

**الرياضيات**

**إجابات تدريبات وسائل**

**الدرس الخامس**

**( النظير الضربي للمصفوفة )**

**كتاب الطالب (الصفحات 52 + 53)**

**الصف : الثاني عشر (أعمال)**

**إعداد المعلمة :- لينا دباس**

## الدرس الخامس : النظير الضريبي للمصفوفة

أُبَيِّنُ فِي كُلِّ مَا يَأْتِي إِذَا كَانَتْ كُلُّ مَسْفُوفَةٍ تُمَثِّلُ نَظِيرًا ضَرِيبًا لِّلمسْفُوفَةِ الْأُخْرَى :

1)  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$

2)  $C = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

3)  $L = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, M = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}$

4)  $G = \begin{bmatrix} -3 & -11 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} 1.5 & 5.5 \\ -0.5 & -1.5 \end{bmatrix}$

1 National Center for Curriculum Development

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

National Center for Curriculum Development

بما أن  $AB \neq I$  ، فإن كلاً من المصفوفة  $A$  والمصفوفة  $B$  لا تمثل نظيرًا ضرِيبًا للأخرى.

2

$$CD = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

بما أن  $CD = I$  ، فإن كلاً من المصفوفة  $C$  والمصفوفة  $D$  تمثل نظيرًا ضرِيبًا للأخرى.

3

$$LM = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

بما أن  $LM = I$  ، فإن كلاً من المصفوفة  $L$  والمصفوفة  $M$  تمثل نظيرًا ضرِيبًا للأخرى.

4

$$GH = \begin{bmatrix} -3 & -11 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1.5 & 5.5 \\ -0.5 & -1.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

بما أن  $GH = I$  ، فإن كلاً من المصفوفة  $G$  والمصفوفة  $H$  تمثل نظيرًا ضرِيبًا للأخرى.

أُبَيِّنُ إِذَا كَانَتْ كُلُّ مِنَ الْمَسْفُوفَاتِ الْآتِيَةِ مُنْفِرِدَةً أَوْ غَيْرُ مُنْفِرِدَةً، ثُمَّ أَجِدُ النَّظِيرَ الضَّرِيبِيَّ لِغَيْرِ الْمُنْفِرِدِ مِنْهَا:

5)  $P = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

6)  $Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

7)  $S = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$

8)  $V = \begin{bmatrix} 8 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

( 1 )

5

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}, \quad |P| = 10 - 12 = -2$$

بما أن  $|P| \neq 0$ ، فإن المصفوفة  $P$  غير منفردة، ولها نظير ضربي هو

$$P^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.5 & 1.5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

6

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}, \quad |Q| = \frac{1}{6} - 0 = \frac{1}{6}$$

بما أن  $|Q| \neq 0$ ، فإن المصفوفة  $Q$  غير منفردة، ولها نظير ضربي هو

$$Q^{-1} = 6 \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{1} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

7

$$S = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}, \quad |S| = -6 + 6 = 0$$

بما أن  $|S| = 0$ ، فإن المصفوفة  $S$  منفردة، ولا نظير ضربي لها.

8

$$V = \begin{bmatrix} 8 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad |V| = 8 + 2 = 10$$

بما أن  $|V| \neq 0$ ، فإن المصفوفة  $V$  غير منفردة، ولها نظير ضربي هو

$$V^{-1} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & \frac{1}{10} \\ -\frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$$

**أحل كلاً من أنظمة المعادلات الآتية باستعمال النظير الضريبي (إن أمكن):**

9)  $\begin{aligned} 3x + 5y &= 13 \\ x - 2y &= -3 \end{aligned}$

10)  $\begin{aligned} -2x + 4y &= 6 \\ x + 2y &= 7 \end{aligned}$

11)  $\begin{aligned} 5x - 8y &= 31 \\ 2y - 3x &= -13 \end{aligned}$

12)  $\begin{aligned} x + y &= 20 \\ x - 2y &= -1 \end{aligned}$

13)  $\begin{aligned} 3x + 2y &= 8 \\ x &= y + 1 \end{aligned}$

14)  $\begin{aligned} 2x + 7y &= 24 \\ 4x + 13y &= 46 \end{aligned}$

	$3x + 5y = 13$	for Curriculum Development	for Curriculum Development	for Curriculum Development
	$x - 2y = -3$			
9	$AX = B \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ -3 \end{bmatrix}$ $ A  = -6 - 5 = -11$	National Center for Curriculum Development	National Center for Curriculum Development	National Center for Curriculum Development
	$A^{-1} = -\frac{1}{11} \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{11} & \frac{5}{11} \\ \frac{1}{11} & -\frac{3}{11} \end{bmatrix}$	National Center for Curriculum Development	National Center for Curriculum Development	National Center for Curriculum Development
	$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} \frac{2}{11} & \frac{5}{11} \\ \frac{1}{11} & -\frac{3}{11} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 13 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$	National Center for Curriculum Development	National Center for Curriculum Development	National Center for Curriculum Development
	إذن، حل هذا النظام هو $(1, 2)$			
10	$-2x + 4y = 6$ $x + 2y = 7$	$AX = B \Rightarrow \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \end{bmatrix}$ $ A  = -4 - 4 = -8$	National Center for Curriculum Development	National Center for Curriculum Development
	$A^{-1} = -\frac{1}{8} \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$	National Center for Curriculum Development	National Center for Curriculum Development	National Center for Curriculum Development
	$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ \frac{5}{2} \end{bmatrix}$	National Center for Curriculum Development	National Center for Curriculum Development	National Center for Curriculum Development
	إذن، حل هذا النظام هو $\left(2, \frac{5}{2}\right)$			
11	$5x - 8y = 31$ $-3x + 2y = -13$	$AX = B \Rightarrow \begin{bmatrix} 5 & -8 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 31 \\ -13 \end{bmatrix}$ $ A  = 10 - 24 = -14$	National Center for Curriculum Development	National Center for Curriculum Development
	$A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & -8 \\ \frac{14}{-14} & \frac{14}{-14} \\ -3 & -5 \\ 14 & 14 \end{bmatrix}$	National Center for Curriculum Development	National Center for Curriculum Development	National Center for Curriculum Development
	$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} -2 & -8 \\ \frac{14}{-14} & \frac{14}{-14} \\ -3 & -5 \\ 14 & 14 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 31 \\ -13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-62 + 104}{14} \\ \frac{14}{-93 + 65} \\ \frac{-28}{14} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{42}{14} \\ \frac{-28}{14} \\ \frac{3}{14} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ \frac{3}{14} \end{bmatrix}$	National Center for Curriculum Development	National Center for Curriculum Development	National Center for Curriculum Development
	إذن، حل هذا النظام هو $(3, -2, \frac{3}{14})$			

$$x + y = 20$$

$$x - 2y = -1$$

$$\text{National Center for Curriculum Development}$$
$$AX = B \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$|A| = -2 - 1 = -3$$

12

$$A^{-1} = -\frac{1}{3} \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 20 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 7 \end{bmatrix}$$

إذن، حل هذا النظام هو (13,7)

$$3x + 2y = 8$$

$$x - y = 1$$

$$AX = B \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$|A| = -3 - 2 = -5$$

13

$$A^{-1} = -\frac{1}{5} \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

إذن، حل هذا النظام هو (2,1)

$$2x + 7y = 24$$

$$4x + 13y = 46$$

$$AX = B \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 13 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 \\ 46 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 26 - 28 = -2$$

14

$$A^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 13 & -7 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{13}{2} & \frac{7}{2} \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} -\frac{13}{2} & \frac{7}{2} \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 24 \\ 46 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

إذن، حل هذا النظام هو (5,2)

صيَّدَلَة: لدِي صيَّدَلَي مَحْلُولَان، ترَكِيزُ الْمَلْحِ فِي أَحَدِهِما 2%， وَتَرَكِيزُهُ فِي الْآخَر 12%. يَرِيد الصيَّدَلَي تَحْضِير 10 L من مَحْلُول، ترَكِيزُ الْمَلْحِ فِيهِ 10%. مَا الْمَعَادَلَةُ الْمَصْفُوفَةُ الَّتِي يَتَعَيَّنُ استِعْمَالُهَا لِتَحْضِيرِ الْكَمْيَةِ الْمَطْلُوَةِ مِنِ الْمَحْلُول؟ أَكْتُبْ مَعَادَلَةً مَصْفُوفَةً تُمَثِّلُ الْمَسَأَةَ، ثُمَّ أَحْلُّهَا.

15

نَفَرَضَ أَنَّ الصيَّدَلَي سَيَسْتَعْمِلُ  $x$  لَتَرًا ترَكِيزُ الْمَلْحِ فِيهِ 2%， وَ  $y$  لَتَرًا ترَكِيزُ الْمَلْحِ فِيهِ 12%.

$$x + y = 10$$

$$0.02x + 0.12y = 0.1 \times 10 = 1$$

$$AX = B \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0.02 & 0.12 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 1 \end{bmatrix}$$

15a

$$|A| = 0.12 - 0.02 = 0.1$$

$$A^{-1} = 10 \begin{bmatrix} 0.12 & -1 \\ -0.02 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.2 & -10 \\ -0.2 & 10 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} 1.2 & -10 \\ -0.2 & 10 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 10 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \end{bmatrix}$$

إذن، سَيَسْتَعْمِلُ الصيَّدَلَي 2L مِنِ الْمَحْلُولِ الَّذِي ترَكِيزُ الْمَلْحِ فِيهِ 2%， وَ 8L مِنِ الثَّانِي.

16



أوراق نقدية: مع سعاد مجموعة من الأوراق النقدية من فئة 10 JD، وفئة 20 JD تبلغ قيمتها الإجمالية 750 JD. إذا علمت أنَّ عدد أوراق فئة العشرين ديناراً يقلُّ عن مثلي عدد أوراق فئة عشرة ديناراً بمقدار 5 أوراق، فأكتب معادلة مصفوفية تمثلُ المسألة، ثمَّ أحلُّها لإيجاد عدد أوراق النقد التي مع سعاد من كلتا الفتاتين.

ليكن  $x$  عدد الأوراق النقدية من فئة 10 JD ،  $y$  عدد الأوراق النقدية من فئة 20 JD

$$10x + 20y = 750$$

$$y = 2x - 5 \Rightarrow 2x - y = 5$$

$$AX = B \Rightarrow \begin{bmatrix} 10 & 20 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 750 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$|A| = -10 - 40 = -50$$

16

$$A^{-1} = -\frac{1}{50} \begin{bmatrix} -1 & -20 \\ -2 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{50} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{50} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} \frac{1}{50} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{50} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 750 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 \\ 29 \end{bmatrix}$$

عدد الأوراق النقدية من فئة 10 JD هو 17، وعدد الأوراق النقدية من فئة 20 JD هو 29.

17

ما قيمة  $x$  التي تجعل المصفوفة:  $\begin{bmatrix} 5 & x \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$  مُنفِّردة؟

$$17 \quad \left| \begin{bmatrix} 5 & x \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \right| = 0 \Rightarrow 20 - 2x = 0 \Rightarrow x = 10$$

18

ما قيمة  $a$  التي تجعل المصفوفة:  $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$  نظيرًا ضريبيًّا لنفسها؟

$$18 \quad \left| \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right| \Rightarrow \begin{bmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow a = \pm 1$$

19

إذا كان:  $(B + C)^{-1} = A$ ، فأجد المصفوفة  $C$ ، بحيث يكون:  $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned}
 (B + C)^{-1} &= A \Rightarrow (B + C)(B + C)^{-1} = (B + C)A \\
 &\Rightarrow I = (B + C)A \\
 &\Rightarrow IA^{-1} = (B + C)AA^{-1} \\
 &\Rightarrow A^{-1} = B + C \\
 &\Rightarrow C = A^{-1} - B \\
 19 \quad A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| &= 4 - 3 = 1 \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \\
 A^{-1} - B &= \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \\
 &\quad C = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

إذا كان  $A$  مصفوفة من الرتبة  $2 \times 2$ , حيث:  $A^3 = A - 6I$ ,  $A^2 = 2A - 3I$ : فأثبت أنَّ 20

$$\begin{aligned}
 20 \quad A^2 &= 2A - 3I \Rightarrow A^3 = A(A^2) = A(2A - 3I) \\
 &= 2A^2 - 3A \\
 &= 2(2A - 3I) - 3A \\
 &= 4A - 6I - 3A \\
 &= A - 6I
 \end{aligned}$$

21 أحلُّ المسألة الواردة في بند (مسألة اليوم).



**مسألة اليوم** استأجر مُنظّمو رحلة بحرية في خليج العقبة 8 قوارب، بعضها يحمل 4 أشخاص، وبعضها الآخر يحمل 7 أشخاص. إذا كان عدد المشاركين في الرحلة 50 شخصاً، فأستعمل معادلة مصفوفية لإيجاد عدد القوارب المستأجرة من كل نوع.

ليكن  $x$  عدد القوارب التي حمولتها 4 أشخاص،  $y$  عدد القوارب التي حمولتها 7 أشخاص.

$$x + y = 8$$

$$4x + 7y = 50$$

$$AX = B \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 50 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 7 - 4 = 3$$

21

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} \frac{7}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 8 \\ 50 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

عدد القوارب التي حمولتها 4 أشخاص هو 2، وعدد القوارب التي حمولتها 7 أشخاص هو 6.

22 تبرير: إذا كان:  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ، وكانت:  $a > 0, d > 0, b < 0, c < 0, |A| \neq 0$ ، فهل توجد عناصر سالبة في  $A^{-1}$ ؟ أُبرر إجابتي.

$$|A| = ad - cb$$

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - cb} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

22

العدد  $\frac{1}{ad - cb}$  قد يكون موجباً أو سالباً، وجميع عناصر المصفوفة  $\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$  هي أعداد موجبة، إذن، إما أن تكون جميع عناصر المصفوفة  $A^{-1}$  موجبة إذا كانت  $|A| > 0$ ، أو جميعها سالبة إذا كانت  $|A| < 0$ .

برهان: إذا كان:  $(AB)^{-1} = B^{-1} \times A^{-1}$  فأثبت أنّ:  $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ ، وكان:  $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  23

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, |A| = 2, A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, |B| = 3 - 1 = 2, B^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

23  $AB = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -11 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, |AB| = 15 - 11 = 4$

$$(AB)^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3 & 11 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{11}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{5}{4} \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} \times A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{11}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{5}{4} \end{bmatrix} = (AB)^{-1}$$

اكتشف المختلف: أي المصفوفات الآتية مختلفة؟ أبّرّ إجابتي. 24

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

المصفوفة المختلفة هي المصفوفة  $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$  لأنها غير منفردة، بينما بقية المصفوفات في المجموعة منفردة. 24

٢٥ تحدّى: إذا كان:  $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$  فأجد المصفوفة  $B$  التي تتحقق المعادلة:  $BA^2 = A$

$$\begin{aligned}
 BA^2 = A &\Rightarrow BAA = A \\
 &\Rightarrow (BAA)A^{-1} = AA^{-1} \\
 &\Rightarrow BA(AA^{-1}) = AA^{-1} \\
 &\Rightarrow (BA)I = I \\
 &\Rightarrow BA = I \\
 &\Rightarrow (BA)A^{-1} = IA^{-1} \\
 &\Rightarrow B(AA^{-1}) = A^{-1} \\
 &\Rightarrow BI = A^{-1} \\
 &\Rightarrow B = A^{-1} \\
 A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad |A| = 4 - 3 = 1, \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \\
 &\Rightarrow B = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$