الدرس 2

# الكسور الجزئية
## Partial Fractions

1. عندما درجة البسط أقل من درجة المقام.
2. عندما درجة البسط أكبر أو تساوي درجة المقام.

**الجزء الأول**
**عندما درجة البسط أقل من درجة المقام**

**ثلاث حالات لتجزئة الكسور**

| عوامل المقام كثيرات حدود خطية مختلفة. | عوامل المقام كثيرات حدود خطية أحدهما مكرر. | عوامل المقام أحداهم كثير حدود تربيعي و لا يحلل. |
|---|---|---|

**حالة 1** عوامل المقام كثيرات حدود خطية مختلفة.

مثال تمهيدي: أجزء $\frac{2x-13}{x^2-x-2}$ إلى كسور جزئية.

$$\frac{2x-13}{(x-2)(x+1)} = \frac{-3}{x-2} + \frac{5}{x+1}$$

**مثال** أُجزِّئ كُلًّا من المقادير النسبية الآتية إلى كسور جزئية:

1 $\dfrac{2x-5}{(x+2)(x+3)}$

$$\frac{2x-5}{(x+2)(x+3)}=\frac{-9}{x+2}+\frac{11}{x+3}$$

---

2 $\dfrac{2x+22}{x^2+2x}$

$$\frac{x}{x(x+2)}=\frac{11}{x}-\frac{9}{x+2}$$

**3** $\dfrac{x}{8x^2 - 10x + 3}$

$$\frac{x}{(4x-3)(2x-1)} = \frac{3}{2(4x-3)} - \frac{1}{2(2x-1)}$$

**4** $\dfrac{36+5x}{16-x^2}$

$$\frac{36+5x}{(4-x)(4+x)}=\frac{7}{4-x}+\frac{2}{4+x}$$

**5** $\dfrac{2-3x-4x^2}{x(x-1)(1-2x)}$

$$\frac{2-3x-4x^2}{x(x-1)(1-2x)}=\frac{-2}{x}+\frac{5}{x-1}+\frac{2}{1-2x}$$

6 $\dfrac{9-5x}{x^3-4x^2+3x}$

$$\frac{9-5x}{x(x-3)(x-1)}=\frac{3}{x}-\frac{1}{x-3}-\frac{2}{x-1}$$

**7** $\dfrac{5+3x-x^2}{-x^3+3x^2+4x-12}$

$$\frac{x^2-3x-5}{(x-3)(x-2)(x+2)}=\frac{-1}{x-3}+\frac{7}{4(x-2)}+\frac{1}{4(x+2)}$$

**8** $\dfrac{1}{2x^3-3x^2-32x-15}$

$$\frac{1}{(x+3)(x-5)(2x+1)} = \frac{1}{40(x+3)} + \frac{1}{88(x-5)} - \frac{4}{55(2x+1)}$$

## تدريب 1

أجزء كلاً من المقادير النسبية الآتية إلى كسور جزئية:

1) $\dfrac{5x-1}{2x^2-5x-3}$

1) $\dfrac{5x-1}{2x^2-5x-3}=\dfrac{1}{2x+1}+\dfrac{2}{x-3}$

2) $\dfrac{ax+b}{x^2-c^2}$

2) $\dfrac{ax+b}{x^2-c^2}=\dfrac{ac+b}{2c(x-c)}+\dfrac{ac-b}{2c(x+c)}$

3) $\dfrac{9x^2-9x+6}{2x^3-x^2-8x+4}$

$$\frac{9x^2-9x+6}{2x^3-x^2-8x+4}=\frac{-1}{2x-1}+\frac{2}{x-2}+\frac{3}{x+2}$$

4) $\dfrac{x^2+x-6}{x^3+5x^2+2x-8}$

4) $\dfrac{x^2+x-6}{x^3+5x^2+2x-8}=\dfrac{2}{3(x+2)}-\dfrac{4}{15(x-1)}+\dfrac{3}{5(x+4)}$

## حالة 2 عوامل المقام حدود خطية أحدهما مكرر

**ملحوظة**

المقصود بأحدهما مكرر هو خطي مرفوع لقوة

ويكون الحل كالحالة الأولى ولكن يختلف الفرض.

**تدريب على الفرض:**

* $\frac{x}{(x-1)(x+2)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2}$
* $\frac{3x-1}{(x+3)(x-1)^3} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} + \frac{D}{(x-1)^3}$
* $\frac{1}{x^2(x+5)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+5}$

**مثال تمهيدي** أجزء $\frac{1}{(x+1)(x-2)^2}$ إلى كسور جزئية.

$$\frac{1}{9(x+1)} - \frac{1}{9(x-2)} + \frac{1}{3(x-2)^2}$$

**مثال** أُجزِّئ كُلًّا من المقادير النسبية الآتية إلى كسور جزئية:

1 $\dfrac{-x^2+2x+4}{x^3-4x^2+4x}$

$$\frac{-x^2+2x+4}{x(x-2)^2}=\frac{1}{x}+\frac{-2}{(x-2)}+\frac{2}{(x-2)^2}$$

2 $\dfrac{x^2+8x+4}{x^3-2x^2}$

$$\frac{x^2+8x+4}{x^2(x-2)}=\frac{-5}{x}-\frac{2}{x^2}+\frac{6}{x-2}$$

**3** $\dfrac{7x-3}{x^2-8x+16}$

$$\frac{7x-3}{(x-4)^2}=\frac{7}{x-4}+\frac{25}{(x-4)^2}$$

**4** $\dfrac{5x+8}{4x^3-12x^2+9x-2}$

$$\frac{5x+8}{(x-2)(2x-1)^2}=\frac{2}{x-2}-\frac{4}{2x-1}-\frac{7}{(2x-1)^2}$$

## تدريب 2

أجزء كلاً من المقادير النسبية الآتية إلى كسور جزئية:

1) $\dfrac{3x^2+2x+6}{(x-2)(x-3)^2}$

1) $\dfrac{3x^2+2x+6}{(x-2)(x-3)^2}=\dfrac{22}{x-2}-\dfrac{19}{x-3}+\dfrac{39}{(x-3)^2}$

**2)** $\dfrac{ax+b}{(x-c)^2}$

$$2)\ \frac{ax+b}{(x-c)^2}=\frac{a}{x-c}+\frac{ac+b}{(x-c)^2}$$

3) $\dfrac{2x^2-3x-27}{x^3-6x^2+9x}$

$$\frac{2x^2-3x-27}{x^3-6x^2+9x}=\frac{-3}{x}+\frac{5}{x-3}-\frac{6}{(x-3)^2}$$

**حالة 3** عوامل المقام أحدهما كثير حدود تربيعي لا يحلل

**ملحوظة**

أحدهما تربيعي لا يحلل مثل $(x^2+1)$ مجموع مربعين لا يحلل ومثل $x^2+x+1$ ثلاثية الحدود ومميزها سالب لا تحلل وخطوات الحل مثل الحالة الأولى و لكن تختلف طريقة الفرض.

**انتبه !!!** عندما يكون المقام تربيعي لا يحلل يكون البسط اقتران خطي.

**تدريب على الفرض:**

* $\frac{2}{(x-1)(x^2+4)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+4}$
* $\frac{x-3}{(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}$
* $\frac{1}{x(x-1)(x^2+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{Cx+D}{x^2+1}$
* $\frac{2}{x(x+1)^2(x^2+3)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2}+\frac{Dx+E}{x^2+3}$

**مثال**

أُجزِّئ $\frac{x^2-3x+16}{(x+1)(x^2+9)}$ إلى كسور جزئية.

$$\frac{x^2-3x+16}{(x+1)(x^2+9)}=\frac{2}{x+1}+\frac{-x-2}{(x^2+9)}$$

1 $\dfrac{x-3}{x^3+3x}$

$$\frac{x-3}{x(x^2+3)}=\frac{-1}{x}+\frac{x+1}{x^2+3}$$

2 $\dfrac{x^2+2x+40}{x^3-125}$

$$\frac{x^2+2x+40}{(x-5)(x^2+5x+25)}=\frac{1}{x-5}+\frac{-3}{x^2+5x+25}$$

4 $\dfrac{4x^2 - x - 2}{x^4 + 2x^2}$

$$\frac{4x^2 - x - 2}{x^2(x^2 + 2)} = \frac{-1}{2x} - \frac{1}{x^2} + \frac{x + 10}{2(x^2 + 2)}$$

## تدريب 3

أجزء كلاً من المقادير النسبية الآتية إلى كسور جزئية:

**1)** $\dfrac{5x^2+2}{(x^2+3)(1-2x)}$

1) $\dfrac{5x^2+2}{(x^2+3)(1-2x)} = \dfrac{-2x-1}{x^2+3} + \dfrac{1}{1-2x}$

2) $\dfrac{24}{(2x^2+x+5)(x-1)}$

2) $\dfrac{24}{(2x^2+x+5)(x-1)} = \dfrac{3}{x-1} - \dfrac{6x+9}{2x^2+x+5}$

## الجزء الثاني
## عندما درجة البسط أكبر أو يساوي من درجة المقام

هام جداً

في هذه الحالة يجب إجراء عملية القسمة ثم التجزئة نستخدم في القسمة طريقة الجدول إذا كان المقسوم عليه خطي (درجة الأولى).

**ونستخدم القسمة الطويلة إذا كان المقسوم عليه غير خطي.**

هام جداً

$$\frac{\text{المقسوم}}{\text{المقسوم عليه}} = \text{الناتج} + \frac{\text{الباقي}}{\text{المقسوم عليه}}$$

**مثال**

أُجزِّئ $\dfrac{2x^2+13x+6}{x^2+6x-16}$ إلى كسور جزئية.

$$\frac{2x^2+13x+6}{x^2+6x-16} = 2 + \frac{-3}{x+8} + \frac{4}{x-2}$$

**مثال** أُجزِّئ كُلًّا من المقادير النسبية الآتية إلى كسور جزئية:

1 $\dfrac{6x^2+8x-7}{2x^2+3x-5}$

$$\frac{6x^2+8x-7}{2x^2+3x-5}=3+\frac{-3}{(2x+5)}+\frac{1}{(x-1)}$$

**2** $\dfrac{-2x^3 - 30x^2 + 36x + 216}{x^3 + 216}$

$$\frac{-2x^3 - 30x^2 + 36x + 216}{x^3 + 216} = -2 + \frac{-6}{x+6} + \frac{-24x + 144}{x^2 - 6x + 36}$$

3 $\dfrac{x^5-2x^4+x^3+x+5}{x^3-2x^2+x-2}$

$$\frac{x^5-2x^4+x^3+x+5}{x^3-2x^2+x-2}=x^2+\frac{3}{x-2}+\frac{-x-1}{x^2+1}$$

## تدريب 4

أجزء كلاً من المقادير النسبية الآتية إلى كسور جزئية:

1) $\dfrac{x^3-3x^2-3x+12}{x^2-3x+2}$

1) $\dfrac{x^3-3x^2-3x+12}{x^2-3x+2}=x+\dfrac{2}{x-2}-\dfrac{7}{x-1}$

2) $\dfrac{3x^2+12x+4}{x^2+x}$

2) $\dfrac{3x^2+12x+4}{x^2+x} = 3+\dfrac{4}{x}+\dfrac{5}{x+1}$

تحدٍّ: أُجزِّئ كُلًّا من المقادير النسبية الآتية إلى كسور جزئية:

1 $\dfrac{x^3-2x^2-4x+3}{x^4}$

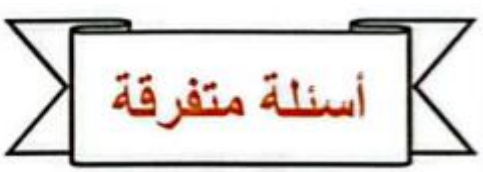
$\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{4}{x^3}+\dfrac{3}{x^4}$

2 $\dfrac{2x^2+6x-5}{(x-2)^3}$

$\dfrac{2x^2+6x-5}{(x-2)^3}=\dfrac{2}{x-2}+\dfrac{14}{(x-2)^2}+\dfrac{15}{(x-2)^3}$

**3** $\dfrac{3x^3+12x-20}{x^4-8x^2+16}$

$$\frac{17}{8(x-2)}+\frac{7}{4(x-2)^2}+\frac{7}{8(x+2)}-\frac{17}{4(x+2)^2}$$




## مثال :

أُبيِّن أنَّه يُمكِن كتابة $\frac{1}{x^2-a^2}$ في صورة $\frac{1}{2a(x-a)}-\frac{1}{2a(x+a)}$ ، حيث $a$ عدد حقيقي لا يساوي صفرًا.

## مثال ( مهارات تفكير عليا )

تبريـر: إذا كان: $\frac{ax+b}{x^2-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}$، فأجـد قيمـة كلٍّ مـن $A$ و$B$ بدلالـة المُتغيِّريـن $a$ و$b$، ثـمَّ أُبـرِّر إجابتي.

$\boxed{A=\frac{a+b}{2}}$ $\boxed{B=\frac{a-b}{2}}$

---

## مثال :

إذا كان: $\frac{5x}{(x+3)^2}=\frac{p}{x+3}-\frac{3p}{(x+3)^2}$، فأجد قيمة $p$.

$\boxed{\rightarrow P=5}$

**مثال : أجزء الكسر** $\frac{1}{x^2 - ax - bx + abx}$ **إلى كسور جزئية**

$$\frac{\frac{1}{-a-b+ab}}{x} + \frac{\frac{1}{a+b-ab}}{x-a-b+ab}$$

## مثال :

إذا كان: $\frac{x^2+8x+7}{(x-1)^2(x^2+2)} = \frac{px-37}{9(x^2+2)} - \frac{p}{9(x-1)} + \frac{8p}{3(x-1)^2}$ ، فأجد قيمة $p$.

$\rightarrow P = 2$

---

## مثال :

أجد الاقتران النسبي الذي يُمكِن كتابته في صورة كسور جزئية على النحو الآتي:

$$\frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{x+1}$$

$$\frac{3x^2-x}{(x-1)^2(x+1)}$$

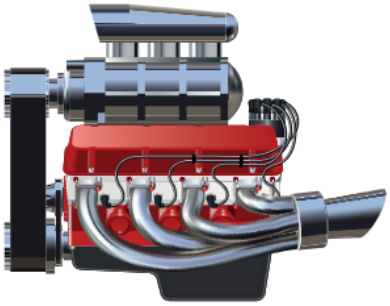
## مثال :

أُجزِّئ المقدار: $\frac{2}{x(x+2)}$ ، ثمَّ أستعمل ناتج التجزئة لإيجاد المجموع الآتي:

$$\frac{2}{1\times 3}+\frac{2}{3\times 5}+\frac{2}{5\times 7}+\ldots+\frac{2}{11\times 13}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{x(x+2)}=\frac{1}{x}+\frac{-1}{x+2}$$

$$\frac{12}{13}$$



هندسة ميكانيكية: يُستعمَل الاقتران الآتي لتقدير درجة الحرارة لعادم مُحرِّك ديزل:

$$R(x) = \frac{2000(4-3x)}{(11-7x)\,(7-4x)}\ ,\ 0 \le x \le 1$$

حيث $x$ مقدار جهد المُحرِّك، و $R(x)$ درجة الحرارة بالفهرنهايت:

1 أُجزِّئ الاقتران $R(x)$ إلى كسور جزئية.

$$R(x) = \frac{2000}{(7-4x)} - \frac{2000}{(11-7x)}$$

---

2 إذا كان $R(x)$ يُمثِّل الفرق بين اقتران أعلى درجة حرارة للعادم واقتران أقل درجة حرارة للعادم، فأجد كُلًّا من الاقترانين، وأستعين بالسؤال السابق في عملية الحلِّ.

اقتران أعلى درجة حرارة للعادم هو $\frac{2000}{7-4x}$ واقتران أقل درجة حرارة للعادم هو $\frac{2000}{11-7x}$ .

**مسألة اليوم**

يُمثِّل الاقتــران: $v = \frac{t^2 - 5t + 6}{(t+2)(t^2-1)}$ العلاقة بين ســرعة ســيّارة $v$ بالكيلومتر لكل ســاعة والزمن $t$ بالساعات. هل يُمكِن كتابة الاقتــران $v$ في صورة مجموع مقدارين جبريين نسبيين، مقام أحدهما $(t+2)$، ومقام الآخر $(t^2-1)$؟

$$= \frac{\frac{20}{3}}{(t+2)} + \frac{\frac{-17}{3}t + \frac{19}{3}}{(t^2-1)}$$

National Center for Curriculum Development

عزيزي الطالب

الأسئلة التالية موجودة في الكتابين سواء كتاب الطالب أو كتاب التمارين ولم تطرح خلال أمثلة الدوسية المحلولة أو ضمن التدريبات وذلك بسبب تكرار هذه الأسئلة وهي:

سـؤال: أجزء كلاً من المقادير النسبية الآتية:

1) $\frac{x^2-2x-3}{(x+1)(2x+5)(7-3x)}$

2) $\frac{8x+3}{x^2-3x}$

3) $\frac{x^3+12x^2+33x+2}{x^2+8x+15}$

4) $\frac{x}{x^2-5x+6}$

5) $\frac{4x-30}{x^2-8x+15}$

6) $\frac{(x-3)^2}{x^3-16x}$

7) $\frac{3x-5}{x(x-1)^2}$

8) $\frac{2x^2-2x-5}{x^3+x^2}$

9) $\frac{2x^2-x-6}{x^3+4x^2+4x}$

10) $\frac{21-7x}{(x+5)(x^2+3)}$

11) $\frac{6x^2-7x+10}{(x-2)(x^2+1)}$

12) $\frac{x^2+x-2}{(2x-1)(x^2+1)}$

## ورقة عمل 2

اختر الاجابة الصحيحة لكل مما يأتي:

1 أي من المقادير الآتية ليس مقداراً نسبياً:

| | |
|---|---|
| ⓐ $\frac{1}{x}$ | ⓑ $\frac{2x}{2x^2+3x-2}$ |
| ⓒ $\frac{x^3-27}{\sqrt[3]{x}-2}$ | ⓓ $\frac{x(1-x)}{x+1}$ |

2 أي من المقادير الآتية مكتوب فس أبسط صورة:

| | |
|---|---|
| ⓐ $\frac{5x-20}{16-x^2}$ | ⓑ $\frac{2x^2-9x+9}{x^2-9}$ |
| ⓒ $\frac{512-x^3}{64-x^2}$ | ⓓ $\frac{x^3-9x}{x^2-x-1}$ |

3 المقدار النسبي $\frac{2}{x+1}-\frac{1}{x}$ بأبسط صورة هو:

| | |
|---|---|
| (a) $\frac{2x+3}{x^2+x}$ | (b) $\frac{x+1}{x^2+x}$ |
| (c) $\frac{1-2x}{x^2+x}$ | (d) $\frac{x-1}{x^2+x}$ |

4 المقدار النسبي $\frac{x-1}{x^2+1}-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}$ بأبسط صورة هو:

| | |
|---|---|
| (a) $\frac{-x^3-2x+2}{x^4+x^2}$ | (b) $\frac{-x^3+x^2-2x+2}{x^3+x^2}$ |
| (c) $\frac{x^2-x^3-2x+2}{x^4+x^2}$ | (d) $\frac{-x^3-2}{x^4+x^2}$ |

5 إذا كان: $\frac{x-4}{x^2-5x-2k}=\frac{2}{x-2}-\frac{1}{x+k}$ فإن قيمة $k$ تساوي:

| | | | |
|---|---|---|---|
| (a) $-3$ | (b) $-1$ | (c) $1$ | (d) $3$ |

6 ذا كان: $\frac{1}{x}-\frac{2-m}{x-1}=\frac{2x+1}{x^2-x}$ فإن قيمة $m$ تساوي:

| | | | |
|---|---|---|---|
| (a) $-1$ | (b) $3$ | (c) $1$ | (d) $-3$ |

7 إذا كان: $\frac{5x-12}{x^2-3x-4}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-4}$ فإن قيمة $A+B$ تساوي:

| | | | |
|---|---|---|---|
| (a) $-7$ | (b) $3$ | (c) $5$ | (d) $-12$ |

8 إذا كان: $g(x)=6x^2-2x+(a+b)$ , $f(x)=(a-b)x^2-2x+2$ . قيمة $a,b$ التي تجعل $f(x)=g(x)$ هي:

| | | | |
|---|---|---|---|
| (a) $\{4,2\}$ | (b) $\{-4,2\}$ | (c) $\{4,-2\}$ | (d) $\{-2,2\}$ |

9 قيمة $m$ التي تجعل $(2x+1)^4-6(2x+1)^2+5=16x(x-3m)(x^2+x-1)$ هي:

| | | | |
|---|---|---|---|
| (A) $-\frac{4}{3}$ | (b) $\frac{4}{3}$ | (c) $\frac{1}{3}$ | (d) $-\frac{1}{3}$ |

10 إذا كان: $\frac{2x^3-4x^2-15x+5}{x^2-2x-8} = 2x + \frac{R(x)}{x^2-2x-8}$ . فإن الاقتران $R(x)$ يعطى بالعلاقة:

| | |
|---|---|
| (a) $2x+1$ | (b) $x^2-3x+6$ |
| (c) $-3x-11$ | (d) $x+5$ |

11 تجزئة المقدار النسبي : $\frac{-15x+5}{x^2(-x^2-4)}$ تكون على الصورة:

| | |
|---|---|
| (a) $\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Cx+D}{x^2+4}$ | (b) $\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x-2}+\frac{D}{x+2}$ |
| (c) $\frac{A}{x^2}+\frac{Bx+C}{-x^2-4}$ | (d) $\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}-\frac{C}{x-2}-\frac{D}{x+2}$ |

12 إذا كان: $\frac{x^3-2x^2-6x+12}{x^2-3x-4} = P(x) + \frac{x+16}{x^2-3x-4}$ . فإن الاقتران $P(x)$ يعطى بالعلاقة

| | |
|---|---|
| (a) $x+1$ | (b) $x-1$ |
| (c) $x^2+1$ | (d) $2x-2$ |

أجيب عن الاسئلة الآتية جميعها:

1 أجزئ كل من المقادير النسبية الآتية إلى كسور جزئية

(a) $\frac{5x^2-6}{x^3-2x^2+x}$

(b) $\frac{3x^2+x-4}{x^2-2x}$

(c) $\frac{4x^2-x-2}{x^4+2x^2}$

(d) $\frac{x^2}{(x^2-4)^2}$

2 أجزئ كل من المقادير النسبية الآتية إلى كسور جزئية بدلالة $a, b, c$

(a) $\frac{ax+b}{x^2-c^2}$

(b) $\frac{ax+b}{(x-c)^2}$

3 أجزّئ المقدار: $\frac{2}{x(x+2)}$. ثم استخدم التجزئة لإيجاد المجموع الآتي.

$$\frac{2}{1\times 3}+\frac{2}{3\times 5}+\frac{2}{5\times 7}+\cdots+\frac{2}{11\times 13}$$

---

4 أجزّئ المقدار: $\frac{3x^3-x^2+12x-6}{x^4+6x^2}$ إلى كسور جزئية

---

## ملحق إجابات أوراق العمل

يتم ارساله عبر مجموعات

تمت الوحدة الأولى

دوسية العميد في الرياضيات

للأساذ عبد الحميد سعدي

0785249733