

الرياضيات

إجابات تدريبات ومسائل
الدرس الخامس
(النظر الضربي للمصفوفة)

كتاب الطالب (الصفحات 52 + 53

الصف : الثاني عشر (أعمال)

إعداد المعلمة :- لينا دباس

الدرس الخامس :- النظر الضربي للمصفوفة

أُبَيِّن في كُلِّ مِمَّا يَأْتِي إِذَا كَانَتْ كُلُّ مَصْفُوفَةٍ تُمَثِّلُ نَظِيرًا ضَرْبِيًّا لِلْمَصْفُوفَةِ الْآخَرَى:

1 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$

2 $C = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

3 $L = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, M = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix}$

4 $G = \begin{bmatrix} -3 & -11 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} 1.5 & 5.5 \\ -0.5 & -1.5 \end{bmatrix}$

1	$AB = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ <p>بما أن $AB \neq I$ ، فإن كلاً من المصفوفة A والمصفوفة B لا تمثل نظيراً ضربياً للآخرى.</p>
2	$CD = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ <p>بما أن $CD = I$ ، فإن كلاً من المصفوفة C والمصفوفة D تمثل نظيراً ضربياً للآخرى.</p>
3	$LM = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ <p>بما أن $LM = I$ ، فإن كلاً من المصفوفة L والمصفوفة M تمثل نظيراً ضربياً للآخرى.</p>
4	$GH = \begin{bmatrix} -3 & -11 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1.5 & 5.5 \\ -0.5 & -1.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ <p>بما أن $GH = I$ ، فإن كلاً من المصفوفة G والمصفوفة H تمثل نظيراً ضربياً للآخرى.</p>

أُبَيِّن إِذَا كَانَتْ كُلُّ مِنَ الْمَصْفُوفَاتِ الْآتِيَةِ مُتَّفِدَةً أَوْ غَيْرَ مُتَّفِدَةٍ، ثُمَّ أَجِدِ النَّظِيرَ الضَّرْبِيَّ لِغَيْرِ الْمُتَّفِدَةِ مِنْهَا:

5 $P = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

6 $Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

7 $S = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$

8 $V = \begin{bmatrix} 8 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

5	$P = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} , \quad P = 10 - 12 = -2$ <p>بما أن $P \neq 0$، فإن المصفوفة P غير منفردة، ولها نظير ضربى هو P^{-1}</p> $P^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.5 & 1.5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$
6	$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} , \quad Q = \frac{1}{6} - 0 = \frac{1}{6}$ <p>بما أن $Q \neq 0$، فإن المصفوفة Q غير منفردة، ولها نظير ضربى هو Q^{-1}</p> $Q^{-1} = 6 \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$
7	$S = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} , \quad S = -6 + 6 = 0$ <p>بما أن $S = 0$، فإن المصفوفة S منفردة، ولا نظير ضربى لها.</p>
8	$V = \begin{bmatrix} 8 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} , \quad V = 8 + 2 = 10$ <p>بما أن $V \neq 0$، فإن المصفوفة V غير منفردة، ولها نظير ضربى هو V^{-1}</p> $V^{-1} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & \frac{1}{10} \\ -\frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix}$

أحلُّ كُلِّ من أنظمة المعادلات الآتية باستعمال النظرى الضربى (إن أمكن):

9 $\begin{cases} 3x + 5y = 13 \\ x - 2y = -3 \end{cases}$

10 $\begin{cases} -2x + 4y = 6 \\ x + 2y = 7 \end{cases}$

11 $\begin{cases} 5x - 8y = 31 \\ 2y - 3x = -13 \end{cases}$

12 $\begin{cases} x + y = 20 \\ x - 2y = -1 \end{cases}$

13 $\begin{cases} 3x + 2y = 8 \\ x = y + 1 \end{cases}$

14 $\begin{cases} 2x + 7y = 24 \\ 4x + 13y = 46 \end{cases}$

9	$\begin{aligned} 3x + 5y &= 13 \\ x - 2y &= -3 \end{aligned}$ $AX = B \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ -3 \end{bmatrix}$ $ A = -6 - 5 = -11$ $A^{-1} = -\frac{1}{11} \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{11} & \frac{5}{11} \\ \frac{1}{11} & -\frac{3}{11} \end{bmatrix}$ $X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} \frac{2}{11} & \frac{5}{11} \\ \frac{1}{11} & -\frac{3}{11} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 13 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ <p>إذن، حل هذا النظام هو (1,2)</p>
10	$\begin{aligned} -2x + 4y &= 6 \\ x + 2y &= 7 \end{aligned}$ $AX = B \Rightarrow \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \end{bmatrix}$ $ A = -4 - 4 = -8$ $A^{-1} = -\frac{1}{8} \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$ $X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ \frac{5}{2} \end{bmatrix}$ <p>إذن، حل هذا النظام هو $(2, \frac{5}{2})$</p>
11	$\begin{aligned} 5x - 8y &= 31 \\ -3x + 2y &= -13 \end{aligned}$ $AX = B \Rightarrow \begin{bmatrix} 5 & -8 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 31 \\ -13 \end{bmatrix}$ $ A = 10 - 24 = -14$ $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-2}{14} & \frac{-8}{14} \\ \frac{-3}{14} & \frac{-5}{14} \end{bmatrix}$ $X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} \frac{-2}{14} & \frac{-8}{14} \\ \frac{-3}{14} & \frac{-5}{14} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 31 \\ -13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-62 + 104}{14} \\ \frac{-93 + 65}{14} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{42}{14} \\ \frac{-28}{14} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$ <p>إذن، حل هذا النظام هو (3, -2)</p>

$$\begin{aligned}x + y &= 20 \\x - 2y &= -1\end{aligned}$$

$$AX = B \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$|A| = -2 - 1 = -3$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{3} \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 20 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 7 \end{bmatrix}$$

إذن، حل هذا النظام هو (13,7)

$$\begin{aligned}3x + 2y &= 8 \\x - y &= 1\end{aligned}$$

$$AX = B \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$|A| = -3 - 2 = -5$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{5} \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

إذن، حل هذا النظام هو (2,1)

$$2x + 7y = 24$$

$$4x + 13y = 46$$

$$AX = B \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 13 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 \\ 46 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 26 - 28 = -2$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 13 & -7 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{13}{2} & \frac{7}{2} \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} -\frac{13}{2} & \frac{7}{2} \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 24 \\ 46 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

إذن، حل هذا النظام هو (5,2)

15 صيدلة: لدى صيدلي محلولا، تركيز الملح في أحدهما 2%، وتركيزه في الآخر 12%. يريد الصيدلي تحضير 10 L من محلول، تركيز الملح فيه 10%. ما المعادلة المصفوفية التي يتعين استعمالها لتحضير الكمية المطلوبة من المحلول؟ أكتب معادلة مصفوفية تمثل المسألة، ثم أحلها.

نفرض أن الصيدلي سيستعمل x لترًا تركيز الملح فيه 2%، و y لترًا تركيز الملح فيه 12%

$$x + y = 10$$

$$0.02x + 0.12y = 0.1 \times 10 = 1$$

$$AX = B \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0.02 & 0.12 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 0.12 - 0.02 = 0.1$$

$$A^{-1} = 10 \begin{bmatrix} 0.12 & -1 \\ -0.02 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.2 & -10 \\ -0.2 & 10 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} 1.2 & -10 \\ -0.2 & 10 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 10 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \end{bmatrix}$$

إذن، سيستعمل الصيدلي 2L من المحلول الذي تركيز الملح فيه 2%، و 8L من الثاني.



16 أوراق نقدية: مع سعاد مجموعة من الأوراق النقدية من فئة 10 JD، وفئة 20 JD، تبلغ قيمتها الإجمالية 750 JD. إذا علمت أن عدد أوراق فئة العشرين ديناراً يقل عن مثلي عدد أوراق فئة عشرة الدنانير بمقدار 5 أوراق، فأكتب معادلة مصفوفية تمثل المسألة، ثم أحلها لإيجاد عدد أوراق النقد التي مع سعاد من كلتا الفئتين.

ليكن x عدد الأوراق النقدية من فئة 10 JD، y عدد الأوراق النقدية من فئة 20 JD.

$$10x + 20y = 750$$

$$y = 2x - 5 \Rightarrow 2x - y = 5$$

$$AX = B \Rightarrow \begin{bmatrix} 10 & 20 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 750 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$|A| = -10 - 40 = -50$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{50} \begin{bmatrix} -1 & -20 \\ -2 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{50} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{50} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} \frac{1}{50} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{50} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 750 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 \\ 29 \end{bmatrix}$$

عدد الأوراق النقدية من فئة 10 JD هو 17، وعدد الأوراق النقدية من فئة 20 JD هو 29.

17 ما قيمة x التي تجعل المصفوفة: $\begin{bmatrix} 5 & x \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ مُنفردة؟

$$17 \quad \begin{vmatrix} 5 & x \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 20 - 2x = 0 \Rightarrow x = 10$$

18 ما قيمة a التي تجعل المصفوفة: $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ نظيراً ضربياً لنفسها؟

$$18 \quad \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow a = \pm 1$$

19 إذا كان: $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$ ، فأجد المصفوفة C ، بحيث يكون: $(B + C)^{-1} = A$.

$$(B + C)^{-1} = A \Rightarrow (B + C)(B + C)^{-1} = (B + C)A$$

$$\Rightarrow I = (B + C)A$$

$$\Rightarrow IA^{-1} = (B + C)AA^{-1}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = B + C$$

$$\Rightarrow C = A^{-1} - B$$

19

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = 4 - 3 = 1 \Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} - B = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

20 إذا كان A مصفوفة من الرتبة 2×2 ، حيث: $A^2 = 2A - 3I$ ، فأثبت أن: $A^3 = A - 6I$.

$$A^2 = 2A - 3I \Rightarrow A^3 = A(A^2) = A(2A - 3I)$$

$$= 2A^2 - 3A$$

$$= 2(2A - 3I) - 3A$$

$$= 4A - 6I - 3A$$

$$= A - 6I$$

20

21 أحل المسألة الواردة في بند (مسألة اليوم).



مسألة اليوم استأجر مُنظِّمو رحلة بحرية في خليج العقبة 8 قوارب،

بعضها يحمل 4 أشخاص، وبعضها الآخر يحمل

7 أشخاص. إذا كان عدد المشاركين في الرحلة

50 شخصًا، فاستعمل معادلة مصفوفية لإيجاد عدد

القوارب المُستأجرة من كل نوع.

ليكن x عدد القوارب التي حملتها 4 أشخاص، y عدد القوارب التي حملتها 7 أشخاص.

$$x + y = 8$$

$$4x + 7y = 50$$

$$AX = B \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 50 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 7 - 4 = 3$$

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} \frac{7}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 8 \\ 50 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

عدد القوارب التي حملتها 4 أشخاص هو 2، وعدد القوارب التي حملتها 7 أشخاص هو 6.

22 تبرير: إذا كان: $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ، وكانت: $a > 0, d > 0, b < 0, c < 0, |A| \neq 0$ ، فهل توجد عناصر سالبة في A^{-1} ؟
أبرر إجابتي.

$$|A| = ad - cb$$

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - cb} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

22 العدد $\frac{1}{ad - cb}$ قد يكون موجباً أو سالباً، وجميع عناصر المصفوفة $\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ هي أعداد موجبة،
إن، إما أن تكون جميع عناصر المصفوفة A^{-1} موجبة إذا كانت $|A| > 0$ ، أو جميعها سالبة إذا كانت $|A| < 0$.

23 برهان: إذا كان: $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, وكان: $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, فأثبت أن: $(AB)^{-1} = B^{-1} \times A^{-1}$.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, |A| = 2, A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, |B| = 3 - 1 = 2, B^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

23 $AB = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -11 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, |AB| = 15 - 11 = 4$

$$(AB)^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 3 & 11 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{11}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{5}{4} \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} \times A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{11}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{5}{4} \end{bmatrix} = (AB)^{-1}$$

24 أكتشف المختلف: أي المصفوفات الآتية مختلفة؟ أبرر إجابتني.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

24 المصفوفة المختلفة هي المصفوفة $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ لأنها غير منفردة، بينما بقية المصفوفات في المجموعة منفردة.

25 تحدّد: إذا كان: $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$, فأجد المصفوفة B التي تُحقّق المعادلة: $BA^2 = A$.

$$\begin{aligned}
 BA^2 = A &\Rightarrow BAA = A \\
 &\Rightarrow (BAA)A^{-1} = AA^{-1} \\
 &\Rightarrow BA(AA^{-1}) = AA^{-1} \\
 &\Rightarrow (BA)I = I \\
 &\Rightarrow BA = I \\
 &\Rightarrow (BA)A^{-1} = IA^{-1} \\
 &\Rightarrow B(AA^{-1}) = A^{-1} \\
 &\Rightarrow BI = A^{-1} \\
 &\Rightarrow B = A^{-1}
 \end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad |A| = 4 - 3 = 1, \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow B = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$