الرياضيات

إجابات تدريبات ومسائل
الدرس الثالث
(ضرب المصفوفات)

كتاب التمارين(الصفحات 14 + 15)

الصف : الثاني عشر (أعمال)

إعداد المعلمة :- لينا دباس

الدرس الثالث :- ضرب المصفوفات

الدرس 3

ضرب المصفوفات
Matrix Multiplication

الوحدة 1:

إذا كانت $A_{5\times3}$، وكانت $B_{2\times3}$، وكانت $C_{3\times5}$، فأُحدِّد عمليات الضرب المُمكِنة ممّا يأتي، ثمَّ أجد رتبة المصفوفة الناتجة:

1) AB 2) AC 3) CA 4) BC 5) CB

الحل :-

1	بما أن عدد أعمدة المصفوفة A لا يساوي عدد صفوف المصفوفة B، فإنه لا يمكن إيجاد $A \times B$
2	$\underset{5\times 3}{A} \times \underset{3\times 5}{C} = \underset{5\times 5}{A\times C}$ مُتساويان رتبة $A\times C$
3	$\underset{3\times 5}{C} \times \underset{5\times 3}{A} = \underset{3\times 3}{C\times A}$ مُتساويان رتبة $C\times A$
4	$\underset{2\times 3}{B} \times \underset{3\times 5}{C} = \underset{2\times 5}{B\times C}$ مُتساويان رتبة $B\times C$
5	بما أن عدد أعمدة المصفوفة C لا يساوي عدد صفوف المصفوفة B، فإنه لا يمكن إيجاد $C \times B$

إذا كان: $A=\begin{bmatrix}3 & -2\\ 1 & 4\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}5 & 3 & -2\\ -4 & 1 & 7\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}2 & 2\\ -4 & 3\\ 1 & 5\end{bmatrix}, D=\begin{bmatrix}-3\\ 0\\ -1\end{bmatrix}$، فأجد كُلًّا ممّا يأتي (إنْ أمكن):

6) AB 7) BA 8) BC

9) CB 10) BD 11) $2A+3BC$

12) A^2 13) A^3 14) $(CB)^2$

الحل :-

6	$AB=\begin{bmatrix}3 & -2\\ 1 & 4\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}5 & 3 & -2\\ -4 & 1 & 7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}23 & 7 & -20\\ -11 & 7 & 26\end{bmatrix}$
7	بما أن عدد أعمدة المصفوفة B لا يساوي عدد صفوف المصفوفة A، فإنه لا يمكن إيجاد $B\times A$
8	$BC=\begin{bmatrix}5 & 3 & -2\\ -4 & 1 & 7\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}2 & 2\\ -4 & 3\\ 1 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4 & 9\\ -5 & 30\end{bmatrix}$
9	$CB=\begin{bmatrix}2 & 2\\ -4 & 3\\ 1 & 5\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}5 & 3 & -2\\ -4 & 1 & 7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 8 & 10\\ -32 & -9 & 29\\ -15 & 8 & 33\end{bmatrix}$
10	$BD=\begin{bmatrix}5 & 3 & -2\\ -4 & 1 & 7\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}-3\\ 0\\ -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-13\\ 5\end{bmatrix}$
11	$2A+3BC=2\begin{bmatrix}3 & -2\\ 1 & 4\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}-4 & 9\\ -5 & 30\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-6 & 23\\ -13 & 98\end{bmatrix}$
12	$A^2=AA=\begin{bmatrix}3 & -2\\ 1 & 4\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}3 & -2\\ 1 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7 & -14\\ 7 & 14\end{bmatrix}$
13	$A^3=A^2A=\begin{bmatrix}7 & -14\\ 7 & 14\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}3 & -2\\ 1 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7 & -70\\ 35 & 42\end{bmatrix}$ أو $A^3=AA^2=\begin{bmatrix}3 & -2\\ 1 & 4\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}7 & -14\\ 7 & 14\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7 & -70\\ 35 & 42\end{bmatrix}$
14	$(CB)^2=CB\times CB=\begin{bmatrix}2 & 8 & 10\\ -32 & -9 & 29\\ -15 & 8 & 33\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}2 & 8 & 10\\ -32 & -9 & 29\\ -15 & 8 & 33\end{bmatrix}$ $=\begin{bmatrix}-402 & 24 & 582\\ -211 & 57 & 376\\ -781 & 72 & 1171\end{bmatrix}$

15 إذا كانت: $\begin{bmatrix} 7 & -7 \\ 8 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ x & 2 \end{bmatrix}$، فأجد قيمة كلٍّ من x، وy.

الحل :-

15	$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ x & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} y & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -7 \\ 8 & -3 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} y+9 & -7 \\ xy+6 & -x-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -7 \\ 8 & -3 \end{bmatrix}$ $-x-4=-3 \Rightarrow x=-1$ $y+9=7 \Rightarrow y=-2$

16 أجد ناتج: $\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \times [3 \quad 2 \quad -4]$.

الحل :-

16	$\left([3 \quad 2 \quad -4] \times \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}\right) \times \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} = [5 \quad 16] \times \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} = [-18 \quad 90]$ أو $[3 \quad 2 \quad -4] \times \left(\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}\right) = [3 \quad 2 \quad -4] \times \begin{bmatrix} 18 & 30 \\ 0 & 12 \\ 18 & 6 \end{bmatrix} = [-18 \quad 90]$

17 إذا كان: $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \sqrt{3} & -1 \end{bmatrix}$، فأجد B^3.

الحل :-

17	$B^3 = B \times B \times B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \sqrt{3} & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \sqrt{3} & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \sqrt{3} & -1 \end{bmatrix}$ $= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \sqrt{3} & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \sqrt{3} & -1 \end{bmatrix}$

18 إذا كان: $A = \begin{bmatrix} 6 \\ 18 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$، فأجد المصفوفة C، بحيث يكون $A + C = BC$.

الحل :-

18	رتبةA هي 1×2 فيجب أن تكون رتبة C أيضا 1×2 حتى يمكن جمعها مع المصفوفة A. أفرض أن $C = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ $A + C = BC \Rightarrow \begin{bmatrix} 6 \\ 18 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ $\Rightarrow \begin{bmatrix} 6+x \\ 18+y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x+4y \\ 2x-y \end{bmatrix}$ $6 + x = 3x + 4y \Rightarrow 2x + 4y = 6$ $18 + y = 2x - y \Rightarrow 2x - 2y = 18$ بطرح المعادلة الثانية من المعادلة الأولى نجد: $6y = -12 \Rightarrow y = -2$ وبتعويض قيمة y في المعادلة الأولى نجد: $x = 7$ إذن، $C = \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \end{bmatrix}$.

مبيعات: يُبيِّن الجدول الأيمن قيمة مبيعات أحذية الرجال والنساء والأطفال (بالدنانير) لثلاثة مندوبي مبيعات، ويُبيِّن الجدول الأيسر نسب العمولة القديمة والجديدة للمبيعات. أُجيب عن السؤالين التاليين اعتمادًا على المعلومات الواردة في هذين الجدولين:

	أحذية الرجال	أحذية النساء	أحذية الأطفال
المندوب 1	1200	2300	900
المندوب 2	3100	2800	1100
المندوب 3	3700	2600	800

	النسبة القديمة	النسبة الجديدة
أحذية الرجال	9%	9.5%
أحذية النساء	9%	10%
أحذية الأطفال	13%	12%

19 أجد المصفوفة التي تُمثِّل ما يجنيه كلٌّ من المندوبين الثلاثة وَفق النسبة الجديدة والنسبة القديمة.

الحل

19	$\begin{bmatrix} 1200 & 2300 & 900 \\ 3100 & 2800 & 1100 \\ 3700 & 2600 & 800 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0.09 & 0.095 \\ 0.09 & 0.1 \\ 0.13 & 0.12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 432 & 452 \\ 674 & 706.5 \\ 671 & 707.5 \end{bmatrix}$

20 أُحدِّد المندوب الأكثر استفادة من تغيير نسب العمولة، ثمَّ أُبرِّر إجابتي.

الحل :-

20	$452 - 432 = 20$ $706.5 - 674 = 32.5$ $707.5 - 671 = 36.5$ المندوب الثالث هو الأكثر استفادة من تغيير نسب العمولة.

أُحدِّد إذا كانت كل عبارة ممّا يأتي صحيحة أحيانًا، أو صحيحة دائمًا، أو غير صحيحة أبدًا، ثمَّ أُبرِّر إجابتي:

21 إذا أمكن إيجاد AB وBA، فإنَّ المصفوفة A والمصفوفة B مُربَّعتان.

21	العبارة صحيحة أحيانًا، إذ إن المصفوفتين المربعتين يمكن إيجاد حاصل ضربهما بأي ترتيب كان إذا كان لهما الرتبة نفسها. وكذلك المصفوفتان ذات الرتبتين: $i \times j$ و $j \times i$ يمكن أيضًا إيجاد حاصل ضربهما بأي ترتيب كان حتى لو لم تكونا مربعتين.

22 إذا كان AB مصفوفة صفرية، فإنَّ A مصفوفة صفرية، أو B مصفوفة صفرية.

الحل :-

22	العبارة صحيحة أحيانًا، لأنه إذا كانت إحدى المصفوفتين صفرية فبالتأكيد حاصل ضربها مصفوفة أخرى صفرية أيضا. لكن، قد يكون حاصل ضرب المصفوفتين مصفوفة صفرية دون أن تكون أيٌ منهما صفرية، مثلًا: $\begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$ مثال آخر: $\begin{bmatrix} 4 & -8 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1.5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$