الرياضيات

إجابات تدريبات ومسائل
الدرس الثالث
(المحددات وقاعدة كريمر)

كتاب التمارين(الصفحات 16 + 17)

الصف : الثاني عشر (أعمال)

إعداد المعلمة :- لينا دباس

الدرس الرابع :- المحددات وقاعدة كريمر

أجد قيمة كلٍّ من المُحدِّدات الآتية:

1) $\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$ 2) $\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ 3) $\begin{vmatrix} -5 & 10 \\ -3 & 6 \end{vmatrix}$

4) $\begin{vmatrix} 7 & -3 & 1 \\ 8 & 0 & 4 \\ 2 & -5 & 6 \end{vmatrix}$ 5) $\begin{vmatrix} 4 & -2 & -4 \\ -6 & 3 & 6 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix}$ 6) $\begin{vmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \\ -2 & 2 & 8 \end{vmatrix}$

1	$\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 5 + 6 = 11$
2	$\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 16 - 15 = 1$
3	$\begin{vmatrix} -5 & 10 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = -30 + 30 = 0$
4	$\begin{vmatrix} 7 & -3 & 1 \\ 8 & 0 & 4 \\ 2 & -5 & 6 \end{vmatrix} = 7 \times \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -5 & 6 \end{vmatrix} + 3 \times \begin{vmatrix} 8 & 4 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} + 1 \times \begin{vmatrix} 8 & 0 \\ 2 & -5 \end{vmatrix}$ $= 7(0 + 20) + 3(48 - 8) + 1(-40 - 0)$ $= 140 + 120 - 40 = 220$
5	$\begin{vmatrix} 4 & -2 & -4 \\ -6 & 3 & 6 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 4 \times \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} + 2 \times \begin{vmatrix} -6 & 6 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} - 4 \times \begin{vmatrix} -6 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$ $= 4(-6 - 0) + 2(12 + 6) - 4(0 + 3)$ $= -24 + 36 - 12 = 0$
6	$\begin{vmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 4 & 7 & 6 \\ -2 & 2 & 8 \end{vmatrix} = 5 \times \begin{vmatrix} 7 & 6 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} + 3 \times \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ -2 & 8 \end{vmatrix} + 1 \times \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}$ $= 5(56 - 12) + 3(32 + 12) + 1(8 + 14)$ $= 220 + 132 + 22 = 374$

7) إذا كان: $A = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$، فأجد قيمة كلٍّ من $|AB|$، و $|BA|$.

7	$\|AB\| = \begin{vmatrix} 13 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 39 - 4 = 35$ $\|BA\| = \begin{vmatrix} -9 & 26 \\ -10 & 25 \end{vmatrix} = -225 + 260 = 35$

8 إذا كانت: $\begin{vmatrix} x & 8 \\ 2 & x \end{vmatrix} = 9$، فأجد قيمة x.

8	$x^2 - 16 = 9 \Rightarrow x^2 = 25 \Rightarrow x = \pm 5$

9 إذا كان: $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$، فأجد مُحدِّدة A^2، ثمَّ أُبيِّن علاقتها بمُحدِّدة A.

9	$A^2 = AA = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 8 & -4 \end{bmatrix}$ $\lvert A^2 \rvert = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 8 & -4 \end{vmatrix} = 16$ $\lvert A \rvert = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 4$ نلاحظ أن $\lvert A^2 \rvert = \lvert A \rvert^2$

10 تُعطى معادلة المستقيم المارِّ بالنقطتين $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ بالقاعدة: $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$. أستعمل هذه القاعدة لإيجاد معادلة المستقيم المارِّ بالنقطتين $(2, -5), (-1, 3)$.

10	$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & -5 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x \times \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} - y \times \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 1 \times \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = 0$ $\Rightarrow x(3+5) - y(-1-2) + (5-6) = 0$ $\Rightarrow 8x + 3y - 1 = 0$

أحُلُّ كُلًّا من أنظمة المعادلات الآتية باستعمال قاعدة كريمر:

11 $3x - 5y = 22$
$2x + y = 6$

12 $3y + 5x = 7$
$2x - 4y = 8$

13 $3x = y + 10$
$4y = 6 + 5x$

11

$3x - 5y = 22$

$2x + y = 6$

$C = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $D = |C| = \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 + 10 = 13$

$x = \dfrac{\begin{vmatrix} 22 & -5 \\ 6 & 1 \end{vmatrix}}{13} = \dfrac{22 + 30}{13} = \dfrac{52}{13} = 4$

$y = \dfrac{\begin{vmatrix} 3 & 22 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}}{13} = \dfrac{18 - 44}{13} = \dfrac{-26}{13} = -2$

إذن، حل النظام هو: $(4, -2)$

12

$5x + 3y = 7$

$2x - 4y = 8$

$C = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$, $D = |C| = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -20 - 6 = -26$

$x = \dfrac{\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 8 & -4 \end{vmatrix}}{-26} = \dfrac{-28 - 24}{-26} = \dfrac{-52}{-26} = 2$

$y = \dfrac{\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 8 \end{vmatrix}}{-26} = \dfrac{40 - 14}{-26} = \dfrac{26}{-26} = -1$

إذن، حل النظام هو: $(2, -1)$

13

$3x - y = 10$

$5x - 4y = -6$

$C = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$, $D = |C| = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = -12 + 5 = -7$

$x = \dfrac{\begin{vmatrix} 10 & -1 \\ -6 & -4 \end{vmatrix}}{-7} = \dfrac{-40 - 6}{-7} = \dfrac{-46}{-7} = \dfrac{46}{7}$

$y = \dfrac{\begin{vmatrix} 3 & 10 \\ 5 & -6 \end{vmatrix}}{-7} = \dfrac{-18 - 50}{-7} = \dfrac{-68}{-7} = \dfrac{68}{7}$

إذن، حل النظام هو: $\left(\frac{46}{7}, \frac{68}{7}\right)$

14 حلَّت سلمى نظامًا من معادلتين خطِّيتين بالمُتغيِّرين x، وy باستعمال قاعدة كريمر، فوجدت أنَّ $x = \frac{\begin{vmatrix}3 & 5\\ -1 & 2\end{vmatrix}}{D}$, $y = \frac{\begin{vmatrix}4 & 3\\ 1 & -1\end{vmatrix}}{D}$. ما قيمة كلٍّ من x، وy؟

14	مصفوفة المعاملات عمودها الأول هو معاملات x وعمودها الثاني هو معاملات y، معاملات x تظهر في العمود الأول لمحددة y ، و معاملاتy تظهر في العمود الثاني لمحددة x إذن: $D = \begin{vmatrix}4 & 5\\ 1 & 2\end{vmatrix} = 8 - 5 = 3$ $x = \frac{\begin{vmatrix}3 & 5\\ -1 & 2\end{vmatrix}}{3} = \frac{6+5}{3} = \frac{11}{3}$ $y = \frac{\begin{vmatrix}4 & 3\\ 1 & -1\end{vmatrix}}{3} = \frac{-4-3}{3} = \frac{-7}{3}$

15 أجد مساحة المُثلَّث الذي رؤوسه: $A(-2, 5), B(7, 11), C(1, 15)$ باستعمال المُحدِّدات.

15	$A = \begin{vmatrix}-2 & 5 & 1\\ 7 & 11 & 1\\ 1 & 15 & 1\end{vmatrix} = -2 \times \begin{vmatrix}11 & 1\\ 15 & 1\end{vmatrix} - 5 \times \begin{vmatrix}7 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix} + 1 \times \begin{vmatrix}7 & 11\\ 1 & 15\end{vmatrix}$ $= -2(11 - 15) - 5(7 - 1) + 1(105 - 11)$ $= 8 - 30 + 94 = 72$ $Area = \frac{1}{2}\lvert A\rvert = \frac{1}{2} \times 72 = 36$

16 **نقود:** يوجد في صندوق مُحاسِب 75 ورقة نقد أردنية من فئة الدينار وخمسة الدنانير وعشرة الدنانير، تبلغ قيمتها الإجمالية 460 JD. إذا كان عدد أوراق النقد من فئة خمسة الدنانير يساوي 4 أمثال عدد أوراق النقد من فئة الدينار، فأجد عدد ما في الصندوق من أوراق النقد لكل فئة باستعمال قاعدة كريمر.

	ليكن x عدد الأوراق النقدية من فئة الدينار، فيكون عدد الأوراق النقدية من فئة خمسة دنانير هو 4x، وليكن عدد الأوراق النقدية من فئة عشرة الدنانير y.
16	$x + 4x + y = 75 \quad \Longrightarrow 5x + y = 75$ $x + 20x + 10y = 460 \Longrightarrow 21x + 10y = 460$ $C = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 21 & 10 \end{bmatrix}$ $D = \lvert C \rvert = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 21 & 10 \end{vmatrix} = 50 - 21 = 29$ $x = \dfrac{\begin{vmatrix} 75 & 1 \\ 460 & 10 \end{vmatrix}}{29} = \dfrac{750 - 460}{29} = \dfrac{290}{29} = 10$ $y = \dfrac{\begin{vmatrix} 5 & 75 \\ 21 & 460 \end{vmatrix}}{29} = \dfrac{2300 - 1575}{29} = \dfrac{725}{29} = 25$ إذن، عدد الأوراق النقدية من فئة الدينار هو 10، وعدد الأوراق النقدية من فئة عشرة الدنانير 25، وعدد الأوراق النقدية من فئة خمسة دنانير هو 10×4 ويساوي 40 ورقة.