \pi]$ هي:

a) $y = \sqrt{2}\left(x - \frac{3\pi}{4}\right)$

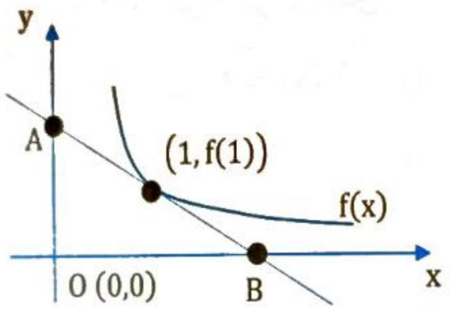
b) $y = \sqrt{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

c) $y = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x - \frac{3\pi}{4}\right)$

d) $y = -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(x - \frac{3\pi}{4}\right)$

السؤال الثاني:

معتمداً الشكل على الشكل التالي



$f(x) = \frac{c}{x+1}$, $x \neq -1$, $c \in R$

جد قيمة الثابت c حيث مساحة المثلث AOB $= \frac{9}{4}$

ولقد تنالك في الطريق مشقة

لكن أسقام الجهالة أوضع

لولا المشقة سادَ الناس كلهمُ

الجود يُفقر والأقدام قتال