الرياضيات

إجابات تدريبات ومسائل
الدرس الخامس
(النظير الضربي للمصفوفة)

كتاب التمارين(الصفحات18+19

الصف : الثاني عشر (أعمال)

إعداد المعلمة :ـ لينا دباس

الدرس الخامس :- النظير الضربي للمصفوفة

أُبيِّن إذا كانت كل مصفوفتين ممّا يأتي تُمثِّل إحداهما نظيرًا ضربيًّا للأُخرى:

1) $A=\begin{bmatrix}8 & 3\\5 & 2\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}2 & -3\\-5 & 8\end{bmatrix}$

2) $F=\begin{bmatrix}3 & 5\\-1 & 5\end{bmatrix}, G=\begin{bmatrix}0.25 & -0.25\\1 & 3\end{bmatrix}$

1	$AB=\begin{bmatrix}8 & 3\\5 & 2\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}2 & -3\\-5 & 8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$ بما أن $AB=I$ ، فإن كلًّا من المصفوفة A والمصفوفة B تمثل نظيرًا ضربيًّا للأخرى.
2	$FG=\begin{bmatrix}3 & 5\\-1 & 5\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}0.25 & -0.25\\1 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5.75 & 14.25\\4.75 & 15.25\end{bmatrix}$ بما أن $FG\neq I$ ، فإن كلًّا من المصفوفة F والمصفوفة G لا تمثل نظيرًا ضربيًّا للأخرى.

أُبيِّن إذا كانت كلٌّ من المصفوفات الآتية مُنفرِدة أو غير مُنفرِدة، ثمَّ أجد النظير الضربي لغير المُنفرِدة منها:

3) $M=\begin{bmatrix}4 & -10\\-2 & 5\end{bmatrix}$

4) $N=\begin{bmatrix}-3 & -11\\6 & 2\end{bmatrix}$

5) $R=\begin{bmatrix}3 & -4\\-2 & -3\end{bmatrix}$

3	$M=\begin{bmatrix}4 & -10\\-2 & 5\end{bmatrix}\ ,\quad |M|=20-20=0$ بما أن $|M|=0$، فإن المصفوفة M منفردة، ولا نظير ضربي لها.
4	$N=\begin{bmatrix}-3 & -11\\6 & 2\end{bmatrix}\ ,\quad |N|=-6+66=60$ بما أن $|N|\neq 0$، فإن المصفوفة N غير منفردة، ولها نظير ضربي هو N^{-1} $N^{-1}=\frac{1}{60}\begin{bmatrix}2 & 11\\-6 & -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{30} & \frac{11}{60}\\-\frac{1}{10} & -\frac{1}{20}\end{bmatrix}$
5	$R=\begin{bmatrix}3 & -4\\-2 & -3\end{bmatrix}\ ,\quad |R|=-9-8=-17$ بما أن $|R|\neq 0$، فإن المصفوفة R غير منفردة، ولها نظير ضربي هو R^{-1} $R^{-1}=-\frac{1}{17}\begin{bmatrix}-3 & 4\\2 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{3}{17} & -\frac{4}{17}\\-\frac{2}{17} & -\frac{3}{17}\end{bmatrix}$

أحُلُّ أنظمة المعادلات الآتية باستعمال النظير الضربي:

6 $-2x + y = 13$, $x - 2y = -11$

7 $4x + 5y = 22$, $3x + 4y = 17$

8 $3x - 8y = 34$, $2y - 4x - 28 = 0$

6

$$-2x + y = 13$$
$$x - 2y = -11$$

$$AX = B \implies \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ -11 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 4 - 1 = 3$$

$$A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 13 \\ -11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

إذن، حل هذا النظام هو $(-5,3)$

7

$$4x + 5y = 22$$
$$3x + 4y = 17$$

$$AX = B \implies \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 \\ 17 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 16 - 15 = 1$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 22 \\ 17 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

إذن، حل هذا النظام هو $(3,2)$

8	$3x - 8y = 34$ $-4x + 2y = 28$ $AX = B \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & -8 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 34 \\ 28 \end{bmatrix}$ $\lvert A \rvert = 6 - 32 = -26$ $A^{-1} = -\frac{1}{26}\begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-2}{26} & \frac{-8}{26} \\ \frac{-4}{26} & \frac{-3}{26} \end{bmatrix}$ $X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} \frac{-2}{26} & \frac{-8}{26} \\ \frac{-4}{26} & \frac{-3}{26} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 34 \\ 28 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-68-224}{26} \\ \frac{-136-84}{26} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-292}{26} \\ \frac{-220}{26} \end{bmatrix}$ إذن، حل هذا النظام هو $\left(\frac{-292}{26}, \frac{-220}{26}\right)$

9 أجد قيمة x التي تجعل المصفوفة: $\begin{bmatrix} x & 1 \\ 15 & x+2 \end{bmatrix}$ مُنفرِدة.

9	$\begin{vmatrix} x & 1 \\ 15 & x+2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x(x+2) - 15 = 0$ $\Rightarrow x^2 + 2x - 15 = 0$ $\Rightarrow (x+5)(x-3) = 0$ $\Rightarrow x = -5 \ , \ x = 3$

10 إذا كان: $A = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$، فأجد مُحدِّدة A^{-1}، ثمَّ أُبيِّن العلاقة بين $|A|$ و $|A^{-1}|$.

10	$A = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, $\|A\| = -4 + 6 = 2$ $A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, $\|A^{-1}\| = -1 + \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$ $\|A^{-1}\| = \frac{1}{\|A\|}$

11 إذا كان A و B مصفوفتيــن مُربَّعتين من الرتبــة 2×2، وكان: $AB = B^5 A$، وكان: $B^6 = I$، حيث I المصفوفة المُحايِدة، فأُثبِت أنَّ: $B(AB) = A$.

11	$AB = B^5 A \Rightarrow BAB = BB^5 A$ $\Rightarrow BAB = B^6 A$ $\Rightarrow BAB = IA$ $\Rightarrow B(AB) = A$

12 إذا كان: $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$، وكان B مصفوفة مُربَّعة من الرتبة 2×2، حيث: $BA^2 = A$، فأجد المصفوفة B.

12	$BA^2 = A \Rightarrow BAA = A$ $\Rightarrow BAAA^{-1} = AA^{-1}$ $\Rightarrow BA = I$ $\Rightarrow BAA^{-1} = A^{-1}$ $\Rightarrow B = A^{-1}$ $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, $\|A\| = 4 - 3 = 1$, $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ $\Rightarrow B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

13 إذا كانت: $B=\begin{bmatrix}-5 & a\\ 6 & 5\end{bmatrix}$، حيث: $a\neq\frac{-25}{6}$، فأجد قيمة a التي تجعل $B^{-1}=B$.

13	$B=\begin{bmatrix}-5 & a\\ 6 & 5\end{bmatrix}$, $\lvert B\rvert=-25-6a$ بما أن $a\neq-\frac{25}{6}$، فإن المصفوفة B غير منفردة، ولها نظير ضربي هو B^{-1} $B^{-1}=\frac{1}{-25-6a}\begin{bmatrix}5 & -a\\ -6 & -5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{5}{-25-6a} & \frac{a}{25+6a}\\ \frac{6}{25+6a} & \frac{5}{25+6a}\end{bmatrix}$ $B=B^{-1}\Rightarrow\begin{bmatrix}\frac{5}{-25-6a} & \frac{a}{25+6a}\\ \frac{6}{25+6a} & \frac{5}{25+6a}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5 & a\\ 6 & 5\end{bmatrix}$ $\Rightarrow\frac{6}{25+6a}=6$ $\Rightarrow 25+6a=1$ $\Rightarrow 6a=-24$ $\Rightarrow a=-4$

14 تغذية: تُخطِّط اختصاصية تغذية نظامًا غذائيًا للاعب كرة قدم، بحيث يتيح له استهلاك 3600 سعرة حرارية يوميًا؛ بأنْ يأكل 750 g من البروتينات والكربوهيدرات والدهون كل يوم. إذا كان الغرام الواحد لكلٍّ من البروتينات والكربوهيدرات يُزوِّد الجسم بنحو 4 سعرات، وكان الغرام الواحد من الدهون يُزوِّد الجسم بنحو 9 سعرات، وبلغت نسبة السعرات المُقرَّرة التي مصدرها البروتينات والدهون نحو 60%؛ فأكتب معادلة مصفوفية، ثمَّ أحُلُّها لإيجاد مقدار ما يتناوله هذا اللاعب من البروتينات والكربوهيدرات والدهون يوميًا.

14

بما أن 60% من السعرات مصدرها البروتينات والدهون، فإن 40% الباقية مصدرها من الكربوهيدرات، فإذا كانت كمية الكربوهيدرات في طعامه c g، فإن

$$4 \times c = \frac{40}{100} \times 3600 \Longrightarrow 4c = 1440$$

$$\Longrightarrow c = \frac{1440}{4} = 360 \text{ g}$$

وإذا كانت كمية البروتين x، وكمية الدهون y، فإن:

$$x + y = 750 - 360 \Longrightarrow x + y = 390$$

$$4x + 9y = 3600 - 1440 \Longrightarrow 4x + 9y = 2160$$

فالمعادلة المصفوفية التي تستعمل لحل هاتين المعادلتين هي:

$$AX = B \quad \Longrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 9 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 390 \\ 2160 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 9 - 4 = 5$$

$$A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 9 & -1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{9}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} \frac{9}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 390 \\ 2160 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 270 \\ 120 \end{bmatrix}$$

مقدار ما يتناوله هذا اللاعب من البروتينات $270g$ ، ومن الدهون$120g$ ، ووجدنا في بداية الحل أن ما يتناوله من الكربوهيدرات 360 g