الدرس 2

المتطابقات المثلثية 2
Trigonometric Identities 2

1. المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية
2. المتطابقات المثلثية لتقليص القوة
3. المتطابقات المثلثية لنصف الزاوية
4. متطابقات تحويل الضرب الى مجموع أو فرق
5. متطابقات تحويل المجموع أو الفرق الى الضرب

الجزء الأول
متطابقات ضعف الزاوية

تذكير !!! الضعف هو العدد مضروب في (2).

المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية

تُستعمَل متطابقات ضعف الزاوية لإيجاد قيمة اقتران مثلثي عند الزاوية 2θ باستعمال قيمة الاقتران عند الزاوية θ.

مفهوم أساسي المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية

صيغة الجيب	صيغ جيب التمام	صيغة الظلّ
$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$	$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$ $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$ $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$	$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$

انتبه

$$\sin 4\theta = 2\sin 2\theta \cos 2\theta$$

$$\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

$$\cos 6\theta = \cos^2 3\theta - \sin^2 3\theta$$

مثال

إذا كان: $\sin\theta = \frac{3}{5}$، حيث: $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$،

فأجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي:

1 $\sin 2\theta$

$-\frac{24}{25}$

2 $\cos 2\theta$

$\frac{7}{25}$

3 $\tan 2\theta$

$-\frac{24}{7}$

أتحقَّق من فهمي

إذا كان: $\cos\theta = -\frac{2}{3}$، حيث: $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$،

فأجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي:

a) $\sin 2\theta$

$-\frac{4\sqrt{5}}{9}$

b) $\cos 2\theta$

$-\frac{1}{9}$

c) $\tan 2\theta$

$4\sqrt{5}$

تدريب

إذا كان $\cos\theta = -\frac{2}{3}$ حيث $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ أجب عن الأسئلة 3 , 2 , 1

1) قيمة $\sin 2\theta$ تساوي:

a) $\frac{-2\sqrt{5}}{3}$ b) $\frac{-4\sqrt{5}}{3}$ c) $\frac{4\sqrt{5}}{9}$ d) $\frac{-4\sqrt{5}}{9}$

2) قيمة $\cos 2\theta$ تساوي:

a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{-1}{9}$ c) $\frac{1}{9}$ d) $\frac{-5}{9}$

3) قيمة $\tan 2\theta$ تساوي:

a) $-4\sqrt{5}$ b) 4 c) $4\sqrt{5}$ d) $\frac{\sqrt{5}}{9}$

4) المقدار المكافىء للمقدار $\csc 2x$ هو:

a) $\frac{1}{2}\csc x \sec x$ b) $\csc x \sec x$

c) $\frac{1}{2}\tan x \sec x$ d) $\tan x \sec x$

الإجابات :

1) d) $\frac{-4\sqrt{5}}{9}$ 2) b) $\frac{-1}{9}$

3) c) $4\sqrt{5}$ 4) a) $\frac{1}{2}\csc x \sec x$

مثال

(خارجي)

إذا كان $\cos 2\theta = \frac{-1}{9}$ فأجد $\tan\theta$ حيث $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$

الحل

$\frac{\sqrt{5}}{2}$

مثال :

أجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي من دون استعمال الآلة الحاسبة:

4 $\frac{2\tan 15^\circ}{1-\tan^2 15^\circ}$

$\frac{1}{\sqrt{3}}$

---

5 $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$

$\frac{1}{2\sqrt{2}}$

6 $\cos^2 37.5° - \sin^2 37.5°$

$\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$

مثال

أكتب $\cos 3\theta$ بدلالة $\cos \theta$.

$4\cos^3 \theta - 3\cos \theta$

أتحقَّق من فهمي

أكتب $\sin 3\theta$ بدلالة $\sin \theta$ و $\cos \theta$.

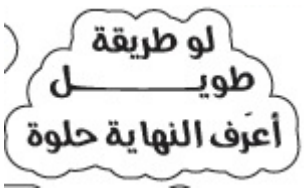
$4 \sin \theta \cos^2 \theta - \sin \theta$

مثال : أثبت صحة المتطابقة

28 $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$

مثال : أثبت صحة المتطابقة

$$\frac{\sin 3x}{\sin x \cos x} = 4\cos x - \sec x$$



مثال : أبسط كل من العبارات المثلثية الاتية

1. $2 \sin 3x \cos 3x$

$\sin 6x$

---

2. $\dfrac{2 \tan 7x}{1 - \tan^2 7x}$

$\tan 14x$

---

3. $\dfrac{1 - \cos 4x}{\sin 4x}$

$\tan 2x$

مثال : أثبت صحة كل من المتطابقات الاتية

1. $\dfrac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x} = \sin 2x$

---

2. $\cos^2 5x - \sin^2 5x = \cos 10x$

---

3. $\cos x = \dfrac{1}{2}(\sin x \sin 2x + 2 \cos^3 x)$

4 $\cos 2x + 2\cos x + 1 = 2\cos x(\cos x + 1)$

5 $\tan 3x = \dfrac{3\tan x - \tan^3 x}{1 - 3\tan^2 x}$

6 $\dfrac{\cos 2x}{\cos^2 x} + \tan^2 x = 1$

7 $\sin x = 4 \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \sin \frac{x}{4}$

---

8 $\cos^2 2x = 4 \cos^4 x - 4 \cos^2 x + 1$

---

9 $\frac{2(\tan x - \cot x)}{\tan^2 x - \cot^2 x} = \sin 2x$

10 $\frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x} - \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} = 2 \tan 2x$

تدريب : أثبت صحة المتطابقات التالية

15 $\cos^4 2x - \sin^4 2x = 1 - 2 \sin^2 2x$

18 $\dfrac{\cot\theta - \tan\theta}{\cot\theta + \tan\theta} = \cos 2\theta$

تحدٍّ: أُثبِت صِحَّة كلٍّ ممّا يأتي:

39 $\cos 4x = 1 - 8\sin^2 x \cos^2 x$

تدريب : أثبت صحة المتطابقة التالية

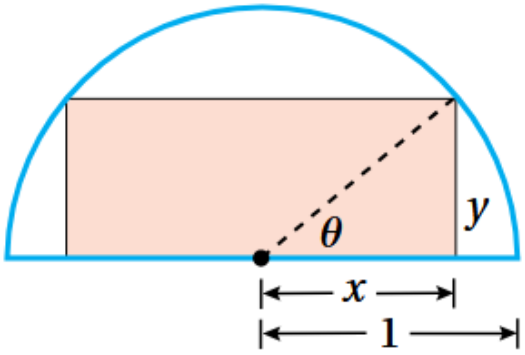
$$\tan\frac{x}{2} = \csc x - \cot x$$

40 $\cos^4 x = \frac{1}{8}(3 + \cos 4x + 4\cos 2x)$

تبرير: يُبيِّن الشـــكل المجاور مستطيلًا مرسومًا في نصف دائرة، طول نصف قُطْرها وحدة واحدة:

37 أُعبِّر باقترانٍ بدلالة الزاوية θ عن المساحة A للمستطيل المُوضَّح في الشكل المجاور، ثمَّ أُبرِّر إجابتي.

38 أُثبِت أنَّ: $A(\theta) = \sin 2\theta$، ثمَّ أُبرِّر إجابتي.



$\rightarrow A = 2\cos\theta \,.\, \sin\theta$

المتطابقات المثلثية لتقليص القوّة

مفهوم أساسي

$$\sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2} \qquad \cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2} \qquad \tan^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{1+\cos 2\theta}$$

البرهان :

1) $\sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2}$

2) $\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$

3) $\tan^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{1+\cos 2\theta}$

مثال أُعيد كتابة $\sin^2 x \cos^2 x$ بدلالة القوَّة الأولى لجيب التمام.

$\frac{1}{8}(1-\cos 4x)$

أتحقَّق من فهمي أُعيد كتابة $\sin^4 x \cos^2 x$ بدلالة القوَّة الأولى لجيب التمام.

$\frac{1}{16}(1-\cos 2x-\cos 4x+\cos 2x\cos 4x)$

أتحقَّق من فهمي أُعيد كتابة $\cos^4 x \sin^2 x$ بدلالة القوَّة الأولى لجيب التمام.

$$\frac{1}{16}(1-\cos 4x+\cos 2x-\cos 2x\cos 4x)$$

أتحقَّق من فهمي أُعيد كتابة $\sin^4 x$ بدلالة القوَّة الأولى لجيب التمام.

$$\frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}-2\cos 2x+\frac{1}{2}\cos 4x\right)$$

أتحقَّق من فهمي أُعيد كتابة $\cos^4 x$ بدلالة القوَّة الأولى لجيب التمام.

$$\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{8}\cos 4x$$

مثال : أثبت صحة المتطابقة التالية .

$$\tan^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1+\sin x}{1-\sin x}$$

مثال : أثبت صح المتطابقات التالية ؟

36 $\ln|\sin x| = \frac{1}{2}(\ln|1-\cos 2x| - \ln 2)$

---

16 $4(\sin^6 x + \cos^6 x) = 4-3\sin^2 2x$

الجزء الثالث
المتطابقات المثلثية لنصف الزاوية

المتطابقات المثلثية لنصف الزاوية

مفهوم أساسي

$$\sin\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$$

$$\cos\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$$

$$\tan\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}$$

مثال أجد قيمة $\sin 22.5°$ من دون استعمال الآلة الحاسبة.

$$\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

أتحقَّق من فهمي أجد قيمة $\cos 112.5°$ من دون استعمال الآلة الحاسبة.

$$-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

مثال

إذا كان: $\cos x = -\frac{3}{5}$، حيث: $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$، فأجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي:

1 $\sin \frac{x}{2}$

$\frac{2\sqrt{5}}{5}$

---

2 $\cos \frac{x}{2}$

$-\frac{\sqrt{5}}{5}$

---

3 $\tan \frac{x}{2}$

$-\sqrt{4} = -2$

أتحقَّق من فهمي

إذا كان: $\sin x = \frac{2}{5}$، حيث: $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ ، فأجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي:

a) $\sin \frac{x}{2}$ b) $\cos \frac{x}{2}$ c) $\tan \frac{x}{2}$

a	$\sqrt{\frac{5+\sqrt{21}}{10}}$
b	$\sqrt{\frac{5-\sqrt{21}}{10}}$
c	$\sqrt{\frac{5+\sqrt{21}}{5-\sqrt{21}}}$

مثال :

أجد قيمة كلٍّ من $\cos\frac{\theta}{2}$, $\sin\frac{\theta}{2}$, $\sin 2\theta$, $\cos 2\theta$ للزاوية θ في الفترة المعطاة:

1. $\sin\theta = \frac{5}{13}, 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

$\cos 2\theta = \frac{119}{169}$ $\sin 2\theta = \frac{120}{169}$

$\sin\frac{\theta}{2} = \frac{1}{\sqrt{26}}$ $\cos\frac{\theta}{2} = \frac{5}{\sqrt{26}}$

---

2. $\cos\theta = -\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\pi}{2} < \theta < \pi$

$\cos 2\theta = \frac{1}{3}$ $\sin 2\theta = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{3+\sqrt{6}}{6}}$ $\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{3-\sqrt{6}}{6}}$

3 $\tan\theta = \frac{1}{2}$, $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$

$\cos 2\theta = \frac{3}{5}$ $\sin 2\theta = \frac{4}{5}$

$\sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}}$ $\cos\frac{\theta}{2} = -\sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{2\sqrt{5}}}$

---

4 $\csc\theta = -\sqrt{5}$, $\cos\theta < 0$

$\cos 2\theta = \frac{3}{5}$ $\sin 2\theta = \frac{4}{5}$

$\sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}}$ $\cos\frac{\theta}{2} = -\sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{2\sqrt{5}}}$

5 $\cot\theta = \frac{2}{3}$, $\sin\theta > 0$

$\cos 2\theta = -\frac{5}{13}$ $\sin 2\theta = \frac{12}{13}$

$\sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{\sqrt{13}-2}{2\sqrt{13}}}$ $\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{\sqrt{13}+2}{2\sqrt{13}}}$

---

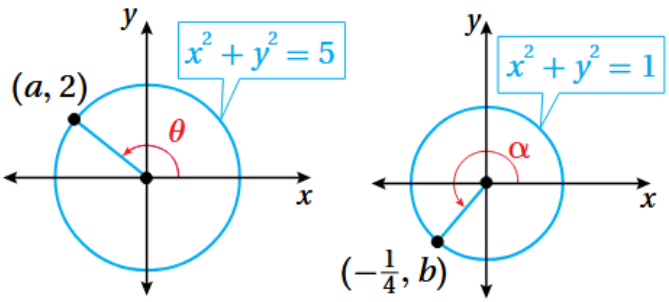
6 $\sec\theta = 3, \sin\theta > 0$

$\cos 2\theta = -\frac{7}{9}$ $\sin 2\theta = \frac{4\sqrt{2}}{9}$

$\sin\frac{\theta}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ $\cos\frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

أستعمل الشكل المجاور لإيجاد قيمة كلٍّ من الاقترانات الآتية، علمًا بأنَّ:

$$f(x) = \sin x,\ g(x) = \cos x,\ h(x) = \tan x$$:



13 $g(2\theta)$

$$-\frac{3}{5}$$

14 $g\left(\frac{\theta}{2}\right)$

$\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}}$

15 $f(2\alpha)$

$\frac{\sqrt{15}}{8}$

16 $h\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

$-\sqrt{\frac{5}{3}}$

مثال أجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي من دون استعمال الآلة الحاسبة:

10 $\cos 22.5°$

$$\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}}$$

---

11 $\sin 195°$

$$-\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

---

12 $\tan \frac{7\pi}{8}$

$$1-\sqrt{2}$$

9 $\tan 202.5°$

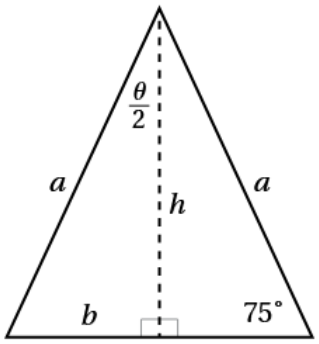
$\sqrt{2}-1$

مثال : أثبت صحة المتطابقات الاتية.

17 $\cos\theta = \dfrac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}$

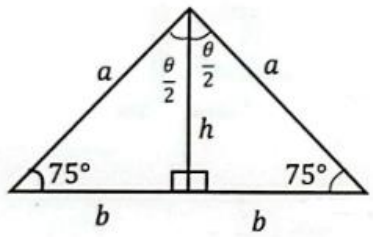
35 $\cot^2 \frac{x}{2} = \frac{\sec x + 1}{\sec x - 1}$

يُبيِّن الشكل المجاور مثلثًا متطابق الضلعين، طول كلٍّ منهما a:



13 أكتب قاعدة لمساحة المثلث بدلالة الضلع a.

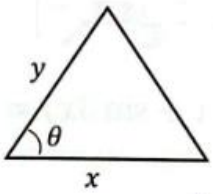
14 أجد مساحة المثلث إذا كان طول الضلع a هو 7 cm



تذكير هام من خصائص المثلث المتطابق الضلعين هو أن العمود النازل من رأس الزاوية على القاعدة ينصّف القاعدة كذلك ينصّف زاوية الرأس.

كذلك زاويتا القاعدة متساويتان.

1) **تذكير هام** $A = \frac{1}{2}x.y.\sin\theta$



$\theta = 180° - (75° + 75°) = 30°$

$A = \frac{1}{2}a \cdot a \cdot \sin\theta = \frac{1}{2}a^2.\sin\theta$

$A = \frac{1}{2}a^2.\sin 30° = \frac{1}{2}a^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}a^2$

2) وعندما $a = 7$ فإن $A = \frac{1}{4}(7)^2 = \frac{49}{4}\ cm^2$

متطابقات تحويل الضرب إلى مجموع أو فرق

مفهوم أساسي

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]$$

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)]$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)]$$

ملحوظة هامة

يوجد قانون لِ $\cos a\sin b$ ولكن لا داعي له حيث أن الضرب تبديلي مثلاً

$$\cos x\sin 3x=\sin 3x\cos x$$

ونطبق القانون الأول.

مثال

أُعيد كتابة $\sin 3x\sin 5x$ في صورة مجموع أو فرق.

$$\frac{1}{2}\cos 2x-\frac{1}{2}\cos 8x$$

أتحقَّق من فهمي

أُعيد كتابة $\sin 7x \cos x$ في صورة مجموع أو فرق.

$$\frac{1}{2}(\sin 6x + \sin 8x)$$

أُعيد كتابة كل مقدار ممّا يأتي في صورة مجموع أو فرق:

17 $\sin 2x \cos 3x$

$$\frac{1}{2}(\sin 5x - \sin x)$$

---

18 $\sin x \sin 5x$

$$\frac{1}{2}(\cos 4x - \cos 6x)$$

19 $3\cos 4x\cos 7x$

$-2\cos\frac{5x}{2}\sin\frac{3x}{2}$

$\cos 5x\sin 2x$

$\frac{1}{2}\sin 7x-\frac{1}{2}\sin 3x$

تدريب

المقدار المكافئ للمقدار $\sin 2x\cos 3x$ هو:

a) $\frac{1}{2}(\sin x+\sin 5x)$ b) $\frac{-1}{2}(\sin x-\sin 5x)$

c) $\frac{-1}{2}(\sin x+\sin 5x)$ d) $\frac{1}{2}(\sin x\sin 5x)$

B

مثال :

أجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي من دون استعمال الآلة الحاسبة:

10 $2 \sin 52.5^\circ \sin 97.5^\circ$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}}{2}$$

---

11 $\sin 75^\circ \sin 15^\circ$

$$\frac{1}{4}$$

12 $\cos 37.5^\circ \sin 7.5^\circ$

$$\frac{2-\sqrt{2}}{4\sqrt{2}}$$

الجزء الخامس
متطابقات تحويل المجموع أو الفرق الى ضرب

متطابقات تحويل المجموع أو الفرق إلى ضرب

مفهوم أساسي

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

مثال

أُعيد كتابة $\sin 5x - \sin 3x$ في صورة ضرب.

$2\cos(4x)\sin(x)$

أتحقَّق من فهمي

أُعيد كتابة $\cos 3x + \cos 2x$ في صورة ضرب.

$2\cos\frac{5x}{2}\cos\frac{x}{2}$

مثال

أُعيد كتابة كل مقدار ممّا يأتي في صورة ضرب:

20 $\sin x - \sin 4x$

$-2\cos\frac{5x}{2}\sin\frac{3x}{2}$

21 $\cos 9x - \cos 2x$

$$-2\sin\frac{11x}{2}\sin\frac{7x}{2}$$

---

22 $\sin 3x + \sin 4x$

$$2\sin\frac{7x}{2}\cos\frac{x}{2}$$

تدريب

1) المقدار المكافىء للمقدار $\sin x - \sin 4x$ هو:

a) $-2\cos 5x \sin 3x$

b) $2\cos\frac{5}{2}x \sin\frac{3}{2}x$

c) $-2\cos\frac{5}{2}x \sin\frac{3}{2}x$

d) $2\cos 5x \sin 3x$

2) قيمة المقدار $\cos\frac{\pi}{12} + \cos\frac{5\pi}{12}$ هو:

a) $\sqrt{\frac{3}{2}}$

b) $\sqrt{\frac{2}{3}}$

c) $2 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}$

d) $-\sqrt{\frac{3}{2}}$

1) c) $-2\cos\frac{5}{2}x \sin\frac{3}{2}x$ 2) a) $\sqrt{\frac{3}{2}}$

مثال

أُثبِت صِحَّة كل متطابقة ممّا يأتي:

1 $\dfrac{\sin 3x}{\sin x \cos x} = 4\cos x - \sec x$

(H.W)

---

2 $\dfrac{\sin 3x - \sin x}{\cos 3x + \cos x} = \tan x$

أتحقَّق من فهمي

أُثبِت صِحَّة كل متطابقة ممّا يأتي:

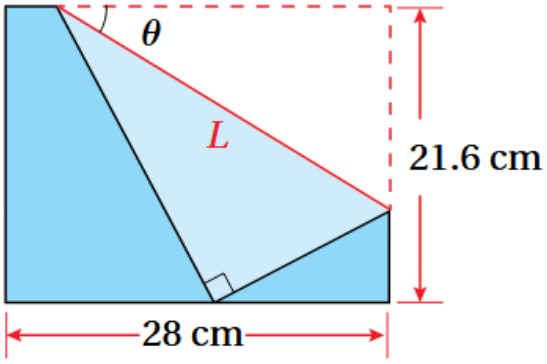
a) $\dfrac{2\tan x}{1+\tan^2 x} = \sin 2x$

b) $\dfrac{\sin x + \sin y}{\cos x + \cos y} = \tan\left(\dfrac{x+y}{2}\right)$

19 $\dfrac{\sin 10x}{\sin 9x + \sin x} = \dfrac{\cos 5x}{\cos 4x}$

---

15 $\tan y = \dfrac{\sin (x+y) - \sin (x-y)}{\cos (x+y) + \cos (x-y)}$



الأوريغامـــي: يقوم فـــن الأوريغامي (فن طيِّ الورق) الياباني على طيِّ قطعة واحدة من الورق بصورة مُتكرِّرة لصنع أشـــكال فنية. فعند طيِّ الجزء الأيمن إلى الأسفل من ورقة مســـتطيلة، بُعْداها: **21.6 cm**، و**28 cm**، كما في الشكل المجاور، فإنَّ طول خطِّ الطيِّ L يرتبط بالزاوية θ عن طريق العلاقة:

$$L = \frac{10.8}{\sin\theta\cos^2\theta}$$

23 أُثبِت أنَّ علاقة طول خطِّ الطيِّ تُكافِئ العلاقة:

$$L = \frac{21.6\sec\theta}{\sin 2\theta}$$

24 أجد طول خطِّ الطيِّ L إذا كانت $\theta = 30°$.

28.8cm

تدريب: (H.W)

أجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي من دون استعمال الآلة الحاسبة:

7 $\sin 75^\circ$

$$\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$

---

8 $\cos\left(\frac{23\pi}{12}\right)$

$$\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$$

أُثبِت صِحَّة كلٍّ من المتطابقات الآتية:

16 $\csc 2x = \frac{1}{2}\csc x \sec x$

17 $\ln|\cos x| = \frac{1}{2}(\ln|1+\cos 2x| - \ln 2)$

18 $\sec 2x = \frac{\sec^2 x}{2-\sec^2 x}$