الدرس 1
مشتقة اقترانات خاصة
Differentiation of Special Functions

مراجعة :

قواعـــد الاشتقـاق:

$$f(x) \rightarrow f'(x)$$
$$y \rightarrow y'$$
$$y \rightarrow \frac{dy}{dx}$$

حفظ مثل اسمك

حدد نوع الاقتران ← اشتق

الاقـــتران الثابت:

$f(x)=a$

$y=a$

لا يحتـوي متغـيرات x, y

مشتقة الثابت ← صفر

$$f(x)=a \rightarrow f'(x)=\boxed{0}$$
$$f(x)=3 \rightarrow f'(x)=\boxed{0}$$
$$f(x)=-5 \rightarrow f'(x)=\boxed{0}$$

$$f(x)=\frac{1}{2} \rightarrow f'(x)=\boxed{0}$$
$$f(x)=\sqrt{3} \rightarrow f'(x)=\boxed{0}$$
$$f(x)=\pi \rightarrow f'(x)=\boxed{0}$$
$$f(x)=e \rightarrow f'(x)=\boxed{0}$$
$$f(x)=a^2 \rightarrow f'(x)=\boxed{0}$$

الاقـــتران الخطي: ← درجة أولى

$$f(x)=ax^1+b \quad , \quad a \neq 0$$

$$f'(x)=\boxed{a}$$

مشتقة الخطي ← معامل x مع إشارته

x واحدة بالبسط ← أسها $\boxed{1}$

(1) $f(x)=3x+5$

$f'(x)=\boxed{3}$

(2) $f(x)=8-4x$

$f'(x)=\boxed{-4}$

خطي

$$f(x)=a^2x-2$$

$$f'(x)=\boxed{a^2}$$

نرتب

$$f(x)=\frac{3x-2}{5}$$

التوزيع في الجمع والطرح

- $\dfrac{a\mp b}{c}=\dfrac{a}{c}\mp\dfrac{b}{c}$

التوزيع في الضرب

- $\dfrac{a*b}{c}=\dfrac{a}{c}*b=a*\dfrac{b}{c}$

القاعدة الثالثة:

- $f(x)=x^n$

  $f'(x)=nx^{n-1}$

شروط ما قبل الاشتقاق

(1) أن تكون بدون جذور

$$\sqrt[a]{x^n}\xrightarrow{\text{نرتب}}x^{\frac{n}{a}}$$

(2) أن تكون بالبسط

$$\frac{1}{x^a}\xrightarrow{\text{نرتب}}x^{-a}$$

ألم الدراسة لحظة وتنتهي ، لكن إهمالها ألم
يستمر مدى الحياة

يُسمح أن يكون الأس سالب أو كسر
أهم شيء يكون بالبسط وبدون جذور

• $f(x)=x^4$ $f'(x)=4x^3$	• $f(x)=x^3$ $f'(x)=3x^2$
• $f(x)=x^2$ $f'(x)=2x$	• $f(x)=x^6$ $f'(x)=6x^5$
• $f(x)=x^{-5}$ $f'(x)=-5x^{-6}$	• $f(x)=x^{-2}$ $f'(x)=-2x^{-3}$
• $f(x)=x^{-8}$ $f'(x)=-8x^{-9}$	• $f(x)=x^{-1}$ $f'(x)=-x^{-2}$
• $f(x)=x^{\frac{1}{3}-\boxed{\frac{3}{3}}}$ $f'(x)=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$	• $f(x)=x^{\frac{1}{2}-\boxed{\frac{2}{2}}}$ $f'(x)=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$
• $f(x)=x^{\frac{-2}{3}-\boxed{\frac{3}{3}}}$ $f'(x)=\frac{-2}{3}x^{-\frac{5}{3}}$	• $f(x)=x^{\frac{-1}{4}-\boxed{\frac{4}{4}}}$ $f'(x)=\frac{-1}{4}x^{-\frac{5}{4}}$

• $f(x)=x^{\frac{-2}{5}-\boxed{\frac{5}{5}}}$

$f'(x)=\frac{-2}{5}x^{-\frac{7}{5}}$

سعيًا إلى العلياءِ نُنفقُ عمرنا
لا بُدّ للسّاعينَ ثَمّ وُصولُ

- $f(x)=\sqrt[2]{x^{5}}$ **نرتب**

$f(x)=x^{\frac{5}{2}}\ \boxed{\frac{2}{2}}$ **جاهزة**

$f'(x)=\frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}=\boxed{\frac{5}{2}\sqrt[2]{x^{3}}}$

- $f(x)=\frac{1}{\sqrt[4]{x^{3}}}$ **نرتب**

$f(x)=\frac{1}{x^{\frac{3}{4}}}\rightarrow f(x)=x^{\frac{-3}{4}}\ \boxed{\frac{4}{4}}$

$f'(x)=\frac{-3}{4}x^{-\frac{7}{4}}=\boxed{\frac{-3}{4x^{\frac{7}{4}}}}$

ترتيبات ما بعد الاشتقاق

لغايات التعويض

الأس السالب ← ع.المقام

الأس الكسر ← جذر

- مشتقة (ثابت x اقتران)

معامل

⇓

(الثابت) x مشتقة الاقتران

المعامل

المعاملات لا تتدخل في الاشتقاق

$f(x)=7x^{2}$ $f'(x)=\boxed{14x}$	$f(x)=5x^{3}$ $f'(x)=\boxed{15x^{2}}$
$f(x)=8x^{-3}$ $f'(x)=\boxed{-24x^{-4}}$	$f(x)=-2x^{5}$ $f'(x)=\boxed{-10x^{4}}$

- $f(x)=\frac{8}{\sqrt{x}}$ **نرتب**

$f(x)=\frac{8}{x^{\frac{1}{2}}}$ **نرتب**

$f(x)=8x^{\frac{-1}{2}}\ \boxed{\frac{2}{2}}$ **نشتق**

$f'(x)=\boxed{-4x^{\frac{-3}{2}}}$

$f'(x)=\frac{-4}{x^{\frac{3}{2}}}$ **ترتيبات لغايات التعويض**

$f'(x)=\frac{-4}{\sqrt{x^{3}}}$

الاشتقاق مش مجرد قوانين!

هو لغة التغيّر في حياتنا... لما تفهم الاشتقاق، بتشوف كيف كل شيء حولك بيتغير بلحظة — سرعة سيارة، حرارة، حتى نبض قلب!

هو اللي علّم العلماء كيف يفهموا الحركة والنمو والتطور.

الاشتقاق مش مادة نحفظها، هو طريقة نفهم فيها **كيف يتحرك العالم فعليًا**.

افهم لاشتقاق...
تفهم الحياة

مشتقة جمع وطرح اقترانات

نشتق كل اقتران (حد) لوحده

$$f(x)=g(x)\mp h(x)$$
$$f'(x)=g'(x)\mp h'(x)$$

- $f(x)=x^5+x^3-5x+1$

$$f'(x)=5x^4+3x^2-5$$

- $f(x)=x^5+\frac{1}{x^5}$ نرتب

إيـاك أن تشـتق قبـل ترتيـب جميـع الحـدود لتصبح جـاهزة

$$f(x)=x^5+x^{-5}$$
$$f'(x)=5x^4+-5x^{-6}$$

- $f(x)=\sqrt[3]{x}+\sqrt{x^3}$

$$f(x)=x^{\frac{1}{3}\boxed{-\frac{3}{3}}}+x^{\frac{3}{2}\boxed{-\frac{2}{2}}}$$
$$f'(x)=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}+\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$$
$$f'(x)=\frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}+\frac{3}{2}\sqrt{x}$$
$$f'(x)=\boxed{\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}+\frac{3}{2}\sqrt{x}}$$

- $f(x)=8\sqrt[3]{x^1}$ نرتب

$$f(x)=8x^{\frac{1}{3}\boxed{-\frac{3}{3}}}$$ نشتق

$$f'(x)=\frac{8}{3}x^{\frac{-2}{3}}\rightarrow f'(x)=\frac{8}{3x^{\frac{2}{3}}}$$
$$f'(x)=\boxed{\frac{8}{3\sqrt[3]{x^2}}}$$

- $f(x)=\frac{3}{x^2}$ نرتب

$$f(x)=3x^{-2}$$ نشتق

$$f'(x)=-6x^{-3}$$
$$f'(x)=\boxed{\frac{-6}{x^3}}$$

- $f(x)=\frac{5}{2\sqrt[3]{x}}\rightarrow f(x)=\frac{5}{2x^{\frac{1}{3}}}$

$$f(x)=\frac{5}{2}x^{\frac{-1}{3}\boxed{-\frac{3}{3}}}$$
$$f'(x)=\frac{5}{2}*\frac{-1}{3}x^{\frac{-4}{3}}$$
$$f'(x)=\boxed{\frac{-5}{6}x^{-\frac{4}{3}}}$$

- $f(x)=\frac{-3}{x^3}$ نرتب

$$f(x)=-3x^{-3}$$ نشتق

$$f(x)=9x^{-4}$$ جاهزة

$$f'(x)=\boxed{\frac{9}{x^4}}$$

ثانياً: مشتقة اقترانات خاصة

مشتقة الاقتران الأسي الطبيعي:

أساسه العدد النيبيري (e)

$e \simeq 2.7$ ← العدد النيبيري

أسي ← المتغير x موجود بالأس

طبيعي ← أساسه (e)

$f(x) = e^{g(x)}$ $\quad$ $y = e^{f(x)}$

القاعدة

اشتق الأس * انسخ نفس الاقتران

$$y = e^{f(x)}$$

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) * e^{f(x)}$$

أمثلة: جد المشتقة الأولى:

- $f(x) = e^{x} \rightarrow$
- $f(x) = e^{3x+2} \rightarrow$
- $f(x) = e^{x^2} \rightarrow$
- $f(x) = e^{1-3x} \rightarrow$
- $f(x) = e^{(x^2+2x+3)}$
- $f(x) = 5e^{4x}$
- $f(x) = (e^{x})^3 + x$

- $(e^{x})^4 \xrightarrow{\text{نرتب}} e^{4x}$
- $e^{x^4} \xrightarrow{\text{لا ترتب}}$ تبقى كما هي

- $f(x) = e$ $\quad$ ثابت
- $f(x) = x^{e} \rightarrow$

مثال : جد المشتقة الأولى لكل مما يلي

1. $y = \dfrac{\sqrt[3]{x} - 2xe^{x}}{x}$

$$-\frac{2}{3\sqrt[3]{x^5}} - 2e^{x}$$

2. $f(x) = \sqrt{x} - 4e^{x}$

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} - 4e^{x}$$

3. $y = 8e^{x} + \dfrac{4}{\sqrt[5]{x}} \longrightarrow 8e^{x} - \dfrac{4}{5\sqrt[5]{x^6}}$

مشتقة الاقتران اللوغاريتمي الطبيعي:

$$y = \ln(f(x))$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

$$\frac{\text{مشتقة ما داخل اللوغاريتم}}{\text{نسخ ما داخل اللوغاريتم}}$$

$$\frac{\text{اشتق بالبسط}}{\text{انسخ بالمقام}}$$

$$f(x) = \ln x \rightarrow \boxed{f'(x) = \frac{1}{x}}$$

تذكر

1) مجال $f(x) = \ln x$ هو $x > 0$

$f(x) = \ln g(x)$ ، $g(x) > 0$

2) $e^{\ln g(x)} = g(x)$

3) $\ln e^{g(x)} = g(x)$

4) خصائص وقوانين اللوغاريتمات

1. $y = \ln x = \log_e x$
2. $y = \log_b x = \frac{\ln x}{\ln b}, \quad b > 0, b \neq 1$
3. $\log_b x^P = P \log_b x$
4. $\log_b(xy) = \log_b x + \log_b y$
5. $\log_b\left(\frac{x}{y}\right) = \log_b x - \log_b y \;,\; x, y > 0$

✓ تبسيطات

1) $e^{n \ln x} = e^{\ln x^n} = x^n$

2) $\ln(x e^x) = \ln(x) + \ln(e^x)$
$= \ln(x) + x$

قبل البدء بالاشتقاق نبحث عن تبسيط

مثـــال: جد المشتقة الأولى لكل مما يأتي:

(1) $f(x) = \ln(5x)$

ط 1

ط 2

نرتب

(2) $f(x) = \ln(2x+1)$

(3) $f(x) = \ln(-x) - \ln 3$

(4) $f(x) = \ln x^3$

(5) $f(x) = \ln(x^2 - 5x + 1)$

(6) $f(x) = \ln(x+5)$

تدريب: جــد مشــتــقــة كـل مــن

1) $f(x) = e^2 + e^3 e^x - \ln 4$

$^{3}e \cdot {}^{x}e$

2) $f(x) = \ln(x^4) - e^{\ln x^5} + \sqrt{x}$

$\frac{4}{x} - 5x^4 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$

3) $f(x) = \ln(3x\, e^x) + \ln 5 - \frac{1}{e^x}$

$\frac{\cancel{3}}{\cancel{3}x} + 1 + e^{-x}$

4) $y = \ln\left(\frac{1}{x^3}\right) + x^4$

$\frac{-3}{x} + 4x^3$

5) $f(x) = x^e + e^x$

$e\, x^{e-1} + e^x$

6) $f(x) = \ln\left(\frac{10}{x^n}\right)$

$-\frac{n}{x}$

(7) $f(x) = \ln x + 5$

(8) $f(x) = \ln\sqrt{x}$

ملاحظة:

مشــتقة $\left(\frac{\text{اقــتران}}{\text{ثابــت}}\right)$

مشــتقة الاقــتران الثابــت نفســه

$$f(x) = \frac{g(x)}{a} \rightarrow f'(x) = \frac{g'(x)}{a}$$

- $f(x) = \frac{x^2}{5} \quad \rightarrow$

- $f(x) = \frac{1}{5}x^2 \quad \rightarrow$

- $f(x) = \frac{x^3}{7} \quad \rightarrow$

- $f(x) = \frac{-x^3 - 2x + 1}{5}$

7) $f(x) = 9e^{x} + \frac{1}{3\sqrt{x}}$

$9e^{x} - \frac{1}{6\sqrt{x^3}}$

---

8) $f(x) = \ln\left(\frac{1+e^{x}}{1-e^{x}}\right)$

$\frac{e^{x}}{1+e^{x}} + \frac{e^{x}}{1-e^{x}}$

مثال: إذا كان $f(x) = e^{x+1} + 5x + 1$

جد $f'(-1 + \ln 2)$

7

تدريب إذا علمت أن $f(x) = e^{x} + 1$

فإن $y' - y$ تساوي:

a) 0 b) 1 c) -1 d) 2

-1

ضاعف جهودك إن أردت وصولا

واصبر فمازال الطريق طويلاً

تحدٍّ: أُثبت عدم وجود مماس ميله 2 للاقتران:

$y = 2e^{x} + 3x + 5x^{3}$.

تدريب أُثبِت عدم وجود مماس أفقي لمنحنى الاقتران:

$f(x) = 3x + \sin x + 2$.

مثال : إذا كان: $f(x) = \ln(kx)$، حيث k عدد حقيقي موجب، و $x > 0$، فأُبيِّن أنَّ $f'(x) = \frac{1}{x}$.

تحدٍّ: إذا كان الاقتران: $y = \log x$،

فأُجيب عن السؤالين الآتيين تباعًا:

1) أُثبِتُ أنَّ $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \ln 10}$.

---

2) مُعتمِدًا على النتيجة من السؤال السابق،

أجد $\frac{dy}{dx}$ للاقتران:

$y = \log ax^2$ ، حيث a عدد حقيقي موجب.

$\frac{2}{x \ln 10}$

وكابدوا الصَّبر حتى مَلَّ أكثَرهم ، وعانَقَ النصرَ من وفى ومَن صَبَر ..

مشتقة الاقترانات الدائرية:

$f(x)$	$f'(x)$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\sec^2 x$
$\cot x$	$-\csc^2 x$
$\sec x$	$\sec x \tan x$
$\csc x$	$-\csc x \cot x$

تذكـــيرات سريعة:

$\cos x = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$ $\quad$ $\sin x = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$

$\tan x = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$

$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

$\tan x = \frac{1}{\cot x}$ $\quad$ $\cot x = \frac{1}{\tan x}$

$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$

$\cos x = \frac{1}{\sec x}$ $\quad$ $\sec x = \frac{1}{\cos x}$

$\sin x = \frac{1}{\csc x}$ $\quad$ $\csc x = \frac{1}{\sin x}$

$f(x) = \frac{x}{\cos x} \rightarrow f(x) = x \sec x$

مثال: اجد مشتقة ما يلي:

1) $f(x)=3\sin x+5x^4+6x+7$

$3\cos x+20x^3+6$

2) $f(x)=6e^x+8\cos x+7$

$6e^x-8\sin x$

3) $g(x)=6\sec x+\tan x$

$6\sec x\tan x+\sec^2 x$

4) $h(x)=\dfrac{\sin x}{4}+3\cos x$

$\dfrac{\cos x}{4}-3\sin x$

5) $y=x^{-2}+\cos x+\sin\dfrac{\pi}{4}$

$-2x^{-3}-\sin x$

6) $f(x)=-\csc x-\sin x$

$\csc x\cot x-\cos x$

7) $f(x)=x^{-3}+12\sec x$

$-3x^{-4}+12\sec x\tan x$

8) $f(x)=\sqrt{\sin x}$

$\dfrac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$

9) $f(x)=\dfrac{\cos x}{\sin x}+\sqrt[5]{x^2}+7$

$-\csc x+\dfrac{2}{5}x^{\frac{-3}{5}}$

10) $f(x)=\ln x^3+\sin x+e^{3x^2+5}$

$\dfrac{3x^2}{x^3}+\cos x+6xe^{3x^2+5}$

تدريب جد المشتقة الأولى لكل مما يأتي:

(1) $f(x)=3\sin x+6\tan x$

(2) $f(x)=-2\cos x+\dfrac{1}{2}\cot x$

(3) $f(x)=2\csc x-\sec x$

(4) $f(x)=\dfrac{3\sin x}{2\cos x}$ نرتب

(5) $f(x)=\dfrac{5}{\csc x}$ نرتب

مَنْ صَبَرَ ظفر

$$(6)\ f(x)=\frac{1}{3\cot x}$$

$$\frac{1}{3}\sec^2 x$$

$$(7)\ f(x)=\frac{\cos x}{2\sin x}$$

$$\frac{1}{2}*-\csc^2 x$$

$$(8)\ f(x)=\frac{2}{\cot x}$$

$$2\sec^2 x$$

$$(9)\ f(x)=\frac{-1}{\cos x}$$

$$-\sec x\ \tan x$$

$$(10)\ f(x)=\frac{-2}{\sin x}$$

$$+2\csc x\ \cot x$$

$$(11)\ f(x)=\frac{4}{5\sec x}$$

$$-\frac{4}{5}\sin x$$

مَنْ صَبَرَ ظفر

$$(12)\ f(x)=\frac{\tan x}{\sec x}$$

$$\cos x$$

$$(13)\ f(x)=3\cancel{\cos x}\ \cancel{\sec x}$$

$$f(x)=3\cancel{\cos x}\ \frac{1}{\cancel{\cos x}}$$

$$f(x)=3$$

نشتق

$$\boxed{f'(x)=0}$$

$$(14)\ f(x)=\frac{5x+2}{\cancel{\sin x}\ \cancel{\csc x}}$$

نرتب

$$f(x)=5x+2$$

$$\boxed{f'(x)=5}$$

$$(15)\ f(x)=\frac{3x^2}{\cancel{\tan x}\ \cancel{\cot x}}$$

نرتب

$$f(x)=3x^2$$

نشتق

$$\boxed{f'(x)=6x}$$

ترتيب صغير في البداية ممكن
يوفر علينا خطوات كثيرة بعدين

$$16)\ f(x)=\frac{\ln x}{4}-\pi\cos x$$

$$\frac{1}{4x}+\pi\sin x$$

مثال : جد مشتقة كل من

1) إذا علمت أن

$f(x) = 2\cos x - 3\sin x$

جـد $f'(x)$

2) إذا علمت أن

$y = \sec x + 3\tan x + x^5$ ، جد $\frac{dy}{dx}$

3) إذا علمت أن

$y = \sin\frac{\pi}{2} + \cos\pi - \frac{1}{2}x$

فجـد $\frac{dy}{dx}$

-0.5

(وزاري قديم)

4) إذا علمت أن $y = a\sin x + b\cos x$

حيث $a , b \in R$

أثبت أن $(y')^2 + (y)^2 = a^2 + b^2$

5) إذا كان $f(x) = 2\sin x - x + \frac{1}{3}$

وكان $f'(x) = 0$

جـد قيم x حيث $x \in [0 , 2\pi]$

$\left\{\frac{5\pi}{3} , \frac{\pi}{3}\right\}$

تدريب إذا علمت أن

$$f(x) = \sin x + \cos x + \tan x$$

جد $f\left(\frac{\pi}{4}\right) + f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$

$3+\sqrt{2}$

فـــكـــرّ

إذا كان

$$f(x) = \frac{e^{2x}-4}{e^{x}+2} + \sin x + 3x$$

جـــد $f'(0)$

5

سعيًا إلى العلياءِ نُنفقُ عمرنا

لا بُدّ للسّاعينَ ثَمّ وُصولُ!

مثال: جد قيم x التي تجعل مماس $f(x)$ عندها أفقي $f(x) = e^{x} - 3x + 1$

Ln3

تدريب : أجد قيمة x التي يكون عندها المماس أفقيًّا لمنحنى الاقتران: $f(x) = e^{x} - 2x$.

Ln2

مثال : $y = \frac{1}{\sqrt{3}} e^{x} - \cos x + \frac{1}{2} \sin x$

جـــد $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}$

$\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2}$

تدريب : $f(x) = \sin\frac{\pi}{2} - e^{3} + \ln 7$

جـــد $f'(x)$

0

السؤال: $f(x) = (\cos\frac{\pi}{5}) \cdot e^{x} + e^{4} \cdot \cos x$ المطلوب: $f'(x)$

H.W

التطبيقات الهندسية للاشتقاق

معادلة المماس والعمودي على المماس

معادلة المماس والعمودي :

ميل	نقطة
m	(x_1, y_1)
$f'(x_1)$ ميل المماس	$(x_1, f(x_1))$

المماس:

$$\boxed{y - y_1 = \underset{\text{المماس}}{m}\,(x - x_1)}$$

العمودي:

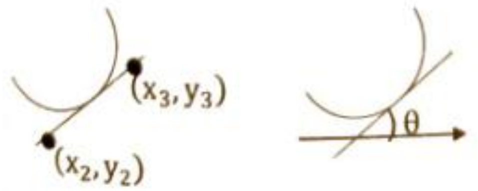
$$y - y_1 = \underset{\text{العمودي}}{m}\,(x - x_1)$$

$$\boxed{y - y_1 = \frac{-1}{m_{\text{المماس}}}(x - x_1)}$$

حيث $y_1 = f(x_1)$

ميل المماس m

- $f'(x_1)$ بوجود الاقتران
- $\tan\theta$ يصنع زاوية θ مع محور x بالاتجاه الموجب
- $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ المماس يمر بنقطتين (x_2, y_2) ، (x_3, y_3)



حكاية تبدأ وأخرى تنتهي، لاشيء يُخلَّد والأيام تمضي،

وخلف تلك السماء أحلامنا ورب السماء كريم

أولاً : ايجاد المعادلة (مباشر)

مثال

1) إذا كان الاقتران: $f(x) = \ln\left(\frac{x}{e}\right)$،

فأستعمل المشتقة لإيجاد كلٍّ ممّا يأتي:

1 معادلة المماس عند النقطة $(1, -1)$.

$y = x - 2$

---

2 معادلة العمودي على المماس عند النقطة $(1, -1)$.

$y = -x$

2) جد معادلة المماس والعمودي على المماس لمنحنى $f(x) = \ln\sqrt{x}$ عند $x = e$

المماس $y = \frac{1}{2e}x$

العمودي $y = -2ex + 2e^2 + \frac{1}{2}$

3) إذا علمت أن $f(x) = \sin x - \cos x$ فإن معادلة العمودي عند $x = \pi$

a) $y = \pi - x + 1$ b) $y = x - \pi + 1$

c) $y = \pi + x + 1$ d) $y = -x - \pi - 1$

b

4) إذا كان $f(x) = \ln x$ أثبت أن المقطع x للعمودي على المماس لمنحنى الاقتران عند $(e,1)$ هو $e + \frac{1}{e}$

تدريب: إذا كان: $f(x) = \sin x + \frac{1}{2}e^x$،

1) أجد معادلة المماس لمنحنى الاقتران f عند النقطة $(\pi, \frac{1}{2}e^\pi)$.

$y = \left(-1 + \frac{1}{2}e^\pi\right)x + \pi - \frac{\pi}{2}e^\pi + \frac{1}{2}e^\pi$

2) أجد معادلة العمودي على المماس لمنحنى الاقتران f عند النقطة $(\pi, \frac{1}{2}e^\pi)$.

$y = \frac{2}{2-e^\pi}x - \frac{2\pi}{2-e^\pi} + \frac{1}{2}e^\pi$

مثال: إذا كان الاقتران: $f(x) = \ln x$،

أُثبِت أنَّ مماس منحنى الاقتران

عند النقطة $(e, 1)$ يمرُّ بنقطة الأصل.

مثال: أجد معادلة المماس لمنحنى

الاقتران: $f(x) = 2e^x + x$ عندما $x = 2$.

$y = (2e^2 + 1)x - 2e^2$

مثال إذا كان: $f(x) = \ln x^2$، حيث: $x > 0$،

1) أجد معادلة مماس منحنى الاقتران

عندما $x = e^2$.

$y = \frac{2}{e^2}x + 2$

---

2) أجد الإحداثي x للنقطة التي يكون المماس

عندها موازيًا للمستقيم $6x - 2y + 5 = 0$

$x = \frac{2}{3}$

تدريب: إذا كان: $f(x) = 2\sin x - 4\cos x$،

1) أجد ميل المماس لمنحنى

الاقتران $f(x)$ عندما $x = 0$.

2

---

2) أجد معادلة المماس لمنحنى

الاقتران $f(x)$ عندما $x = \frac{\pi}{2}$.

$y = 4x - 2\pi + 2$

ثانياً: ايجاد المعادلة (غير مباشر)

مفاتيح حل المسائل الهندسية:

✓ معادلة المماس (العمودي) المرسوم من نقطة، أو المار بنقطة (a, b) نتأكد أنها نقطة تماس.

(لم يعد مطلوب النقطة الخارجية)

✓ المماس أو المنحنى يقطع محور
- $x \leftarrow y = 0$
- $y \leftarrow x = 0$

✓ إذا كان منحنيين متقاطعين
- اقترانات $f = g$
- علاقات حذف أو تعويض

✓ إذا كان المنحنيين f,g (f ومماس) متماسين
- الصور متساوية $f(a) = g(a)$
- المشتقات متساوية $f'(a) = g'(a)$

✓ مصطلح متوازيين ← $m_1 = m_2$.

✓ مصطلح متعامدين ← $m_1 * m_2 = -1$.

✓ المماس الأفقي ← يوازي محور x ← $m = 0$.

✓ مصطلح متعامدين ← $m_1 * m_2 = -1$.

✓ المماس الأفقي ← يوازي محور x ← $m = 0$.

✓ المستقيم يوازي
- محور x يسمى أفقي: $y = y_1$ ← $m=0$
- محور y يسمى عمودي: $x = x_1$ ← $m =$ غ.م

مثال:

5) جد معادلة المماس والعمودي على المماس لمنحنى $f(x) = \sin x + \cos x$ عندما يقطع منحنى $f(x)$ محور x حيث $x \in [0, \pi]$

معادلة المماس $y = -\sqrt{2}\left(x - \frac{3\pi}{4}\right)$

معادلة العمودي $y = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x - \frac{3\pi}{4}\right)$

مثال:

جد معادلة المماس لمنحنى الاقتران

$f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$

عند النقطة التي يصبح عندها $f''(x) = 0$

Y=-3x+2

مثال:

اكتب معادلة العمودي على المماس لمنحنى

$f(x) = \sqrt{3}\sin x$ عند تقاطعه مع

$g(x) = \cos x$ حيث $x \in [0, \pi]$

معادلة المماس:

$$y - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$$

معادلة العمودي على المماس:

$$y - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{-2}{3}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$$

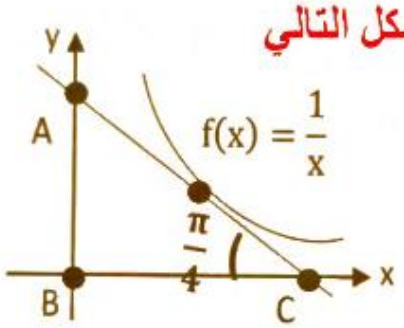
مثال:

جد معادلة المماس لمنحنى f(x) حيث $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 2x + 3$ عند النقطة التي يكون فيها المماس عمودي على المستقيم $y - 2x = 1$

$y+0.75= -0.5(x-3)$

مثال:

احسب مساحة المثلث ABC الموضح في الشكل التالي



2

مثال:

احسب مساحة المثلث المكون من المماس والعمودي على المماس لمنحنى $f(x) = x^2$ عند النقطة $(1\,,\,1)$ ومحور x

1.25

تدريب:

احسب مساحة المثلث المكوّن من المماس لمنحنى $f(x) = x^3 + x^2 - 1$ عند نقطة التماس $\left(1, f(1)\right)$ والمستقيمين $x = -2$ و $y = -1$

مثال:

إذا كان الاقتران $y = ke^x$ ، حيث: $k > 0$ ، وكان منحناه يقطع المحور y عند النقطة P ، فأجب عن السؤالين التاليين تباعاً:

a) جد نقطة تقاطع مماس منحنى الاقتران عند النقطة P مع المحور x .

$(-1,0)$

b) إذا كان العمودي على المماس عند النقطة P يقطع المحور x عند النقطة $(100\ ,0)$ فجد قيمة k .

10

تحدٍّ: إذا كان الاقتران: $y = e^x - ax$، حيث a عدد حقيقي، فأجـد معادلة المماس عند نقطة تقاطع الاقتران مع المحور y، مُبرِّرًا إجابتي.

$y = (1-a)x + 1$

ثالثاً:

تطبيقات الحركة في خط مستقيم

$S(t)$ موقع الجسم

$\downarrow$ نشتق $s' = \frac{ds}{dt}$

$V(t)$ السرعة المتجهة

$\downarrow$ نشتق $v' = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$

$a(t)$ التسارع

:

1) السرعة المتجهة $V(t)$ ، السرعة $|V(t)|$

2) في حالة السكون اللحظي ← $v = 0$

3) إذا كان V

$V > 0$ الجسم يتحرك مع اتجاه الحركة

$V < 0$ الجسم يتحرك عكس اتجاه الحركة

4) إذا طلب السؤال بأي اتجاه يتحرك الجسم نعوض الزمن بالسرعة

+ مع اتجاه الحركة

- عكس اتجاه الحركة

5) عندما يسأل متى يعود الجسم للموقع الابتدائي نعوض $S(0)$ ، ثم نساوي $S(t) = S(0)$

مثال

يُمثِّل الاقتران: $s(t) = 6t^2 - t^3, t \geq 0$ موقع جسم يتحرَّك في مسار مستقيم، حيث s الموقع بالأمتار، وt الزمن بالثواني:

1 أجد سرعة الجسم وتسارعه عندما $t = 2$.

سرعة الجسم عندما $t = 2$ هي $12\ m/s$، وتسارعه هو $0\ m/s^2$

2 أجد قِيَم t التي يكون عندها الجسم في حالة سكون لحظي.

$t = 0$، و$t = 4$.

3 في أيِّ اتجاه يتحرَّك الجسم عندما $t = 5$؟

-15

4 متى يعود الجسم إلى موقعه الابتدائي؟

يعود الجسم إلى موقعه الابتدائي بعد 6 s

تدريب (1):

يُمثِّل الاقتران: $s(t) = t^2 - 7t + 8, t \geq 0$

موقع جسم يتحرَّك في مسار مستقيم،

حيث s الموقع بالأمتار، و t الزمن بالثواني:

a) أجد سرعة الجسم وتسارعه عندما $t = 4$.

$v(4) = 1 \text{ m/s}$

$a(4) = 2 \text{ m/s}^2$

b) أجد قِيَم t التي يكون عندها الجسم في حالة سكون لحظي.

$t = \frac{7}{2} \text{ s}$

c) في أيِّ اتجاه يتحرَّك الجسم عندما $t = 2$؟

في الاتجاه السالب

d) متى يعود الجسم إلى موقعه الابتدائي؟

بعد 7 ثوانٍ

تدريب(2):

يُمثِّل الاقتران: $s(t) = t^3 - 4t^2 + 5t, t \geq 0$

موقع جسم يتحرَّك في مسار مستقيم،

حيث s الموقع بالأمتار، و t الزمن بالثواني:

1) أجد سرعة الجسم وتسارعه عندما $t = 5$.

$v(5) = 40 \text{ m/s}$

$a(5) = 22 \text{ m/s}^2$

2) أجد قِيَم t التي يكون عندها الجسم في حالة سكون لحظي.

$t = \frac{5}{3} \text{ s}$,$t = 1 \text{ s}$

3) في أيِّ اتجاه يتحرَّك الجسم عندما $t = 4$؟

في الاتجاه الموجب

4) متى يعود الجسم إلى موقعه الابتدائي؟

لا يعود الجسم إلى موقعه الابتدائي أبدًا.

مثال :

يُمثِّل الاقتران: $s(t) = e^t - 4t, t \geq 0$

موقع جُسَيْم يتحرَّك في مسار مستقيم،

حيث s الموقع بالأمتار، و t الزمن بالثواني:

1) أُحدِّد الموقع الابتدائي للجُسَيْم.

1m

2) أجد تسارع الجُسَيْم عندما تكون سرعته صفرًا.

$4\ m/s^2$

تدريب(3) :

يتحرك جسم حسب العلاقة

$$s(t) = 6t^2 - \frac{1}{3}t^3, \quad t \geq 0$$

جد تسارع الجسم عندما تنعدم سرعته

-12

مثال(سوبر)

يُمثِّل الاقتران: $s(t) = 4 - \sin t, t \geq 0$

موقع جُسَيْم يتحرَّك في مسار مستقيم،

حيث s الموقع بالأمتار، و t الزمن بالثواني:

1) أجد سرعة الجُسَيْم وتسارعه بعد t ثانية.

$v(t) = -\cos t$

$a(t) = \sin t$

2) أجد موقع الجُسَيْم عندما كان في حالة سكون لحظي أوَّل مَرَّة بعد انطلاقه.

3m

3) أجد موقع الجُسَيْم عندما يكون تسارعه صفرًا، مُبرِّرًا إجابتي.

S=4m

تدريب(4) :

يُمثِّل الاقتران: $s(t) = 3t^2 - t^3, t \geq 0$

موقع جُسَيْم يتحرَّك في مسار مستقيم،

حيث s الموقع بالأمتار، و t الزمن بالثواني:

1) أجد سرعة الجُسَيْم وتسارعه بعد t ثانية.

$v(t) = 6t - 3t^2$

$a(t) = 6 - 6t$

2) أجد الموقع (المواقع) الذي يكون عنده الجُسَيْم في حالة سكون لحظي.

عندما يكون في كل من الموقعين: $s = 0$ m, $s = 4$ m

"أنا في صَفِّ الأمَل مهمَا ثقل الحِمل وجَفّ الطريق."

وزاري (جميل)

يتحرك جسم حسب العلاقة

$s(t) = t^3 - 3t^2 + 3t + 3$ أثبت أن الجسم

يتوقف دون أن يغير اتجاه حركته

$v > 0$ قبل وبعد 1 ثانية لايتغير اتجاه الحركة

تدريب(5)

تدريب يمثل الاقتران $s(t) = t^2 - 7t + 8$ موقع جسم يتحرك على خط مستقيم، جـد:

a) سرعة الجسم المتجهة وتسارعه عندما $t = 4$

b) الزمن t عندما يكون الجسم في السكون اللحظي

c) في أي اتجاه يتحرك الجسم عندما $t = 2$

d) متى يعود الجسم لموقعه الابتدائي

رابعاً: تطبيقات الحركة التوافقية البسيطة

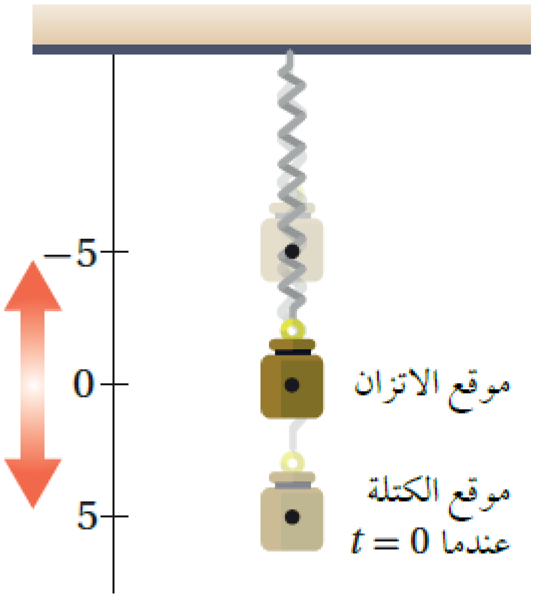
هي مسائل حركة تصف إزاحة جسم بالنسبة للزمن، وتكون بصيغة $s(t) = a \sin wt$

أو $s(t) = a \cos wt$

مثل حركة اهتزاز كتلة معلقة بزنبرك

مثال

زنبرك: يُبيِّن الشكل المجاور جسمًا مُعلَّقًا بزنبرك، شُدَّ 5 وحدات أسفل موقع الاتزان $(s = 0)$، ثم تُرِك عند الزمن $t = 0$ ليتحرَّك إلى الأعلى وإلى الأسفل. ويُمثِّل الاقتران: $s(t) = 5 \cos t$ موقع الجسم عند أيِّ زمن لاحق، حيث t الزمن بالثواني، وs الموقع بالسنتيمترات:



1) جد اقتران السرعة المتجه والتسارع

$v(t) = -5 \sin t$

$a(t) = -5 \cos t$

2) أعطي وصف للحركة

2) السرعة بدلالة $\sin t$ وأكبر وأصغر قيمة

لـ $\sin t$ ← $1 , -1$ $\quad |\sin t| = 1$

وبهذه الحالة $\cos t = 0$ لأن

$\sin^2 t + \cos^2 t = 1$

وإذا كان $\cos t = 0 \quad \rightarrow \quad \sin t = \pm 1$

أي أن $s(t) = 0$

عند وصف الحركة فإننا

- نحدد أعلى وأدنى موقع للجسم يتحرك بين s_1 و s_2 حسب الخصائص الجبرية لل $\sin \theta$، $\cos \theta$
- نحدد الموقع التي تكون عنده السرعة أكبر ما يمكن أيضاً بالاعتماد على الخصائص الجبرية
- نصف التسارع وعلاقته بالإزاحة (علاقة عكسية) ونحدد متى التسارع = صفر

- بالاعتماد على الخصائص الجبرية حيث

$$-1 \le \cos t \le 1$$

$$-5 \le 5 \cos t \le 5$$

فإن الجسم يتحرك بين $s = 5 \quad , \quad s = -5$

على المحور s:
- S (+) تحت موقع الاتزان
- S (-) فوق موقع الاتزان

- $v(t) = -5\sin t$

تكون قيمة السرعة القياسية أكبر ما يمكن في كل من الاتجاه الموجب والسالب

عندما $|\sin t| = 1$ $\left.\begin{matrix} V = -5 \\ V = 5 \end{matrix}\right\}$

وعندما $|\sin t| = 1$ ← $\cos t = 0$

لأن $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$

$$\cos^2 t = 0 \;\rightarrow\; \cos t = 0$$

$$s = 0$$

ما يعني أن سرعة الجسم القياسية أكبر ما يمكن عندما يمر الجسم بموقع الاتزان

- $a(t) = -5\cos t$

قيمة التسارع تكون دائماً معكوس قيمة موقع الجسم، لأن محصلة القوى تسحب الجسم إلى الأسفل إذا كان أعلى موقع الاتزان ، وأن محصلة القوى تسحب الجسم إلى الأعلى إذا كان أسفل موقع الاتزان

عند موقع الاتزان $s = 0$

$$5\cos t = 0 \;\rightarrow\; \cos t = 0$$

$$\therefore \quad a(t) = 0$$

أي التسارع عند الاتزان = صفر ، لأن قوة الجاذبية وقوة الزنبرك تلغي إحداهما الأخرى. أما في المواقع الأخرى لاتساوي صفراً

تدريب:

يتحرك جسم معلق إلى الأعلى وإلى الأسفل ويمثل الاقتران $s(t) = 7\sin t$ موقع الجسم عند أي زمن لاحق، حيث t بالثواني ، و s الموقع بالأمتار.

1) جد اقتران السرعة المتجه والتسارع

2) أعطي وصف للحركة

مثال:

يتحرَّك جسم مُعلَّق بزنبرك إلى الأعلى وإلى الأسفل، ويُحدِّد الاقتران: $s(t) = 4 \cos t$ موقع الجسم عند أيِّ زمن لاحق، حيث t الزمن بالثواني، وs الموقع بالأمتار:

1) أجد اقترانًا يُمثِّل سرعة الجسم، واقترانًا آخرَ يُمثِّل تسارعه عند أيِّ لحظة.

---

2) أجد سرعة الجسم وتسارعه عندما $t = \frac{\pi}{4}$.

---

3) أَصِف حركة الجسم.

ورقة عمل (1)

السؤال الأول:

-1

أيُّ الآتيـة تُمثِّل معادلـة العمودي على الممـاس لمنحنـى الاقتـران: $f(x) = \sin x + \cos x$ عندمـا $x = \pi$؟

a) $y = -x + \pi - 1$ b) $y = x - \pi + 1$

c) $y = x - \pi - 1$ d) $y = x + \pi + 1$

2) إذا علمت أن $f(x) = \ln\left(\frac{x}{e}\right)$ ، فإن $f'(1)$ تساوي:

a) -1 b) 1 c) 0 d) 2

3) إذا علمت أن $f(x) = \frac{e^{2x}-4}{e^{x}-2}$ ، فإن $f'(\ln 2)$ تساوي:

a) 2 b) -2 c) e^2 d) $-e^2$

4) إذا علمت أن $f(x) = \frac{1-\cos 2x}{\sin^3 x}$ ، فإن $f'(x)$ تساوي:

a) $2\csc x$ b) $-2\csc x\cot x$

c) $2\csc x\cot x$ d) $2\sec x\tan x$

5) إذا علمت أن $y = \sqrt{2}\sin x - \sqrt{3}\cos x$ ، فإن $(y')^2 + y^2$ تساوي:

a) 1 b) 5

c) -5 d) $2(\sqrt{3}+\sqrt{2})$

6) إذا علمت أن $f(x) = \frac{\pi}{\sec x}$ فإن $f'\left(\frac{\pi}{6}\right)$ يساوي

a) $\frac{\pi\sqrt{3}}{2}$ b) $\frac{-\pi\sqrt{3}}{2}$ c) $\frac{\pi}{2}$ d) $\frac{-\pi}{2}$

7) إذا كان $y = \frac{2-\cos\frac{\pi}{2}}{\cos x}$ فإن $\frac{dy}{dx}$ تساوي:

a) 0 b) $\sec x\tan x$

c) $2\sec x\tan x$ d) $-2\sec x\tan x$

السؤال الثاني:

جد معادلة المماس لمنحنى $f(x) = \sqrt{x^2+8}$ حيث مماسه يصنع زاوية $\frac{\pi}{6}$ مع محور x بالاتجاه الموجب

السؤال الثالث:

احسب مساحة المثلث المكوّن من المماس والعمودي على المماس لمنحنى $f(x) = x^2 - 1$ عند النقطة $x = -1$ والمستقيم $(1,0)$.

السؤال الرابع:

جد معادلة المماس لمنحنى $f(x) = 2x^2 - 8x$
عند نقطتي تقاطع منحناه مع محور x .

السؤال الخامس:

أثبت عدم وجود مماس ميله 4 للاقتران

$$f(x) = e^x + x^5 + 5x$$

السؤال السادس:

إذا علمت أن $f(x) = \ln(x) + e^{(x-1)} + x - 2$

a) جد معادلة المماس لمنحنى $f(x)$ عندما $x = 1$

b) جد المقطعين x , y لمعادلة المماس