# الرياضيات

## إجابات تدريبات ومسائل
## اختبار الوحدة الأولى

## كتاب الطالب (الصفحات 54 + 55

## الصف : الثاني عشر ( أعمال )

إعداد المعلمة :- لينا دباس

# اختبار نهاية الوحدة الأولى صفحة 54 + 55 من كتاب الطالب

## اختبار نهاية الوحدة

أختار رمز الإجابة الصحيحة في كلٍّ ممّا يأتي:

1 إذا كان: $A=\begin{bmatrix}15 & -8 & 0\\ 9 & 22 & -4\\ -3 & 6 & 12\end{bmatrix}$، فإنَّ $a_{21}+a_{32}$ يساوي:

a) 15 b) $-12$

c) 5 d) $-2$

2 إذا كانت $A_{3\times2}$، وكانت $B_{2\times4}$، وكانت $C_{3\times2}$، فإنَّ العملية التي يُمكِن إيجادها هي:

a) $A+B$ b) $B+C$

c) $5B-3C$ d) $(A+C)B$

3 إذا كانت: $\begin{bmatrix}4 & x\\ 7 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2x-y & 2\\ 4 & z\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}3 & 1\\ 1 & x-z\end{bmatrix}$، فإنَّ قيمة $(x+y+z)$ تساوي:

a) 10 b) 19

c) 21 d) 26

4 إذا كانت: $\begin{bmatrix}-8 & x\\ 2 & 3\end{bmatrix}$ مصفوفة مُنفرِدة، فإنَّ قيمة $x$ تساوي:

a) $-8$ b) $-12$

c) 6 d) $-26$

5 إذا كان: $C=\begin{bmatrix}-2 & 4\\ 6 & -3\\ 8 & 5\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}1 & 4 & 5\\ 9 & -2 & -3\end{bmatrix}$، فإنَّ قيمة العنصر $c_{23}$ تساوي:

**a)** 39 **b)** 22

**c)** 25 **d)** 27

6 إذا كانت $L_{3\times4}$، وكانت $M_{5\times3}$، وكانت $N_{2\times5}$، فإنَّ رتبة المصفوفة $T$، حيث: $T=NML$، هي:

**a)** $2\times3$ **b)** $3\times5$

**c)** $3\times4$ **d)** $2\times4$

إذا كان: $A=\begin{bmatrix}a-3 & -2\\ 2 & a+2\end{bmatrix}$، حيث $a$ عدد ثابت، فأُجيب عن الأسئلة الثلاثة الآتية تباعًا:

7 أجد مُحدِّدة $A$ بدلالة $a$.

8 أجد قِيَم $a$ التي تجعل المصفوفة $A$ مُنفرِدة.

9 أجد $A^{-1}$ عندما $a=3$.

| | |
|---|---|
| 7 | $\lvert A\rvert=(a-3)(a+2)+4=a^2-a-2$ |
| 8 | $\lvert A\rvert=0 \Rightarrow a^2-a-2=0$<br>$\Rightarrow (a-2)(a+1)=0$<br>$\Rightarrow a=2\ ,\ a=-1$ |
| 9 | $a=3$<br>$A=\begin{bmatrix}0 & -2\\ 2 & 5\end{bmatrix}\ ,\ \lvert A\rvert=0+4=4\ ,\ A^{-1}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}5 & 2\\ -2 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1.25 & 0.5\\ -0.5 & 0\end{bmatrix}$ |

إذا كان: $A=\begin{bmatrix}3 & -2\\ 0 & -1\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}6 & 2 & -5\\ 3 & 7 & 4\end{bmatrix}$

$C=\begin{bmatrix}3 & 9\\ -4 & 1\\ 0 & 8\end{bmatrix}, D=\begin{bmatrix}6 & 4 & 2\\ 1 & -2 & -3\end{bmatrix}$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي (إنْ أمكن):

10 $C(B+D)$

11 $AB$

12 $B+C$

13 $2B-3C$

| | |
|---|---|
| 10 | $C(B+D)=\begin{bmatrix}3 & 9\\ -4 & 1\\ 0 & 8\end{bmatrix}\times\left(\begin{bmatrix}6 & 2 & -5\\ 3 & 7 & 4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}6 & 4 & 2\\ 1 & -2 & -3\end{bmatrix}\right)$ $=\begin{bmatrix}3 & 9\\ -4 & 1\\ 0 & 8\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}12 & 6 & -3\\ 4 & 5 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}72 & 63 & 0\\ -44 & -19 & 13\\ 32 & 40 & 8\end{bmatrix}$ |
| 11 | $AB=\begin{bmatrix}3 & -2\\ 0 & -1\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}6 & 2 & -5\\ 3 & 7 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}12 & -8 & -23\\ -3 & -7 & -4\end{bmatrix}$ |
| 12 | بما أن C,B من رتبتين مختلفتين، فلا يمكن إيجاد $B+C$ |
| 13 | بما أن C,B من رتبتين مختلفتين، فلا يمكن إيجاد $2B-3C$ |

14 أجد: $\begin{vmatrix}3 & -7 & 6\\ 1 & 0 & 8\\ -2 & 11 & 9\end{vmatrix}$.

14

$$\begin{vmatrix}3 & -7 & 6\\ 1 & 0 & 8\\ -2 & 11 & 9\end{vmatrix}=3\times\begin{vmatrix}0 & 8\\ 11 & 9\end{vmatrix}+7\times\begin{vmatrix}1 & 8\\ -2 & 9\end{vmatrix}+6\times\begin{vmatrix}1 & 0\\ -2 & 11\end{vmatrix}$$
$$=3(0-88)+7(9+16)+6(11+0)$$
$$=-264+175+66=-23$$

15 يُبيِّن الجدول التالي توزيع سُكّان إحدى البلدات (بالآلاف) بحسب فئات العمر والجنس. أُنظِّم هذه البيانات في مصفوفة صفوفها فئات الأعمار، ثمَّ أُحدِّد رتبتها.

| العمر | الذكور | الإناث |
|---|---|---|
| 0 — 19 | 71 | 66 |
| 20 — 39 | 68 | 59 |
| 40 — 59 | 32 | 22 |
| 60 فأكثر | 11 | 14 |

15

$$\begin{bmatrix} 71 & 66 \\ 68 & 59 \\ 32 & 22 \\ 11 & 14 \end{bmatrix}$$

رتبة هذه المصفوفة هي $4 \times 2$

16 إذا كان: $A = \begin{bmatrix} x & 6 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$، فأجد قيمة $x$ التي تجعل $AB = BA$.

16

$$AB = \begin{bmatrix} x & 6 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x+12 & 3x+6 \\ 14 & 15 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x & 6 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x+12 & 21 \\ 2x+4 & 15 \end{bmatrix}$$

$$AB = BA \implies 3x+6 = 21 \implies x = 5$$

17 إذا كان: $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$، فأجد قيمة كلٍّ من الثابت $k$ والثابت $h$ اللذينِ يجعلان $A^2 + kI = hA$.

17

$$A^2 + kI = hA \implies \begin{bmatrix}3 & 2\\ 7 & 5\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}3 & 2\\ 7 & 5\end{bmatrix} + k\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} = h\begin{bmatrix}3 & 2\\ 7 & 5\end{bmatrix}$$

$$\implies \begin{bmatrix}23 & 16\\ 56 & 39\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}k & 0\\ 0 & k\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3h & 2h\\ 7h & 5h\end{bmatrix}$$

$$16 = 2h \implies h = 8$$

$$23 + k = 3h = 24 \implies k = 1$$

18 إذا كانت: $A = [2 \ \ -2], B = \begin{bmatrix}3\\ 2\end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix}1 & -2\\ 4 & -1\end{bmatrix}$،
فأجد $BA - 2C^2$.

19 أحُلُّ المعادلة: $2X - \begin{bmatrix}5 & -3\\ 6 & 3\end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix}-1 & 7\\ 2 & 5\end{bmatrix}$.

18

$$BA - 2C^2 = \begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}2 & -2\end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix}1 & -2\\4 & -1\end{bmatrix} \times \begin{bmatrix}1 & -2\\4 & -1\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}6 & -6\\4 & -4\end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix}-7 & 0\\0 & -7\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}6 & -6\\4 & -4\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}14 & 0\\0 & 14\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}20 & -6\\4 & 10\end{bmatrix}$$

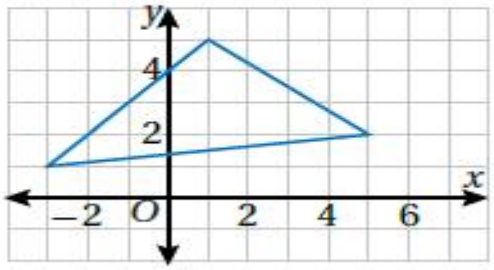
19

$$2X - \begin{bmatrix}5 & -3\\6 & 3\end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix}-1 & 7\\2 & 5\end{bmatrix} \Rightarrow 2X = \begin{bmatrix}-3 & 21\\6 & 15\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}5 & -3\\6 & 3\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow 2X = \begin{bmatrix}2 & 18\\12 & 18\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow X = \begin{bmatrix}1 & 9\\6 & 9\end{bmatrix}$$

20 أجد مساحة المُثلَّث الآتي باستعمال المُحدِّدات.




20

$$A = \begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \times \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} + 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -3(5-2) - 1(1-5) + 1(2-25)$$

$$= -9 + 4 - 23 = -28$$

$$Area = \frac{1}{2}|A| = \frac{1}{2} \times 28 = 14$$

21 أحُلُّ نظام المعادلات الآتي باستعمال قاعدة كريمر:

$$3x - 2y = 8$$
$$5x + 3y = 13$$

21

$$3x - 2y = 8$$

$$5x + 3y = 13$$

$$C = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \ , \ D = |C| = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 9 + 10 = 19$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 8 & -2 \\ 13 & 3 \end{vmatrix}}{19} = \frac{24 + 26}{19} = \frac{50}{19}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 5 & 13 \end{vmatrix}}{19} = \frac{39 - 40}{19} = \frac{-1}{19}$$

إذن، حل النظام هو: $\left(\frac{50}{19}, -\frac{1}{19}\right)$

22 أحُلُّ نظام المعادلات الآتي باستعمال النظير الضربي:

$$x - 5y = 14$$
$$3x - 8y = 28$$

| | |
|---|---|
| | $x - 5y = 14$<br>$3x - 8y = 28$ |
| 22 | $AX = B \implies \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 3 & -8 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 28 \end{bmatrix}$<br>$\lvert A \rvert = -8 + 15 = 7$<br>$A^{-1} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} -8 & 5 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{8}{7} & \frac{5}{7} \\ \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \end{bmatrix}$<br>$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} -\frac{8}{7} & \frac{5}{7} \\ \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 14 \\ 28 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}$<br>إذن، حل هذا النظام هو $(4, -2)$ |

23 إذا كان: $B = \begin{bmatrix} 2 & a \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$، حيث $a$ عدد ثابت لا يساوي 2، وكان: $B + B^{-1} = I$، فأجد قيمة $a$.

23

$$B = \begin{bmatrix} 2 & a \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \ , \ |B| = -2 + a$$

$$B^{-1} = \frac{1}{a-2}\begin{bmatrix} -1 & -a \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{a-2} & \frac{-a}{a-2} \\ \frac{1}{a-2} & \frac{2}{a-2} \end{bmatrix}$$

$$B + B^{-1} = I \implies \begin{bmatrix} 2 & a \\ -1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{-1}{a-2} & \frac{-a}{a-2} \\ \frac{1}{a-2} & \frac{2}{a-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\implies 2 + \frac{-1}{a-2} = 1 \implies \frac{-1}{a-2} = -1 \implies a - 2 = 1 \implies a = 3$$

24 كيمياء: لدى عائشة 3 محاليل حمضية، تركيز الحمض في المحلول الأوَّل 10%، وتركيزه في المحلول الثاني 20%، وتركيزه في المحلول الثالث 40%. أكتب معادلة مصفوفية تُمثِّل المسألة، ثمَّ أحُلُّها لإيجاد الكميات التي يتعيَّن على عائشة مزجها من المحاليل الثلاثة للحصول على 100 mL من محلول حمضي نسبة تركيزه 18%، علمًا بأنَّ الكمية التي ستُستعمَل من المحلول الذي تركيزه 10% تساوي أربعة أمثال ما سيُستعمَل من المحلول الذي تركيزه 40%.

24

أفترض أن عائشة تستعمل $x\ ml$ من المحلول الذي تركيزه 40%، فسوف تستعمل $4x\ ml$ من المحلول الذي تركيزه 10%، وليكن ما تستعمله من المحلول الذي تركيزه 20% هو $y\ ml$ .

المعادلة الأولى هي: مجموع ما تستعمله من المحاليل الثلاثة هو $100\ ml$

$$x + 4x + y = 100 \implies 5x + y = 100$$

المعادلة الثانية هي: كمية الحمض في المزيج تساوي $\text{mL}18\%(100) = 18$

$$0.40x + 4x(0.10) + 0.20y = 18 \implies 0.4x + 0.1y = 9$$

المعادلة المصفوفية التي تمثل هاتين المعادلتين هي:

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 0.4 & 0.1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 5(0.1) - 0.4(1) = 0.1$$

$$A^{-1} = \frac{1}{0.1}\begin{bmatrix} 0.1 & -1 \\ -0.4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -10 \\ -4 & 50 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -10 \\ -4 & 50 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 100 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 100 - 90 \\ -400 + 450 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 50 \end{bmatrix}$$

إذن سوف تستعمل عائشة 10 mL من المحلول الذي تركيزه 40%، و50 mL من الذي تركيزه 20%، و40 mL من الذي تركيزه 10%.