تأسيس

# المتطابقات المثلثية

## الجزء الأول
## وحدات قياس الزاوية

تقاس الزاوية بوحدتين هما الراديان $(Rad)$ والدرجات.

$$1Rad \cong 57°$$

**■ للتحويل من راديان إلى درجات:**

**يوجد حالتان**

**حالة 1** إذا كانت الزاوية بدلالة $\pi$

تعوّض $\pi = 180°$

مثال 1

$$\frac{2\pi}{3}rad \rightarrow \frac{2(180°)}{3} = 120°$$

$$\frac{5\pi}{6}rad \rightarrow \frac{5(180°)}{6} = 150°$$

$$\frac{\pi}{2}rad \rightarrow \frac{180°}{2} = 90°$$

**حالة 2** إذا كانت الزاوية بدون $\pi$

نضرب في $\frac{180°}{\pi}$ و هنا $\pi \cong 3.14$

مثال 2

$$2rad \rightarrow \frac{2(180°)}{\pi} \cong 114.6°$$

**هام جداً**

يوجد كبسة على الآلة الحاسبة مخصصة لِ $\pi$

ولتفعيلها نضغط على $shift \rightarrow EXP$

$$1.02rad \rightarrow \frac{1.02(180°)}{\pi} \cong 58.44°$$

**■ للتحويل من درجات إلى راديان نضرب في $\frac{\pi}{180°}$**

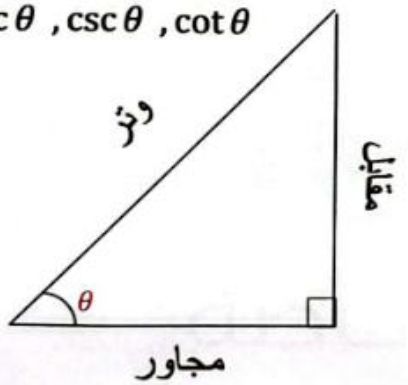
$$60° \rightarrow \frac{60\pi}{180} = \frac{\pi}{3}rad$$

$$300° \rightarrow \frac{300\pi}{180} = \frac{5\pi}{3}rad$$

## الجزء الثاني
## الاقترانات المثلثية (النسب المثلثية)

$\sin\theta$ , $\cos\theta$ , $\tan\theta$

$\sec\theta$ , $\csc\theta$ , $\cot\theta$




الوتر هو الضلع المقابل للزاوية القائمة.

$$\sin\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} \quad , \quad \cos\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$$

ملحوظة

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

## الجزء الثالث
## زوايا المرجع أو الزوايا الأساسية

زوايا المرجع أو الزوايا الأساسية هي $30°, 45°, 60°$

يجب حفظ الجدول التالي:

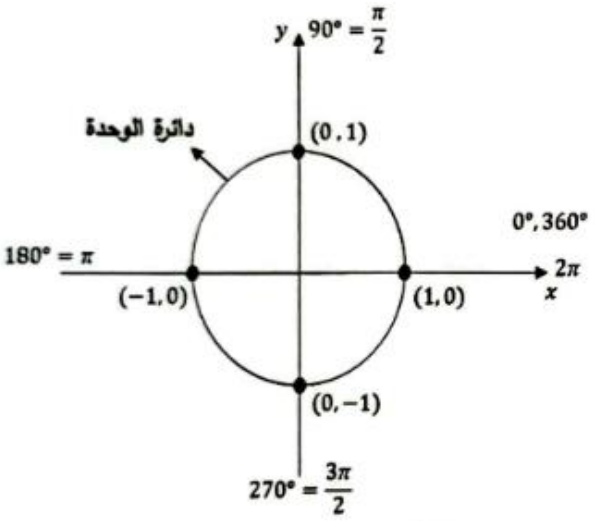
| $x$ | $30° = \frac{\pi}{6}$ | $45° = \frac{\pi}{4}$ | $60° = \frac{\pi}{3}$ |
|---|---|---|---|
| $\sin x$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ |
| $\cos x$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\frac{1}{2}$ |
| $\tan x$ | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | $1$ | $\sqrt{3}$ |

## الجزء الرابع
## الزوايا المحورية

الزوايا المحورية وهي الزوايا التي تقع على المحور $x$ أو المحور $y$ وهي: $0°, 90°, 180°, 270°, 360°$

**دائرة الوحدة:**

**هي دائرة مركزها $(0, 0)$ ونصف قطرها وحدة واحدة.**




■كل زوج مرتب $(x, y)$ يمثل $(\cos\theta, \sin\theta)$

أي أن $\sin 90° = 1$ , $\cos 90° = 0$

$\sin\pi = 0$ , $\cos\pi = -1$

$\cos 0 = \cos 2\pi = 1$

$$\sin\frac{3\pi}{2} = -1$$

$$\tan 0 = \tan\pi = \frac{0}{\pm 1} = 0$$

$$\tan\frac{\pi}{2} = \tan\frac{3\pi}{2} = \frac{\pm 1}{0}$$ غير معرف

**هام جداً**

$$-1 \le \sin x \le 1$$
$$-1 \le \cos x \le 1$$

أي أن أكبر قيمة للاقتران $\sin\theta$ أو $\cos\theta$ هو $(1)$ وأقل قيمة هي $(-1)$ .

ونلاحظ أن $\sin\theta, \cos\theta = \{-1, 0, 1\}$

$$\tan\theta = \{0, \text{غير معرف}\}$$

وهذا فقط لزوايا المحاور.

## الجزء الخامس
## إيجاد الاقترانات المثلثية لزوايا غير المرجع والمحور

**كيف نجد الاقترانات المثلثية لزوايا غير الزوايا المرجعية وغير الزوايا المحورية؟**

للإجابة عن هذا السؤال يجب أولاً معرفة ما يلي:

| | |
|---|---|
| ربع أول<br>$sin, cos, tan \rightarrow +$<br>$0 < \theta < 90°$ | ربع ثاني<br>$sin \rightarrow +$<br>$cos, tan \rightarrow -$<br>$90° < \theta < 180°$ |
| ربع رابع<br>$sin, tan \rightarrow -$<br>$cos \rightarrow +$<br>$270° < \theta < 360°$ | ربع ثالث<br>$sin, cos \rightarrow -$<br>$tan \rightarrow +$<br>$180° < \theta < 270°$ |

**مثلاً:** الزاوية $120°$ تقع في الربع الثاني.

الزاوية $225°$ تقع في الربع الثالث.

الزاوية $315°$ تقع في الربع الرابع.

الزاوية $60°$ تقع في الربع الأول.

**هام جداً**

**إذا كانت $\theta$ تمثل الزاوية و $\theta'$ تمثل زاوية مرجع فإن:**

| | |
|---|---|
| ربع أول<br>$\theta' = \theta$ | ربع ثاني<br>$\theta' = 180° - \theta$ |
| ربع رابع<br>$\theta' = 360° - \theta$ | ربع ثالث<br>$\theta' = \theta - 180°$ |

**والأمثلة التالية توضح ما سبق.**

**مثال 3**

**أجد قيمة كل مما يلي:**

**1) $\cos 120°$**

الحل: نحدد الربع الذي تقع فيه الزاوية $120°$ وهو ربع ثاني و تكون إشارة $cos$ سالبة.

ثم نجد زاوية المرجع كما يلي:

$$\theta' = 180° - \theta$$

$$\theta' = 180° - 120° = 60°$$

و بالتالي $\cos 120° = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$

**2) $\sin 135°$**

الحل: ربع ثاني

$$\theta' = 180° - 135° = 45°$$

$$\sin 135° = \sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

**3) $\tan \frac{5\pi}{6}$**

الحل: ربع ثاني $\frac{5\pi}{6} = \frac{5(180)}{6} = 150°$

$$\theta' = 180° - 150° = 30°$$

$$\tan \frac{5\pi}{6} = -\tan 30° = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

**4) $\sin 225°$**

الحل: ربع ثالث $\theta' = \theta - 180°$

$$\theta' = 225° - 180° = 45°$$

$$\sin 225° = -\sin 45°$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

**5)** $\cos\frac{7\pi}{6}$

الحل: ربع ثالث $\frac{7\pi}{6}=\frac{7(180)}{6}=210°$

$\theta'=210°-180°=30°$

$\cos\frac{7\pi}{6}=-\cos 30°=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

**6)** $\sin 300°$

الحل: ربع رابع $\theta'=360°-\theta$

$\theta'=360°-300°=60°$

$\sin 300°=-\sin 60°=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

**7)** $\tan 315°$

الحل: ربع رابع

$\theta'=360°-315°=45°$

$\tan 315°=-\tan 45°=-1$

**8)** $\sin 390°$

**ملحوظة**

**الدورة الكاملة تعادل $360°$ أو $2\pi$ وإذا زادت الزاوية عن $360°$ نقوم بطرح دورة أو أكثر من دوره حتى تصبح أقل من $360°$ .**

لذلك $390°-360°=30°$

$\sin 390°=\sin 30°=\frac{1}{2}$

**9)** $\cos 600°$

الحل: $600°-360°=240°$

ربع ثالث $\cos 600°=\cos 240°$

$\theta'=240°-180°=60°$

$\cos 240°=-\cos 60°=-\frac{1}{2}$

**10)** $\tan 780°$

الحل: $780°-360°=420°$

$420°-360°=60°$

$\tan 780°=\tan 60°=\sqrt{3}$

لا يوجد طريق سهل
يوجد فقط عمل جاد
ليالي مناخرة صباحات باكرة
دراسة ممارسة تدريب تكرار معاناة إجهاد كفاح
إنضباط تضحية

الدرس
1

# المتطابقات المثلثية 1
# Trigonometric Identities 1

## الجزء الأول
## المتطابقات المثلثية الأساسية

**تنقسم إلى:**

1) متطابقات فيثاغورس.
2) المتطابقات النسبية.
3) متطابقات المقلوب.
4) متطابقات الزاوية السالبة.
5) متطابقات الزاويتين المتتامتين.

### أولاً: متطابقات فيثاغورس.

1) $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ (المتطابقة الأم)

2) $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$

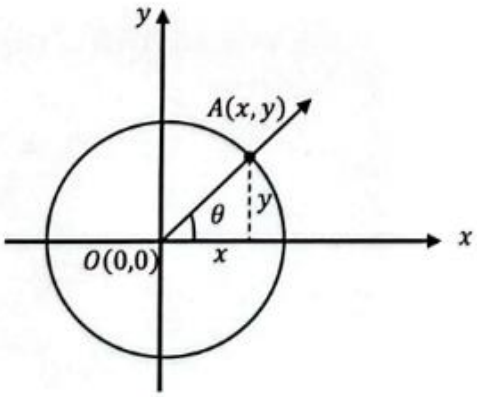
3) $\csc^2\theta = 1 + \cot^2\theta$

**ملحوظة**

نلاحظ في متطابقات فيثاغورس أن الزوايا متساويه
ولكن ممكن الزاوية تتغير بشرط أن تبقى الزاويه نفسها مثلاً.

$$\sin^2 2\theta + \cos^2 2\theta = 1 \quad , \quad \sec^2 4\theta = 1 + \tan^2 4\theta \quad , \quad \csc^2\frac{\theta}{2} = 1 + \cot^2\frac{\theta}{2}$$

**برهان المتطابقة الأم:**




في الشكل المجاور دائرة الوحدة مركزها نقطة الأصل
ونصف قطرها $r = 1$ حسب قانون المسافة بين نقطتين

$$\overline{OA} = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

ولكن $cos\theta = \frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}} = \frac{x}{1}$ وبالتالي $x = cos\theta$

$sin\theta = \frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{y}{1}$ وبالتالي $y = sin\theta$

وبالتالي $\sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = 1$ وبالتربيع فإن $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

**ملحوظة** يمكن كتابة متطابقة فيثاغورس بأشكال أخرى وهي:

$$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta \quad , \quad \cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$$

**تحذير !!!** متطابقات فيثاغورس يوجد تربيع على كل اقتران مثلثي، وإذا لا يوجد تربيع لا تكون متطابقة مثل

$$\sin\theta + \cos\theta \neq 1 \quad , \quad \sec\theta \neq 1 + \tan\theta \quad , \quad \csc\theta \neq 1 + \cot\theta$$

**ثانياً: المتطابقات النسبية:**

$$1)\ \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \qquad 2)\ \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

**ثالثاً: متطابقات المقلوب:**

$$1)\ \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \ , \ \cos\theta = \frac{1}{\sec\theta}$$

$$2)\ \csc\theta = \frac{1}{\sin\theta} \ , \ \sin\theta = \frac{1}{\csc\theta}$$

$$3)\ \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} \ , \ \tan\theta = \frac{1}{\cot\theta}$$

**تلخيص أسرع:**

$$\sec\theta \overset{\text{مقلوب}}{\Longleftrightarrow} \cos\theta \quad , \quad \csc\theta \overset{\text{مقلوب}}{\Longleftrightarrow} \sin\theta \quad , \quad \cot\theta \overset{\text{مقلوب}}{\Longleftrightarrow} \tan\theta$$

**رابعاً: متطابقات الزاوية السالبة:**

$$1)\ \sin(-\theta) = -\sin(\theta)$$

$$2)\ \cos(-\theta) = \cos(\theta)$$

$$3)\ \tan(-\theta) = -\tan(\theta)$$

**الزاوية السالبة تؤثر على $\sin\theta$ و $\tan\theta$**
**ولا تؤثر على $\cos\theta$**

**خامساً: متطابقات الزاويتين المتتامتين.**

**تذكير !!!** تكون الزاويتان متتامتان إذا كان مجموعهما يساوي $90°$.

متممة $40°$ هي $50°$ ، متممة $60°$ هي $30°$ ، متممة $\theta$ هي $90° - \theta$ ، متممة $3x$ هي $\frac{\pi}{2} - 3x$

$$1)\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = cos\theta.$$

أي أن $sin$ الزاوية يساوي $cos$ المتممة.

$$2)\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta. \qquad 3)\ tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cot\theta. \qquad 4)\ \cot\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \tan\theta.$$

$$5)\ \sec\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \csc\theta. \qquad 6)\ \csc\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sec\theta.$$

تلخيص أسرع $sec \leftrightarrow csc$ متممة $tan \leftrightarrow \cot$ متممة $sin \leftrightarrow \cos$ متممة

**انتبه !!!** $\cot(90° - 5x) = \tan 5x$ ، $\sin\left(\frac{\pi}{2} - 3\theta\right) = \cos 3\theta$

## المتطابقات المثلثية الأساسية

### مفهوم أساسي

- متطابقات المقلوب:

$$\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta} \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

- المتطابقات النسبية:

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

- متطابقات فيثاغورس:

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \qquad 1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta \qquad 1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$$

- متطابقات الزاويتين المتتامتين:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta \qquad \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cot\theta \qquad \sec\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \csc\theta$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta \qquad \cot\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \tan\theta \qquad \csc\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sec\theta$$

- متطابقات الزاوية السالبة:

$$\sin(-\theta) = -\sin\theta \qquad \cos(-\theta) = \cos\theta \qquad \tan(-\theta) = -\tan\theta$$

يُمكِن استعمال المتطابقات الأساسية لإيجاد قِيَم الاقترانات المثلثية.

## مثال

أجد قيمة $\sec\theta$ إذا كان:

$\sin\theta = \frac{3}{5}$ ، $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$.

$\sec\theta = -\frac{5}{4}$

---

### أتحقَّق من فهمي

أجد قيمة $\tan\theta$ إذا كان:

$\sec\theta = -\frac{3}{2}$ ، $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$.

$2\sqrt{2}$

---

## مثال :

أجد قيمة كلٍّ من النسب المثلثية الآتية ضمن الفترة المعطاة:

1. $\cot\theta, \sin\theta = \frac{1}{3}, 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

$\tan\theta = \frac{\sqrt{5}}{2}$

---

**2** $\sec\theta, \tan\theta = -\frac{3}{7}, \frac{\pi}{2} < \theta < \pi$

$-\frac{\sqrt{58}}{7}$

---

**3** $\tan\theta, \csc\theta = -\frac{5}{3}, \pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$

$\frac{3}{4}$

---

**4** $\sin\theta, \sec\theta = \frac{9}{4}, \frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$

$-\frac{\sqrt{65}}{9}$

## تبسيط المقادير المثلثية وإعادة كتابتها

تبســـيط المقادير المثلثية هو كتابة المقادير بدلالة اقتران مثلثي واحد فقط (إنْ أمكن)، ويُمكِن ذلك باستعمال المتطابقات المثلثية.

**مثال**

**أُبسِّط كُلًّا من المقادير المثلثية الآتية:**

**1** $\sin x \cos^2 x - \sin x$

$= -\sin^3 x$

**2** $\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{1+\sin x}$

$= \frac{1}{\cos x} = \sec x$

---

**3** $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cot x$

$= \cos x$

## أتحقَّق من فهمي

أُبسِّط كُلًّا من المقادير المثلثية الآتية:

a) $\sin x\,(\csc x - \sin x)$

$\cos^2 x$

b) $1 + \dfrac{\sin x}{\cos x} + \dfrac{\cos x}{1+\sin x}$

$= 1 + \sec x$

c) $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)\sec x$

1

## مثال :

أُبسِّط كُلًّا من العبارات المثلثية الآتية:

**5** $\cos x \ \tan x$

$= \sin x$

---

**6** $\dfrac{\sec x - \cos x}{\sin x}$

$= \tan x$

**7** $\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\csc x} + \cos^2 x$

1

---

**8** $\dfrac{\sin x - \cos x}{\cos x} + \dfrac{\cos x - \sin x}{\sin x}$

$\tan x + \cot x - 2$

## مثال :

أُبسِّط كُلًّا من العبارات المثلثية الآتية:

1 $\cos^3 x + \sin^2 x \cos x$

$= \cos x$

2 $\dfrac{1}{1-\cos x} + \dfrac{1}{1+\cos x}$

$= 2\csc^2 x$

9 $\dfrac{(\sin x + \cos x)^2 - 1}{\sin x \ \cos x}$

2

10 $\dfrac{\sec x - \cos x}{\tan x}$

$= \sin x$

**5** $\dfrac{1+\cos x}{1+\sec x}$

$= \cos x$

**6** $\dfrac{3\sin^2 x + 4\sin x + 1}{\sin^2 x + 2\sin x + 1}$

$= \dfrac{3\sin x + 1}{\sin x + 1}$

**3** $\dfrac{\sec^2 x - 1}{\sec^2 x}$

$= \sin^2 x$

**4** $\dfrac{\cos^2 x - 1}{\cos^2 x - \cos x}$

$= 1 + \sec x$

هام في بعض المسائل نحتاج الى كتابة المقادير المثلثية بحيث لا تحوي كسراً حيث نضرب في مرافق المقام

**مفتاح** نضرب في مرافق المقام عندما يكون المقام على صورة $1 \pm a$ او $a \pm 1$

**تذكير !!!** مرافق $a+b$ هو $a-b$ ، ومرافق $a-b$ هو $a+b$

ويكون ناتج ضرب مقدارين مترافقين = مربع أول – مربع ثاني

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

مثال

أبسّط كل من العبارات المثلثية الآتية:

1) $\frac{1}{1+\sin x}$

الحل

$$= \sec^2 x - \tan x \cdot \sec x$$

2) $\frac{\cos x}{1-\sin x}$

الحل

$$= \sec x + \tan x$$

### أتحقَّق من فهمي

أُعيد كتابة $\frac{1}{1+\cos x}$ بحيث لا يحوي كسرًا.

$$= csc^2 x - \cot x \csc x$$

### إثبات صِحَّة متطابقة مثلثية

يُمكِن استعمال المتطابقات المثلثية الأساسية، إضافةً إلى تعريف الاقترانات المثلثية، لإثبات صِحَّــة متطابقات مثلثية أُخرى، عن طريق تحويل أحد طرفــي المتطابقة المثلثية المراد إثبات صِحَّتها إلى الطرف الآخر باتِّباع سلسلة من الخطوات، كلٌّ منها تُعَدُّ متطابقة.

في ما يأتي بعض المبادئ العامة التي تساعدني على إثبات صِحَّة المتطابقات المثلثية:

- **البَدْء بأحد طرفــي المتطابقة**: أختار أحد طرفي المتطابقة، الذي يكــون أكثر تعقيدًا فيها غالبًا.
- **اســتعمال المتطابقات المثلثية المعروفة**: يُمكِنني اســتعمال المتطابقــات المثلثية التي أعرفها، إضافةً إلى بعض المهارات الجبرية، لتحويل الطرف الذي اخترته بدايةً.
- **التحويل إلى اقتران الجيب أو جيب التمام**: من المفيد أحيانًا إعادة كتابة جميع الاقترانات بدلالة اقتران الجيب وجيب التمام.

## مثال

أُثبِت صِحَّة كلٍّ من المتطابقات الآتية:

**1** $\sin x \tan x = \sec x - \cos x$

**2** $\sec x + \tan x = \frac{\cos x}{1 - \sin x}$

**أتعلَّم**

ليس شـرطًا البَـدْء دائمًا بالطـرف الأكثـر تعقيدًا فـي المسـألة. فمثـلًا، في الفرع 1 مـن المثال، يُمكِننـي إثبـات صِحَّة المتطابقة بَـدْءًا بالطرف الأيمن.

**3** $\dfrac{\sin x}{1+\cos x}+\dfrac{1+\cos x}{\sin x}=2\csc x$

## أتحقَّق من فهمي

أُثبِت صِحَّة كلٍّ من المتطابقات الآتية:

**a)** $\cot x \ \cos x = \csc x - \sin x$

**b)** $\dfrac{1-\cos x}{\sin x}=\dfrac{\sin x}{1+\cos x}$

c) $\dfrac{1}{1-\cos x}+\dfrac{1}{1+\cos x}=2\csc^2 x$

**ملاحظة :**

يُفضَّـــل أحيانًا تحويل كل طرف من المتطابقة المثلثية المـــراد إثبات صِحَّتها إلى مقدار مثلثي وسيط.

**مثال** أُثبِت صِحَّة المتطابقة:

$\dfrac{1+\cos x}{\cos x}=\dfrac{\tan^2 x}{\sec x-1}$

**أتحقَّق من فهمي** أُثبِت صِحَّة المتطابقة:

$(\tan x + \cot x)^2 = \sec^2 x + \csc^2 x$.

**مثال**

أُثبِت صِحَّة كلٍّ من المتطابقات الآتية:

11 $\cot(-x)\cos(-x) + \sin(-x) = -\csc x$

12 $(\sin x + \cos x)^2 = 1 + 2\sin x \cos x$

**15** $\sin^4 x - \cos^4 x = \sin^2 x - \cos^2 x$

**16** $\dfrac{1}{1-\sin x} - \dfrac{1}{1+\sin x} = 2\sec x \tan x$

**13** $\dfrac{(\sin x + \cos x)^2}{\sin^2 x - \cos^2 x} = \dfrac{\sin^2 x - \cos^2 x}{(\sin x - \cos x)^2}$

**14** $\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x} = (\sec x - \tan x)^2$

**مثال**

أُثبِت صِحَّة كلٍّ من المتطابقات الآتية:

7 $\dfrac{\cos x}{\sec x} + \dfrac{\sin x}{\csc x} = 1$

8 $\ln|1 + \cos\theta| + \ln|1 - \cos\theta| = 2\ln|\sin\theta|$

17 $\ln|\tan\theta| = \ln|\sin\theta| - \ln|\cos\theta|$

18 $\ln|\sec\theta + \tan\theta| + \ln|\sec\theta - \tan\theta| = 0$

## سؤال: أثبت أن

$$ln|\csc\theta| = -ln|\sin\theta|$$

9 $$\frac{1}{1-\sin^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

10 $$\tan A + \tan B = \frac{\sin(A+B)}{\cos A \cos B}$$

## متطابقات المجموع والفرق

تعلَّمْتُ في الأمثلة السابقة كيفية استعمال المتطابقات المثلثية لإيجاد قِيَم اقترانات مثلثية، وتبسيط عبارات مثلثية، وإثبات صِحَّة متطابقات أُخرى. وسأتعلَّم الآن كيفية استعمال مجموعة من المتطابقات لإيجاد قيمة اقتران مثلثي لمجموع زاويتين أو الفرق بينهما.

### مفهوم أساسي

متطابقات المجموع والفرق

**متطابقات المجموع:**

- $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$
- $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
- $\tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$

**متطابقات الفرق:**

- $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$
- $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
- $\tan(a-b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$

هام جداً

$15° = 60° - 45°$ $OR$ $15° = 45° - 30°$ , $75° = 45° + 30°$

$105° = 60° + 45°$

**مثال**

أجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي من دون استعمال الآلة الحاسبة:

**1** $\sin 15°$

$$= \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

**2** $\tan \frac{5\pi}{12}$

$$= \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$$

**3** $\cos 20° \cos 40° - \sin 20° \sin 40°$

$$= \frac{1}{2}$$

أتحقّق من فهمي أجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي

من دون استعمال الآلة الحاسبة:

a) $\cos 75°$

$$\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

**مثال**

أجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي من دون استعمال الآلة الحاسبة:

11 $\sin 105°$

$$\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

---

12 $\tan \frac{19\pi}{12}$

$$-2-\sqrt{3}$$

b) $\tan \frac{\pi}{12}$

$$\frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}}$$

---

c) $\sin 80°\cos 20° - \cos 80°\sin 20°$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}$$

13 $\cos 10^\circ \cos 80^\circ - \sin 10^\circ \sin 80^\circ$

0

**مثال**

أجد قيمة كلٍّ ممّا يأتي من دون استعمال الآلة الحاسبة:

19 $\sin 165^\circ$

$\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$

20 $\tan 195^\circ$

$\frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}}$

21 $\sec\left(-\frac{\pi}{12}\right)$

$\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}$

22 $\sin\frac{17\pi}{12}$

$-\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$

$\cos(285°)$

$\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$

---

هام جداً أفكار خارجية.

سؤال أجد قيمة كل مما يأتي دون استعمال الآلة الحاسبة:

**1)** $\sin 25° \cos 20° + \cos 25° \cos 70°$

$\frac{1}{\sqrt{2}}$

**23** $\sin\frac{\pi}{18}\cos\frac{5\pi}{18} + \cos\frac{\pi}{18}\sin\frac{5\pi}{18}$

$\frac{\sqrt{3}}{2}$

---

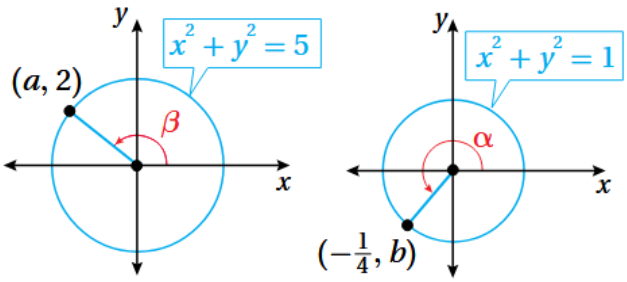
**24** $\frac{\tan 40° - \tan 10°}{1 + \tan 40° \tan 10°}$

$\frac{1}{\sqrt{3}}$

أستعمل الشكل المجاور لإيجاد قيمة

كلٍّ من الاقترانات الآتية، علمًا بأنَّ:

$$f(x) = \sin x, g(x) = \cos x, h(x) = \tan x$$




**25** $f(\alpha + \beta)$

$\frac{\sqrt{15} - 2}{4\sqrt{5}}$

**2)** $\sin 40° \sin 20° - \cos 40° \cos 20°$

$-\frac{1}{2}$

**3)** $4 \sin 100° \cos 20° + 4 \cos 100° \sin 20°$

$2\sqrt{3}$

**26** $g(\alpha - \beta)$

$$\frac{1-2\sqrt{15}}{4\sqrt{5}}$$

---

**27** $h(\alpha + \beta)$

$$\frac{\sqrt{15}-2}{1+2\sqrt{15}}$$

**29** إذا كان: $g(x) = \cos x$، فأُثبِت أنَّ:

$$\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = -\cos x\left(\frac{1-\cos h}{h}\right) - \sin x\left(\frac{\sin h}{h}\right)$$

---

## ملاحظة

يُمكِنني أيضًا استعمال متطابقات المجموع والفرق لإثبات صِحَّة متطابقات مثلثية أُخرى.

**مثال** أُثبِت صِحَّة كل متطابقة ممّا يأتي:

**1** $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$

**2** $\frac{1+\tan x}{1-\tan x} = \tan\left(\frac{\pi}{4}+x\right)$

**b)** $\frac{\tan x - 1}{\tan x + 1} = \tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

---

أُثبِت صِحَّة كلٍّ من المتطابقات الآتية:

**31** $\sin(A+B) + \sin(A-B) = 2\sin A \cos B$

---

أتحقَّق من فهمي

**a)** $\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot x$

---

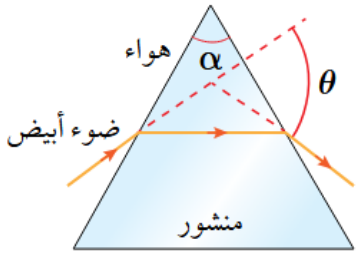
**32** $\sin A + \cos A = \sqrt{2}\ \sin\left(A + \frac{\pi}{4}\right)$

33 $$\frac{\sin(A-B)}{\cos A\cos B}+\frac{\sin(B-C)}{\cos B\cos C}+\frac{\sin(C-A)}{\cos C\cos A}=0$$

34 $$\cos(x+y)\cos(x-y)=\cos^2 x-\sin^2 y$$

16 **تبرير:** أُثبِت صِحَّة المتطابقة: $\tan(s+t)=\dfrac{\sin(t)\cos(s)+\sin(s)\cos(t)}{\cos(t)\cos(s)-\sin(s)\sin(t)}$، ثمَّ أُبرِّر إجابتي.

28 **منشـــور:** يُمكِن قياس معامل انكسار الضوء الأبيض في المنشور باستعمال المعادلة الآتية:




$$n=\frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

إذا كانت $\alpha=60°$، فأُثبِت أنَّ معادلة معامل الانكسار تُكتَب في صورة:

$$n=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\cot\frac{\theta}{2}.$$

30 إذا كان: $a\sin x + b\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$، فأجد قيمة كلٍّ من $a$، و$b$.

$a = \frac{\sqrt{3}}{2}, b = \frac{1}{2}$

---

15 إذا كان: $A + B = \frac{\pi}{4}$، فأُثبِت أنَّ: $\tan A = \frac{1 - \tan B}{1 + \tan B}$.

14 إذا كان: $\sin x + \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$، فأُثبِت أنَّ: $\tan x = 2 - \sqrt{3}$.

## تدريب :

المقدار المكافئ للمقدار $\tan(x-\frac{\pi}{4})$ هو:

a) $\frac{1-\tan x}{1+\tan x}$

b) $\frac{1+\tan x}{1-\tan x}$

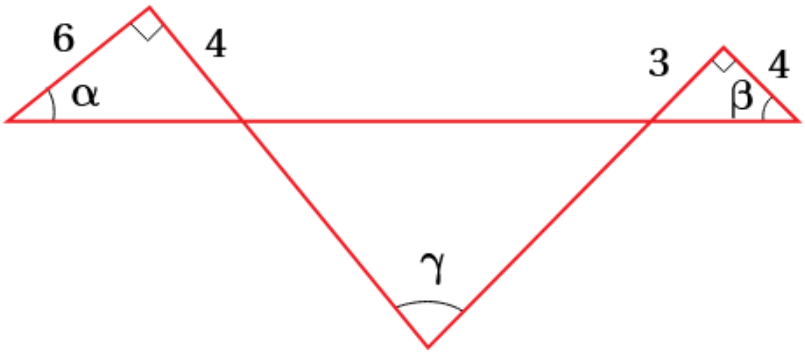
c) $\frac{\tan x-1}{\tan x+1}$

d) $\frac{\tan x+1}{\tan x-1}$

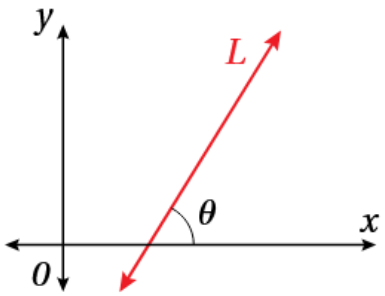
C

38 تبرير: إذا كان: $\tan\alpha = x+1$، و $\tan\beta = x-1$، فأُثبِت أنَّ: $2\cot(\alpha-\beta) = x^2$، ثمَّ أُبرِّر إجابتي.

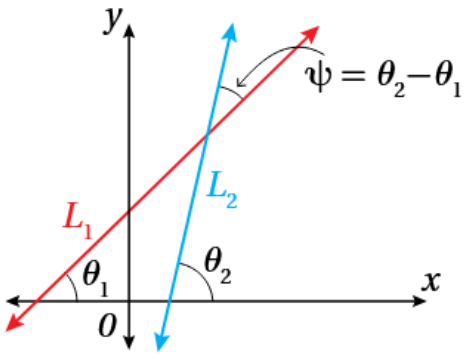
**37** تحدٍّ: اعتمادًا على الشكل الآتي، أُثبِت أنَّ: $\gamma = \alpha + \beta$، ثمَّ أجد $\tan\gamma$.




$\frac{17}{6}$




**35** **زاوية الميل**: إذا كان $L$ مستقيمًا في المستوى الإحداثي، و$\theta$ الزاوية التي يصنعها المستقيم مع المحور $x$ الموجب، فإنَّ الزاوية $\theta$ تُسمّى زاوية ميل المستقيم $L$. أُثبِت أنَّ ميل المستقيم $m$ يعطى بالمعادلة: $m = \tan\theta$، حيث: $0 < \theta < \pi$.




**36** إذا كان $L_1$ و $L_2$ مستقيمين غير متوازيين في المستوى الإحداثي، وميل كلٍّ منهما $m_1$ و $m_2$ على الترتيب، وكانت $\psi$ هي الزاوية الناتجة من تقاطع المستقيمين كما في الشكل المجاور، فأستعمل النتيجة من السؤال السابق لإثبات أنَّ:

$$\tan\psi = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

ملحوظة: الرمز $\psi$ هو حرف يوناني يُقرَأ: (بساي).

**39** **تبرير:** أجد قيمة $\sin\left(\cos^{-1}\frac{1}{2}+\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$، ثمَّ أُبرِّر إجابتي.

$$\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

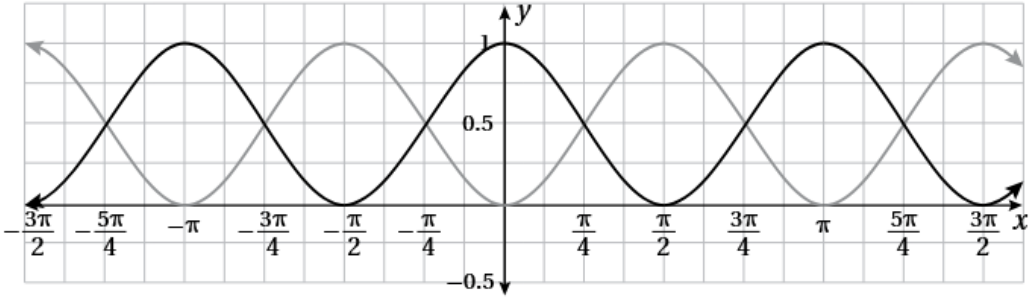
---

**40** **أكتشف الخطأ:** أكتشف الخطأ في المسألة الآتية، ثمَّ أُصحِّحه:

$$\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{4}\cos x-\cos\frac{\pi}{4}\sin x$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x-\sin x)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\sin x-\cos x)$$

**17 تبرير:** يُبيِّن التمثيل البياني الآتي منحنيي الاقترانين: $y = \sin^2 x$، و $y = \cos^2 x$، حيث الزوايا بالراديان. أستعمل هذا التمثيل لإثبات أنَّ: $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$.




من التمثيل البياني نلاحظ أن المنحنيين متماثلان حول المستقيم الذي معادلته $y = \frac{1}{2}$

فإذا أخذنا أي نقطتين متماثلتين، فإن لهما البعد نفسه عن محور التماثل.

لتكن الزاوية $\theta$ التي صورتها $\sin^2 \theta$ بالاقتران الأول، وصورتها $\cos^2 \theta$ بالاقتران الثاني.

بما أن البعدين عن محور التماثل متساويان فإنه لدينا ثلاث حالات:

1) إذا كان منحنى $y = \sin^2 \theta$ فوق منحنى $y = \cos^2 \theta$ :

نكتب: $\sin^2 \theta - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \cos^2 \theta$ ومنه $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$

2) إذا كان منحنى $y = \cos^2 \theta$ فوق منحنى $y = \sin^2 \theta$ :

نكتب: $\cos^2 \theta - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \sin^2 \theta$ ومنه $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$

3) عند نقاط التقاطع فإن $\sin^2 \theta = \frac{1}{2}$ و $\cos^2 \theta = \frac{1}{2}$ ومنه $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$

أي أنه أيًّا كان قياس الزاوية $\theta$ فإن $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ وهو المطلوب.