الدرس3

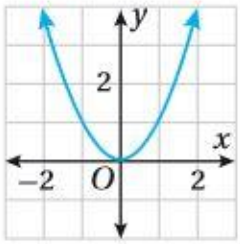
الاقتران التربيعي

خصائصُ الاقترانِ التربيعيِّ

الاقترانُ التربيعيُّ (quadratic function) اقترانٌ يمكنُ كتابتُهُ عَلى الصورةِ $f(x) = ax^2 + bx + c$؛ حيثُ a و b و c أعدادٌ حقيقيَّةٌ، وَ $a \neq 0$، والتي تُسَمّى **الصورةَ القياسيَّةَ** (standard form) للاقترانِ التربيعيِّ، وَمِنْ أمثلتِهِ:

$$f(x) = 4x^2 + 3x + 1 \qquad g(x) = x^2 - 2x \qquad h(x) = 3x^2$$

يُعَدُّ الاقترانُ $f(x) = x^2$ أبسطَ صورِ الاقترانِ التربيعيِّ؛ لِذا يُسَمّى **الاقترانَ الرئيسَ** (parent function) لعائلةِ الاقتراناتِ التربيعيَّةِ.



يأخذُ التمثيلُ البيانيُّ للاقترانِ التربيعيِّ شكلَ الحرفِ الإنجليزيِّ U، وَيُسَمّى **قطعًا مُكافِئًا** (parabola)، كما في الشكلِ المُجاورِ، الذي يُظهِرُ التمثيلَ البيانيَّ للاقترانِ $f(x) = x^2$.

محورُ التَّماثُلِ (axis of symmetry) هُوَ المُستقيمُ الرأسيُّ الذي يقسِمُ القطعَ المُكافِئَ إلى جُزأيْنِ مُتطابقَيْنِ، ويقطعُهُ في نقطةٍ واحدةٍ تُسَمّى **الرأسَ** (vertex).

معاملات الاقتران التربيعي $f(x) = ax^2 + bx + c$

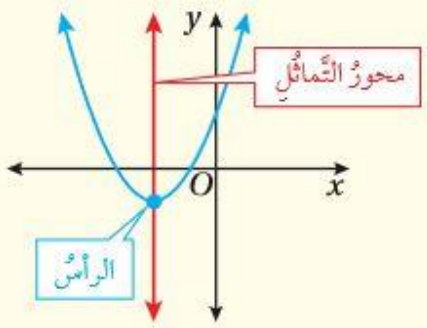
a : معامل x^2 , b : معامل x , c : الحد الثابت (الحد المطلق)

مفهومٌ أساسيٌّ

محورُ تماثُلِ الاقترانِ التربيعيِّ ورأسُهُ

مُعادلةُ محورِ التَّماثُلِ لمُنحنى الاقترانِ التربيعيِّ $f(x) = ax^2 + bx + c$؛ حيثُ $a \neq 0$ هِيَ $x = -\frac{b}{2a}$، وإحداثِيّا رأسِهِ هما:

$$\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$$



مثال: جد معادلة محور التماثل واحداثيات الرأس للاقترانات التالية

1) $f(x) = 2x^2 - 4x$

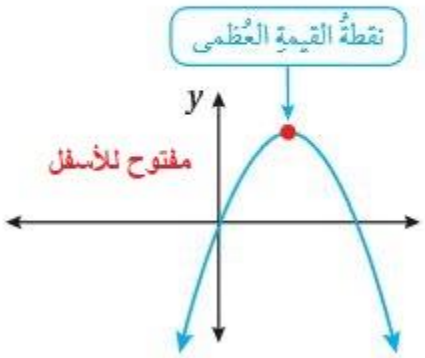
2) $f(x) = x^2 + 6x - 1$

3) $f(x)=5x^2$

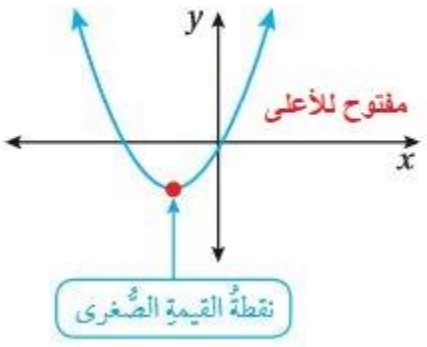
4) $f(x)=4-x^2$

القيم العظمى والصغرى للاقتران التربيعي

$a<0$



$a>0$



مجال القتران التربيعي بشكل عام مجموعة الاعداد الحقيقية (ℝ)

المدى:

مفهومٌ أساسيٌّ

مَدى الاقترانِ التربيعيّ

إذا كانَ $f(x) = ax^2 + bx + c$؛ حيثُ $a \neq 0$، فإنَّ مَدى $f(x)$ يكونُ:

- مجموعةَ الأعدادِ الحقيقيَّةِ التي تزيدُ عَلى القيمةِ الصُّغرى أوْ تُساويها إذا كانَ $a > 0$.
- مجموعةَ الأعدادِ الحقيقيَّةِ التي تقلُّ عَنِ القيمةِ العُظمى أوْ تُساويها إذا كانَ $a < 0$.

مثال: جد القيمة العظمى او الصغرى وحدد المجال والمدى للاقترانات التالية

1) $f(x) = 2x^2 - 8x$

2) $f(x) = 8x - x^2$

3) $g(x)=x^2+9$

4) $h(x)=4-x^2$

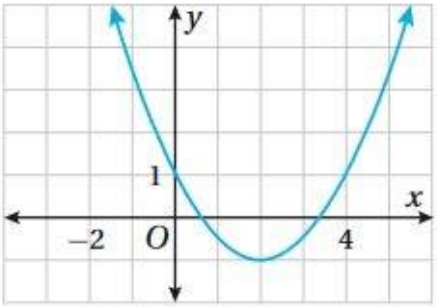
مثال: أَجِدُ رأسَ ومُعادلةَ محورِ التَّماثُلِ، والقيمةَ العُظمى أوِ الصُّغرى وَمَجالَ وَمَدى الاقتراناتِ التربيعيَّةِ الآتيةِ:

1. $f(x)=3x^2$
2. $f(x)=\frac{1}{2}x^2$
3. $f(x)=-x^2+5$
4. $f(x)=x^2+3$
5. $f(x)=3x^2+6x-2$
6. $f(x)=-8x+2x^2$
7. $f(x)=-2x^2-6x+4$
8. $f(x)=5+16x-2x^2$
9. $f(x)=-2(x-4)^2-3$

تحديد خصائص الاقتران التربيعي من خلال رسمة الاقتران التربيعي

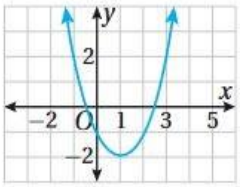
مثال:

أَجِدُ رأس ومُعادلةَ محورِ التَّماثُلِ، وَالقيمةَ العُظمى أوِ الصُّغرى وَمَجـــالَ وَمَدى القطعِ المُكافِئِ المُمَثَّلِ بيانِيًّا في المُستوى الإحداثِيِّ المُجاورِ:

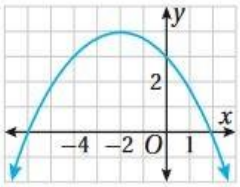


مثال: أَجِدُ رأسَ ومُعادلةَ محورِ التَّماثُلِ والقيمةَ العُظمى أوِ الصُّغرى ومجالَ وَمَدى كلٍّ مِنَ القطوعِ المُكافِئةِ الآتيةِ:

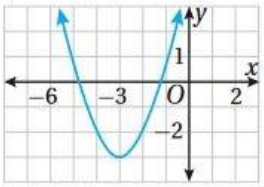
1)



2)



3)



تطبيقات فيزيائية على القيم العظمى والصغرى (القيم القصوى)

مثال: قذفت كرة حسب العلاقة $h(t)=16t-4t^2$ **حيث t: الزمن بالثواني , h: الارتفاع بالامتار, جد :**

1) ارتفاع الكرة بعد مرور ثانية واحدة

2) اقصى ارتفاع تصل اليه الكرة

مثال: مدفع يطلق قذائف حسب العلاقة $h(t)=4t-t^2$ **حيث t: الزمن بالثواني , h: الارتفاع بالكيلومتر, جد :**

1) ارتفاع القذيفة بعد مرور 3 ثواني

2) اقصى ارتفاع تصل اليه القذيفة

مثال : يُمَثِّلُ الاقترانُ $f(x) = -\frac{1}{20}x^2 + x$ ارتفاعَ جندبٍ بالسنتيمترِ فوقَ سطحِ الأرضِ عندَ قفزِهِ؛ حيثُ x المسافةُ الأفقيَّةُ مِنْ نقطةِ القفزِ. أَجِدُ أقصَى ارتفاعٍ يمكنُ أنْ يَصِلَ إليهِ الجندبُ.

مثال: يُمَثِّلُ الاقترانُ $h(t) = -4.9t^2 + 3.8t + 0.5$ ارتفاعَ كرةِ مضربٍ بالأمتارِ فوقَ سطحِ الأرضِ، بعدَ t ثانيةً مِنْ ضربِ سميرٍ لها.

1) أَجِدُ ارتفاعَ الكرةِ لحظةَ ضربِ سميرٍ لها.

2) أَجِدُ أقصَى ارتفاعٍ يمكنُ أنْ تَصِلَ إليهِ الكرةُ.

تمثيل الاقتران التربيعي بيانياً

للتمثيل البياني الافضل نجد محور التماثل ونأخذ قيمتين اكبر منه وقيمتين اقل منه ونشكل جدول

مثال: مثّل الاقترانات التالية بيانياً

1) $f\left(x\right)=x^2-4x+3$

2) $f\left(x\right)=9-x^2$