الدرس 3

حلُّ المعادلات المثلثية
Solving Trigonometric Equations

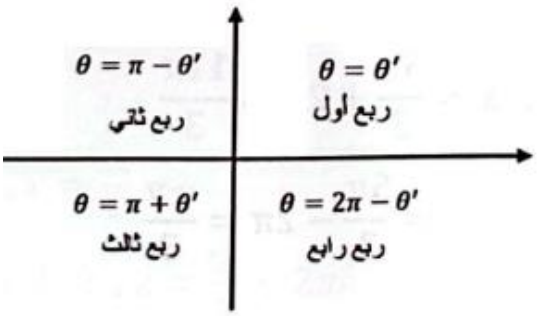
1. المعادلة المثلثية الأساسية
2. المعادلة المثلثية التي تحوي اقتران مثلثي واحد
3. المعادلة المثلثية التي تحوي أكثر من اقتران مثلثي
4. حل المعادلة المثلثية باستعمال المتطابقات
5. حل المعادلة المثلثية بتربيع طرفي المعادلة

الجزء الأول
المعادلة المثلثية الأساسية

المعادلة المثلثية هي المعادلة التي تحوي على اقترانات مثلثية

والفرق بين المعادلة المثلثية والمتطابقة المثلثية هو أن المتطابقة صحيحة لجميع قيم المتغير.

بينما المعادلة المثلثية تكون صحيحة لبعض القيم فقط.



هام جداً إذا كان

θ' : زاوية مرجع.

θ : الزاوية.

* المعادلة المثلثية الأساسية:

هي المعادلة المثلثية على صورة: اقتران مثلثي = عدد

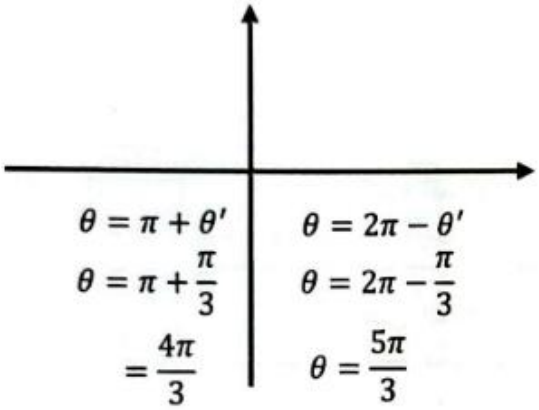
مثال تمهيدي

أجد حل المعادلة المثلثية. $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

الحل

خطوة (1) نحدد الأرباع حسب الإشارة.

وبما أن ال $\sin x$ سالب يكون في الربع الثالث والرابع.



خطوة (2) نحدد زاوية المرجع (مع إهمال الإشارة)

$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ وبالتالي المرجع هي $\theta' = \frac{\pi}{3}$

خطوة (3) نطبق القواعد السابقة.

وبالتالي $x = \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$

وهذا يسمى بالحل الأولي للمعادلة في الفترة $[0,2\pi)$.

خطوة (4) نجد جميع حلول المعادلة بإضافة العدد (2π) كما يلي.

$$x = \frac{4\pi}{3} + 2\pi k \quad , \quad x = \frac{5\pi}{3} + 2\pi k$$

حيث k: عدد صحيح (موجب أو سالب) وهو يمثل عدد الدورات المضافة.

$$k = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

توضيح غير تابع للحل:

$$k = 0 \rightarrow x = \frac{4\pi}{3} \quad , \quad x = \frac{5\pi}{3}$$

$$k = 1 \rightarrow x = \frac{4\pi}{3} + 2\pi = \frac{10\pi}{3} \quad , \quad x = \frac{5\pi}{3} + 2\pi = \frac{11\pi}{3}$$

$$k = -1 \rightarrow x = \frac{4\pi}{3} - 2\pi = \frac{-2\pi}{3} \quad , \quad x = \frac{5\pi}{3} - 2\pi = \frac{-\pi}{3}$$

وهكذا...

ملحوظة **يمكن كتابة الحل أما بالدرجات أو بالراديان.**

$$x = 240° + 360°k$$

$$x = 300° + 360°k$$

مثال 1

أحُلُّ كل معادلة ممّا يأتي:

1 $\sin x = \frac{1}{2}$

$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$

---

2 $\cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$, $x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$

أتحقَّق من فهمي

أحُلُّ كل معادلة ممّا يأتي:

a) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$, $x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$

b) $\cos x = \frac{1}{2}$

$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad , \quad x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$

مثال : أحُلُّ كُلًّا من المعادلات الآتية لقِيَم x جميعها:

1 $2\sin x + 3 = 2$

$x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \quad , \quad x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi$

---

2 $1 - \cos x = \frac{1}{2}$

$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad , \quad x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi$

1 $3\sin x - 2 = 5\sin x - 1$

$x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$, $x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi$

9 $3\sqrt{2}\cos x + 2 = -1$

$x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$, $x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$

7 $\cot x + 1 = 0$

$x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$

هام جداً

في حالة tan فقط

عندما tan موجب نأخذ الربع الأول فقط

وعندما tan سالب نأخذ الربع الثاني فقط.

وهذا فقط عندما نضيف دورات(πk) ودورة tan هي دائماً (πk)

لاحظ $x = \frac{3\pi}{4} + \pi k$

ربع ثاني $k = 0 \rightarrow x = \frac{3\pi}{4}$

ربع رابع $k = 1 \rightarrow x = \frac{3\pi}{4} + \pi = \frac{7\pi}{4}$

وبالتالي لا داعي للربع الرابع لأنها مكرره من الربع الثاني.

---

2 $\tan^2 x - 3 = 0$

$x = \frac{\pi}{3} + k\pi \quad , \quad x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$

---

6 $\sec^2 x - 2 = 0$

$x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \quad , \quad x = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi,$

تدريب : أحُلُّ كُلًّا من المعادلات الآتية لقِيَم x جميعها:

a) $5\sin x = 3\sin x + \sqrt{3}$

$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \ , \ x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$

---

b) $2\cos^2 x - 1 = 0$

$x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \ , \ x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \ , \ x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi, \quad \frac{7\pi}{4} + 2k\pi$

---

8 $\csc^2 x - 4 = 0$

$x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \ , \ x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi$

تدريب : أي من القيم الآتيه لا تمثل حل للمعادلة $\tan x = 1$

a) $\frac{-7\pi}{4}$ b) $\frac{3\pi}{4}$ c) $\frac{5\pi}{4}$ d) $\frac{\pi}{4}$

b) $\frac{3\pi}{4}$

ملحوظة هامة

إذا كان $cos = \{-1, 0, 1\}$ أو sin تكون زوايا محورية وليس أرباع.

$tan = \{0, \text{غير معرف}\}$

مثال : أحُلُّ كُلًّا من المعادلات الآتية لقِيَم x جميعها:

1) $\sin x = 1$

$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$

---

2) $cos\, x = -1$

$x = \pi + 2\pi k$

3) $\sin x = 0$

$$x = \pi + 2\pi k$$

---

4) $\cos x = 0$

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k$$

---

5) $\tan x = 0$

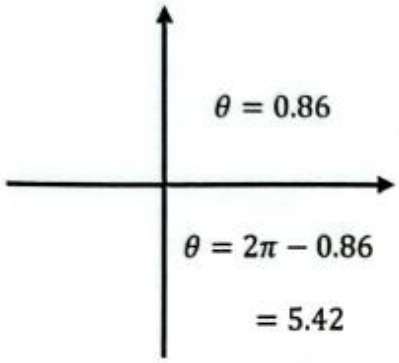
$$x = 0 + \pi k = \pi k$$

ملاحظة : تعلَّمْتُ في المثال السابق حلَّ معادلات مثلثية أساسية لنسب مثلثية ذات زوايا خاصة. ولكنْ، إذا لم تكن الزوايا معروفة، فيُمكِنني استعمال الآلة الحاسبة لإيجادها.

مثال

أحُلُّ كل معادلة ممّا يأتي:

1 $\cos x = 0.65$



الحل

انتبه يجب ضبط الآلة الحاسبة أولاً على وحدة الراديان كما يلي

نضغط على كبسة mode مرتين متتاليتين ثم نختار rad رقم (2)،

نجد زاوية المرجع باستخدام الآلة الحاسبة

$$\theta' = \cos^{-1}(0.65) \cong 0.86$$

$$x = 0.86 \ , \ x = 5.42$$

$$x = 0.86 + 2\pi k, \ x = 5.42 + 2\pi k$$

انتبه عند إيجاد $(2\pi - 0.86)$, في هذه الحالة $\pi \cong 3.14$

ولكن يوجد كبسة على الآلة خاصة في π ولكن نحتاج الى shift.

---

2 $\tan x = -2$

$$x \approx -1.1 + k\pi$$

أتحقَّق من فهمي

أحُلُّ كل معادلة ممّا يأتي:

a) $\sin x = 0.23$

$x \approx 0.23 + 2k\pi \quad , \quad x \approx 2.91 + 2k\pi$

---

b) $\tan x = -10$

$x \approx -1.47 + k\pi$

---

5 $\tan x = 5$

$x = 1.37 + k\pi$

تدريب : أحُلُّ كُلًّا من المعادلات الآتية لقِيَم x جميعها:

3 $\sin x = -0.3$

$x = 3.45 + 2k\pi \ , \ x = 5.98 + 2k\pi$

---

4 $\cos x = 0.32$

$x = 1.25 + 2k\pi \ , \ x = 5.04 + 2k\pi$

"الرياضيات ليست أرقامًا جامدة، بل هي لغة للفكر؛ كل مسألة تُحل تفتح لك نافذة جديدة لرؤية العالم بعمق أوضح."

مثال

أجد حل المعادلة المثلثية $\sin 2x = \frac{1}{2}$ لجميع قيم x. (انتبه جيداً)

الحل

$$x = \frac{\pi}{12} + \pi k \ , \quad x = \frac{5\pi}{12} + \pi k$$

هام جداً إذا طلب السؤال حل المعادلة المثلثية ضمن الفترة $[0, 2\pi)$ وكانت الزاوية (x) أو معامل (x) أقل من واحد مثل الزاوية $\frac{x}{2}$ أو الزاوية $\frac{x}{3}$ في مثل هذه الحالة نكتفي بالحل الأولي ولا نضيف دورات.

بينما إذا كان معامل (x) أكبر من واحد مثل الزاوية $(2x)$ أو الزاوية $(3x)$ في مثل هذه الحالة نضيف دورات ثم نعوض قيم k والمثال التالي يوضح ذلك.

مثال

أحُلُّ المعادلة: $2 \sin \frac{x}{2} - \sqrt{3} = 0$ في الفترة $[0, 2\pi)$.

$x = \frac{2\pi}{3} , x = \frac{4\pi}{3}$.

مثال : أحُلُّ كُلًّا من المعادلات الآتية في الفترة $[0, 2\pi)$:

6 $\sqrt{3}\tan\frac{x}{2} - 1 = 0$

حل المعادلة $x = \left\{\frac{\pi}{3}\right\}$

أتحقَّق من فهمي

أحُلُّ المعادلة: $2\cos 2x = 1$ في الفترة $[0, 2\pi)$.

$x = \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{5\pi}{6}$, $x = \frac{7\pi}{6}$, $x = \frac{11\pi}{6}$

أتحقَّق من فهمي

أحُلُّ المعادلة: $2\cos\frac{x}{2}-1=0$ في الفترة $[0,2\pi)$.

$$x=\frac{2\pi}{3}\quad,\quad x=\frac{10\pi}{3}$$

الجزء الثاني
المعادلة المثلثية التي تحوي اقتران مثلثي واحد

مثال : أحُلُّ كُلًّا من المعادلات الآتية في الفترة $[0,2\pi)$:

12 $2\cos^2 x+\cos x=0$

$$x=\frac{\pi}{2}\quad,\quad x=\frac{3\pi}{2}\quad,\quad x=\frac{2\pi}{3}\quad,\quad x=\frac{4\pi}{3}$$

تحذير هام

لا يجوز قسمة المعادلة على $\cos x$ ثم حلها لأنه بذلك نخسر أحد الحلول ويكون الحل غير مكتمل.

1 $2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$

$.x = \frac{\pi}{6}, x = \frac{5\pi}{6}, x = \frac{\pi}{2}$

---

11 $3\sin^2 x - 7\sin x + 2 = 0$

$x = 0.34$ ، $x = 2.8$

13 $\tan^4 x - 13\tan^2 x + 36 = 0$

$x = 1.11$, $x = 2.03$, $x = 4.25$, $x = 5.18$

$x = 1.25$, $x = 1.89$, $x = 4.39$, $x = 5.03$

تدريب : أحُلُّ كُلًّا من المعادلات الآتية في الفترة $[0, 2\pi)$:

a) $2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$

$x = \frac{7\pi}{6}$, $x = \frac{11\pi}{6}$, $x = \frac{\pi}{2}$

b) $5\sin x = 3\sin x + \sqrt{3}$

$\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$

---

3 $\frac{1+\cot^2 x}{\cot^2 x} = 2$

$x = \frac{\pi}{4}$, $x = \frac{3\pi}{4}$, $x = \frac{5\pi}{4}$, $x = \frac{7\pi}{4}$

الجزء الثالث
المعادلة المثلثية التي تحوي أكثر من اقتران مثلثي

مثال : أحُلُّ كل معادلة ممّا يأتي في الفترة $[0, 2\pi)$:

b) $\sin x \cos x = 2 \sin x$

$x = 0 \ , \ x = \pi$

---

15 $\tan^2 x \cos x = \tan^2 x$

$x = 0 \ , \quad x = \pi$

10 $\cos 2x - 2\sin 2x \cos 2x = 0$

$x = \frac{\pi}{4}$, $x = \frac{3\pi}{4}$, $x = \frac{5\pi}{4}$, $x = \frac{7\pi}{4}$

$x = \frac{\pi}{12}$, $x = \frac{5\pi}{12}$, $x = \frac{13\pi}{12}$, $x = \frac{17\pi}{12}$

20 $4\sin x\cos x + 2\sin x - 2\cos x - 1 = 0$

حل المعادلة هو $x = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right\}$

---

11 $4\sin x\cos x - 2\sqrt{3}\sin x - 2\cos x + \sqrt{3} = 0$

حل المعادلة هو $x = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}$

14 $\sin x+2\sin x\cos x=0$

$$x=\left\{0,\pi,\frac{2\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\right\}$$

الجزء الرابع
حل المعادلات المثلثية باستعمال المتطابقات المثلثية

تحوي بعــض المعادلات المثلثية اقترانًــا مثلثيًّا أو أكثر، ولكنْ يتعــذَّر فصل هذه الاقترانات بالتحليل؛ لذا يُمكِن حلُّها باستعمال المتطابقات المثلثية، إضافةً إلى بعض العمليات الجبرية.

مثال : أحُلُّ كل معادلة ممّا يأتي في الفترة $[0, 2\pi)$: **(متطابقات فيثاغورس)**

1 $2\cos^2 x + 3\sin x = 0$

$x = \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$

10 $\cos^2 x - \sin^2 x + \sin x = 0$

حل المعادلة هو $x = \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}$

28 $2\sin^2\frac{x}{2} - 3\cos\frac{x}{2} = 0$

حل المعادلة $x = \left\{\frac{2\pi}{3}\right\}$

4 $3\cos^2 x = \sin^2 x$

حل المعادلة $x = \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$

17 $\tan^2 x - 2\sec x = 2$

$x = \pi$, $x = 1.23$, $x = 5.05$

18 $\csc^2 x = \cot x + 3$

حل المعادلة $x = \left\{\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, 0.46, 3.6\right\}$

9 $\frac{1}{1-\sin x} + \frac{1}{1+\sin x} = 5$

$x = 0.87\,,\quad x = 5.40\,,\quad x = 2.26,\quad x = 4.03$

7 $\cot^2 x + 5 \csc x = 5$

$x = \left\{\frac{\pi}{2}, 3.31, 6.11\right\}$

مثال : أحُلُّ كل معادلة ممّا يأتي في الفترة $[0, 2\pi)$ (متطابقات ضعف الزاوية)

25 $\sin 2x + \cos x = 0$

حل المعادلة $x = \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}$

مثال

أحُلُّ المعادلة: $\cos x \sin x = -\frac{1}{2}$ في الفترة $[0, 2\pi)$.

$x = \frac{3\pi}{4}, x = \frac{7\pi}{4}$.

---

27 $2\sin^2 x = 2 + \cos 2x$

حل المعادلة $x = \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$

30 $\cos 2x = \cos x$

حل المعادلة $x = \left\{0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right\}$

مثال

أحُلُّ المعادلة: $2 \sin 2x - 3 \sin x = 0$ في الفترة $[0, 2\pi)$.

$x = \{0, \pi, 0.72, 5.56\}$

(متطابقات أخرى)

مثال أجد حل كل من المعادلات المثلثية الآتية ضمن الفترة $[0, 2\pi)$.

12 $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$

حل المعادلة $x = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right\}$

26 $\tan\frac{x}{2} - \sin x = 0$

حل المعادلة $x = \left\{0, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$

تدريب :

خارجي 1) حل المعادلة $\sin 5x\cos 4x-\cos 5x\sin 4x=\frac{-1}{2}$, $[0,2\pi)$ هو:

a) $\frac{11\pi}{6},\frac{19\pi}{6}$ b) $\frac{5\pi}{6},\frac{\pi}{6}$

c) $\frac{7\pi}{6},\frac{5\pi}{6}$ d) $\frac{7\pi}{6},\frac{11\pi}{6}$

خارجي 2) حل المعادلة $\frac{\tan 8x-\tan 7x}{1+\tan 8x\tan 7x}=1$, $[0,2\pi)$ هو:

a) $\frac{5\pi}{4},\frac{7\pi}{4}$ b) $\frac{7\pi}{4},\frac{3\pi}{4}$

c) $\frac{\pi}{4},\frac{13\pi}{4}$ d) $\frac{5\pi}{4},\frac{\pi}{4}$

خارجي 3) حل المعادلة $\sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right)+\sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=1$, $[0,2\pi)$ هو:

a) $\{0,\pi,2\pi\}$ b) $\{0,2\pi\}$ c) $\{0\}$ d) $\left\{\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{3}\right\}$

1) d) $\frac{7\pi}{6},\frac{11\pi}{6}$ 2) d) $\frac{5\pi}{4},\frac{\pi}{4}$ 3) c) $\{0\}$

في الأرقام سرّ يفكُّ القيودا ✦ ويهدي العقولَ دروبًا جديدة

رياضُ المعاني إذا ما ارتشفنا ✦ نرى الكونَ علماً ونبني عقيدا

الجزء الخامس
حل المعادلة المثلثية بتربيع طرفي المعادلة

مقدمة هامه إذا كانت المعادلة على صورة $a\sin\theta + b\cos\theta = c$

الفكرة نقوم بتربيع طرفي المعادلة بهدف الحصول على متطابقات فيثاغورس وغيرها واستخدامها في الحل.

تحذير هام

في حاله تربيع طرفي المعادله يجب التحقق من صحه الحل وذلك بتعويض الحل النهائي في المعادله الاصل لانه ليس بالضروره ان جميع الحلول الناتجه تحقق المعادله والامثله الاتيه توضح ذلك .

مثال

أحُلُّ المعادلة: $\cos x + 1 = \sin x$ في الفترة $[0, 2\pi)$.

$x = \pi , x = \frac{\pi}{2}$.

2) $\cos x - 1 = \sin x$

$$x = \left\{0, \frac{3\pi}{2}\right\}$$

---

1 $\sin x + \cos x = \frac{\sqrt{6}}{2}$

حل المعادلة هو $x = \left\{\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}\right\}$

هام جداً إذا كانت المعادلة على صورة $a\sin\theta + b\cos\theta = 0$ أي أنه لا يوجد حد ثابت

فإنه يمكن الحل على الطريقة السابقة، ولكن يوجد طريقة أسهل للحل وهي الوصول الى $\tan\theta$ وذلك بقسمة المعادلة على $\cos\theta$ وبالتالي تصبح المعادلة بدلالة اقتران مثلثي واحد فقط وفي هذه الحالة لا داعي للتحقق من صحة الحل.و الأمثلة التالية توضح ذلك.

مثال :

أحُلُّ كُلًّا من المعادلات الآتية في الفترة $[0, 2\pi)$:

29 $\sin x - \sqrt{3}\ \cos x = 0$

حل المعادلة هو $x = \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right\}$

---

19 $\sin 2x = 3\cos 2x$

$x = 0.62\ ,\quad x = 2.2\ ,\quad x = 3.77,\quad x = 5.34$

2 $\cot x - \csc x = \sqrt{3}$

$x = \frac{4\pi}{3}$

تدريب : أجد الحل العام للمعادلة المثلثية $\sin x + 2\cos x = 0$

$a)\ 1.11 + \pi k$ $b)\ 2.12 + \pi k$ $c)\ -1.11 + \pi k$ $d)\ -2.21 + \pi k$

$c)\ -1.11 + \pi k$

أسئلة متفرقة :

تبرير: إذا كان: $\sin(A+B) = 2\sin(A-B)$، فأُجيب عن السؤالين الآتيين، ثمَّ أُبرِّر إجابتي:

17 أُثبِت أنَّ: $\tan A = 3\tan B$.

18 أحُلُّ المعادلة: $\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$، حيث: $0\le x<2\pi$.

حل المعادلة هو $x=\left\{\frac{\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\right\}$

33 تبرير: أجد جميع الحلول المُمكِنة للمعادلة: $\sin(\cos x)=0$، ثمَّ أُبرِّر إجابتي.

$x=\frac{\pi}{2}+2\pi k$ ، $x=\frac{3\pi}{2}+2\pi k$

تبرير: إذا كان: $\tan x+\frac{k}{\tan x}=2$، حيث k ثابت، فأُجيب عمّا يأتي:

31 أُثبِت عدم وجود حلٍّ للمعادلة عندما $k>1$، ثمَّ أُبرِّر إجابتي.

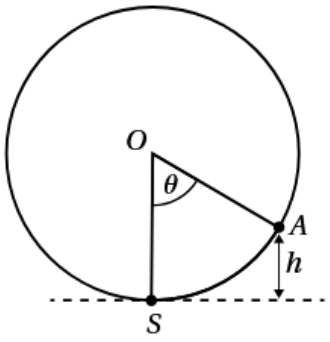
32 أحُلُّ المعادلة عندما $k = -8$، حيث: $-\pi < x < \pi$، ثمَّ أُبرِّر خطوات الحلِّ.

$x = 1.33$, $x = -1.82$, $x = -1.11$, $x = 2.03$

24 **زنبرك:** تعطى الإزاحة لزنبرك نابض باستعمال العلاقة: $y = 4\,e^{-3t}\sin 2\pi t$. ما الأوقات (قِيَم t) التي يكون فيها الزنبرك في وضعية الراحة $(y = 0)$؟

قيم t هي $t = \left\{k, \frac{1}{2} + k\right\}$ حيث $k = \{0,1,2,\dots\}$ لأنه لا يوجد زمن سالب.

ترفيه: يُمثِّل الشكل المجاور دولابًا دوّارًا في مدينة ألعاب يدور بسرعة ثابتة، وتُمثِّل S نقطة صعود الراكب الذي موقعه الآن هو A، في حين تُمثِّل النقطة O مركز الدولاب. إذا دار الدولاب بزاوية θ، فإنَّ ارتفاع الراكب عن الأرض h بالأمتار يعطى بالعلاقة: $h = 67.5 - 67.5\cos\theta$، حيث θ بالراديان:



13 أجد طول قُطْر الدولاب.

$= 135\ m$

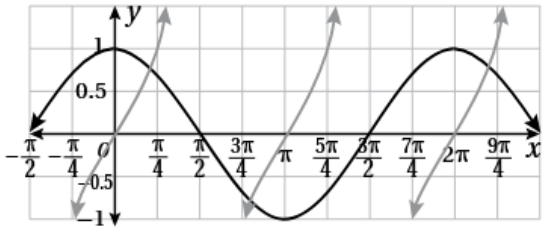
14 إذا علمْــتُ أنَّ الرحلة في هذه اللعبة تُمثِّل دورة واحدة، وأنَّها تســتغرق 30 دقيقة، فكم دقيقــةً تَلزم للوصول إلى ارتفاع 100 متر فوق سطح الأرض؟

$$T_1 = \frac{2.07 \times 30}{2\pi} \approx 9.88\ min$$
$$T_2 = \frac{4.21 \times 30}{2\pi} \approx 20.1\ min$$

34 تحدٍّ: أحُلُّ المعادلة: $\tan x + \cot x = 5$، حيث: $0 \le x < 2\pi$.

حل المعادلة هو $x = \{0.21, 1.37, 3.35, 4.51\}$

يُمثِّل الشكل المجاور منحنيي المعادلتين: $y = \cos x$، و $y = \tan x$:



15 كم حلًّا يوجد للمعادلة: $\cos x = \tan x$ في الفترة $[0, 2\pi)$؟

16 أجد أصغر حلٍّ موجب للمعادلة.

15 يتقاطع المنحنيان في الفترة $[0, 2\pi)$ مرتان، إذن، يوجد حلان لهذه المعادلة في الفترة المذكورة.

16 $x \approx 0.67$

أطوار القمر: عندما يدور القمر حول الأرض، فإنَّ الجانب المُواجِه للأرض يكون في الغالب مضاءً جزئيًّا بواسطة الشمس. تَصِف أطوار القمر مقدار الجزء الظاهر من سطحه بسبب سقوط ضوء الشمس عليه، ويعطى مقياس فلكي للطور بالعلاقة: $F=\frac{1}{2}(1-\cos\theta)$، حيث θ الزاوية بين الأرض والشمس والقمر $(0^\circ \le \theta \le 360^\circ)$. أجد قياس الزاوية θ لكل طور ممّا يأتي:

21 القمر الجديد $(F=0)$.

22 الهلال $(F=0.25)$.

23 القمر المُكتمِل $(F=1)$.

21 $\theta=\{0^\circ,360^\circ\}\rightarrow\theta=\{0,2\pi\}$

22 $\theta=\{60^\circ,300^\circ\}\rightarrow\theta=\left\{\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{3}\right\}$

23 $\theta=\{180^\circ\}\rightarrow\theta=\{\pi\}$

تدريب :

أحُلُّ المعادلة: $2\cos^2 x + \sin x = 1$ في الفترة $[0, 2\pi)$.

$x = \frac{7\pi}{6}$ ، $x = \frac{11\pi}{6}$ ، $x = \frac{\pi}{2}$

تدريب :

أحُلُّ كُلًّا من المعادلات الآتية في الفترة $[0, 2\pi)$:

5 $3 \sin 3x + 4 \cos 3x = 0$

$x = 0.74,\quad x = 1.79,\quad x = 2.83$
$x = 3.88,\quad x = 4.93,\quad x = 5.96$

---

8 $4 \sec^2 x - 9 \sec x = -2$

$x = \frac{\pi}{3},\ x = \frac{5\pi}{3}$